Применение симметрии при решении алгебраических задач

Учениц 10И класса:
Коротковой Анастасии
Журавлёвой Дарьи
Руководитель:
учитель высшей категории
Тимофеева М. Н.

2008 год

Цель работы: глубже изучить понятие «симметрия» и ее практическое применение.

Задачи:

- изучить виды симметрии, преобразования;
- изучить понятие «функция», способы задания функции, свойства функции;
- изучить методы решения уравнений высших степеней;
- показать практическое применение данных вопросов.

Существуют **преобразования**, которые сохраняют расстояния между точками (**движение**) и преобразования, которые изменяют расстояния между точками в некоторое число раз (**гомотетия – подобие**).

Симметрия – движение, преобразование плоскости или пространства, при котором сохраняется расстояние между точками.

Функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x из множества X соответствует единственное значение переменной y из множества Y.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Чётность функции.

Функция $y=f(x)$ может быть чётной или нечётной, если её область определения симметрична относительно 0;

Чётная функция: $f(x)=f(-x)$ для любых x из $D(y)$;

Нечётная функция: $-f(x)=f(-x)$ для любых x из $D(y)$;

Если не выполняется ни одно из соотношений, то функцию называют **ни чётной, ни нечётной.**

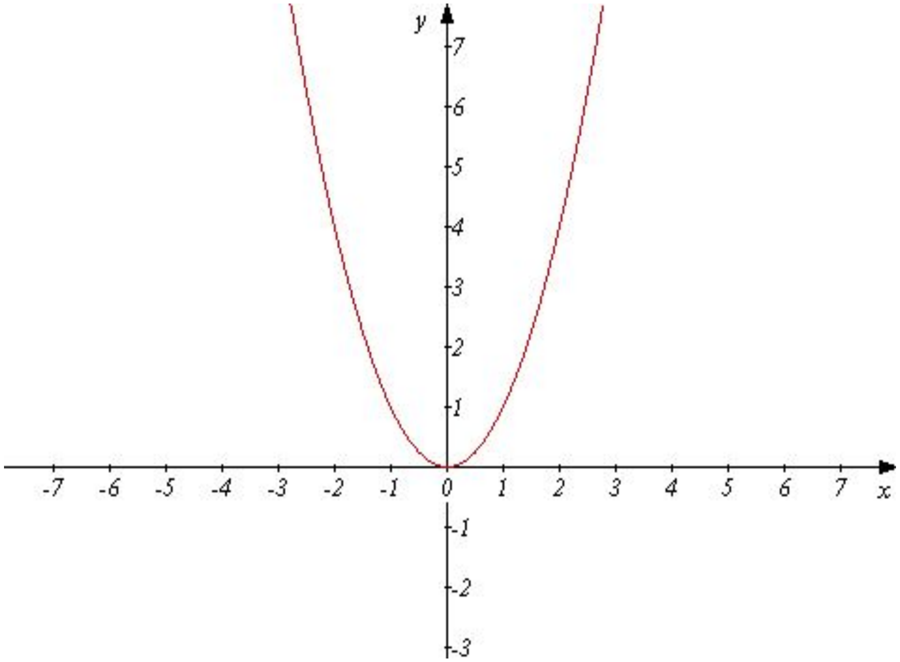
Монотонность функции.

Функция $y=f(x)$ **монотонно возрастает** на промежутке I, если для любых x_1 и x_2 из I таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$;

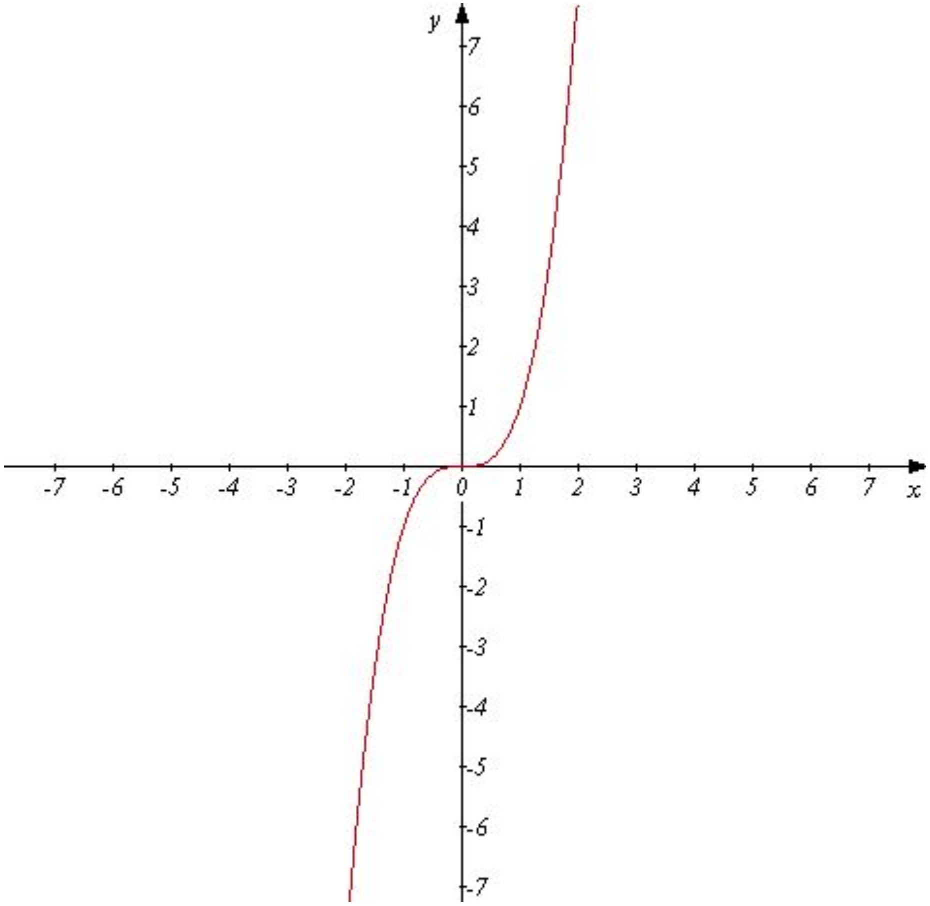
Функция $y=f(x)$ **монотонно убывает** на промежутке I, если для любых x_1 и x_2 из I таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Графики функций

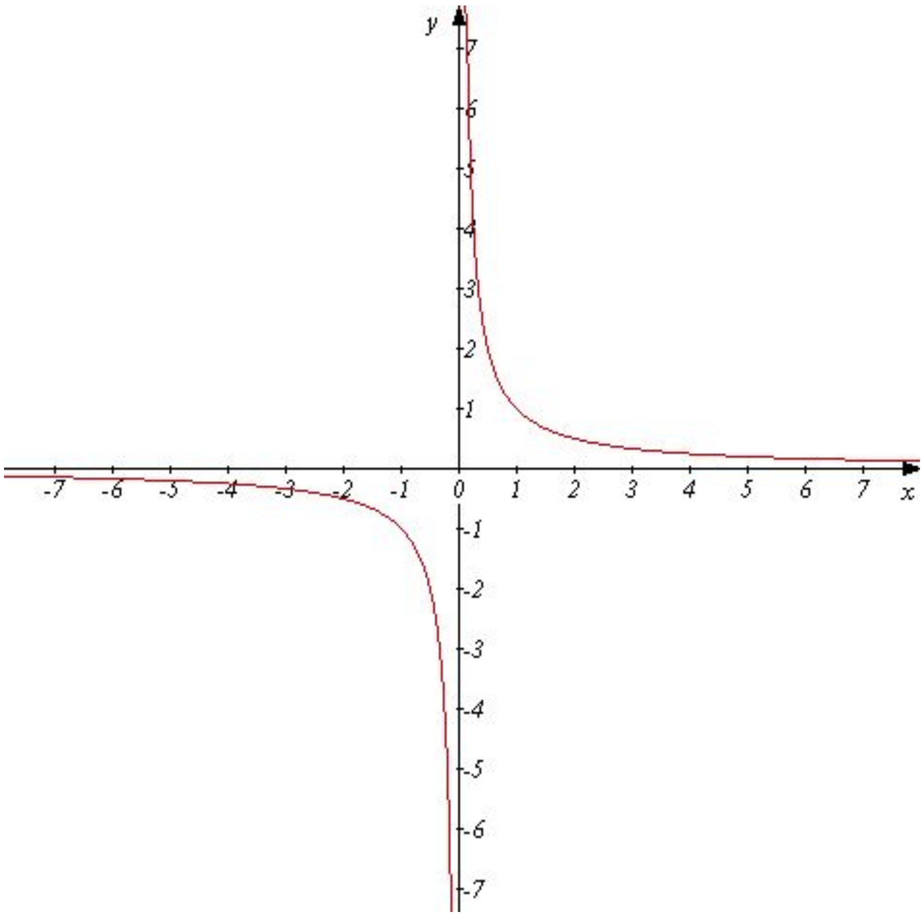
$y=x^2$



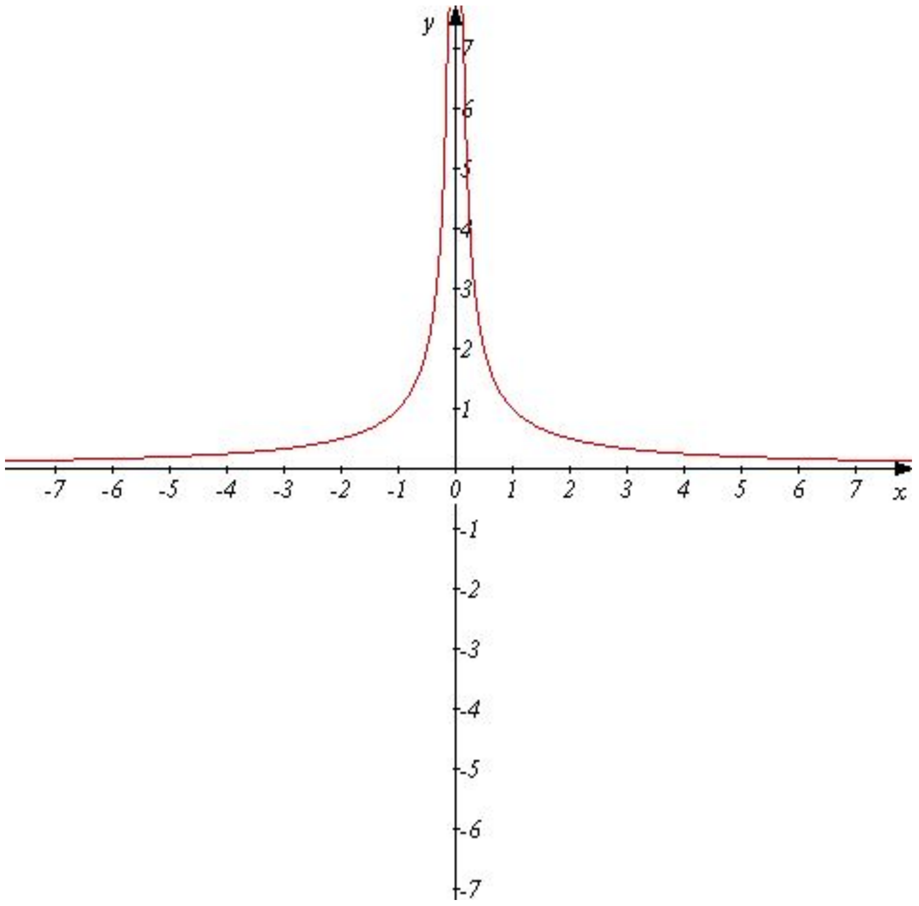
$y=x^3$



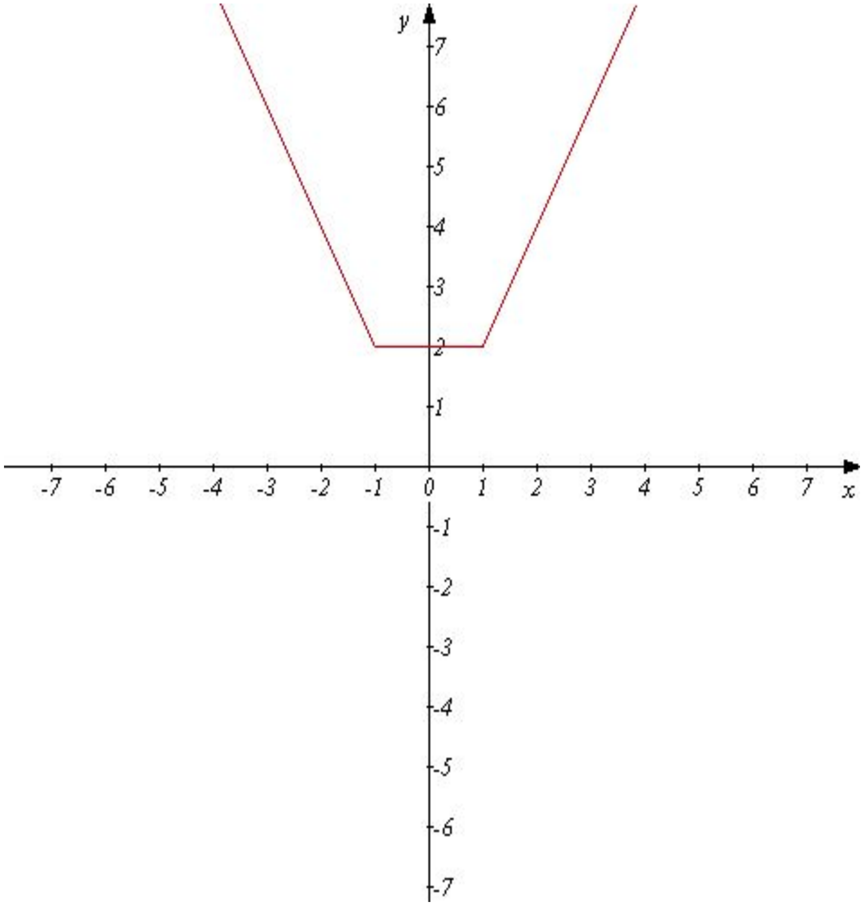
$y=\frac{1}{x}$



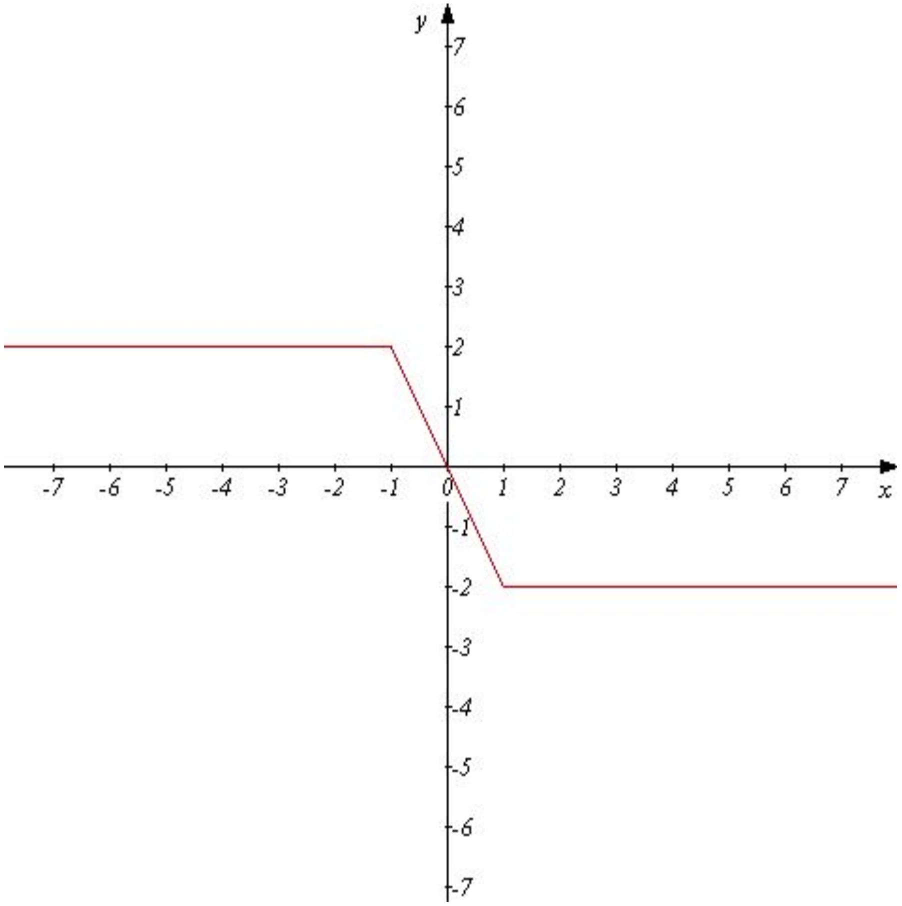
$y=\frac{1}{|x|}$



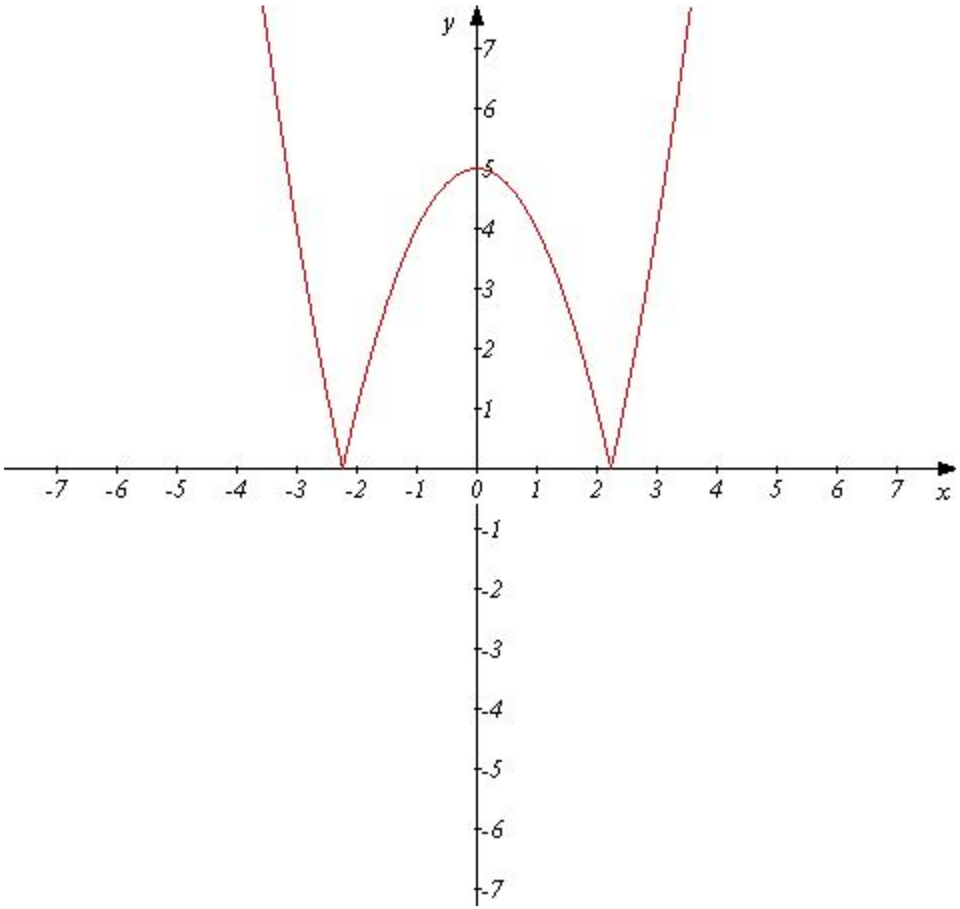
$y=|1-x|+|1+x|$



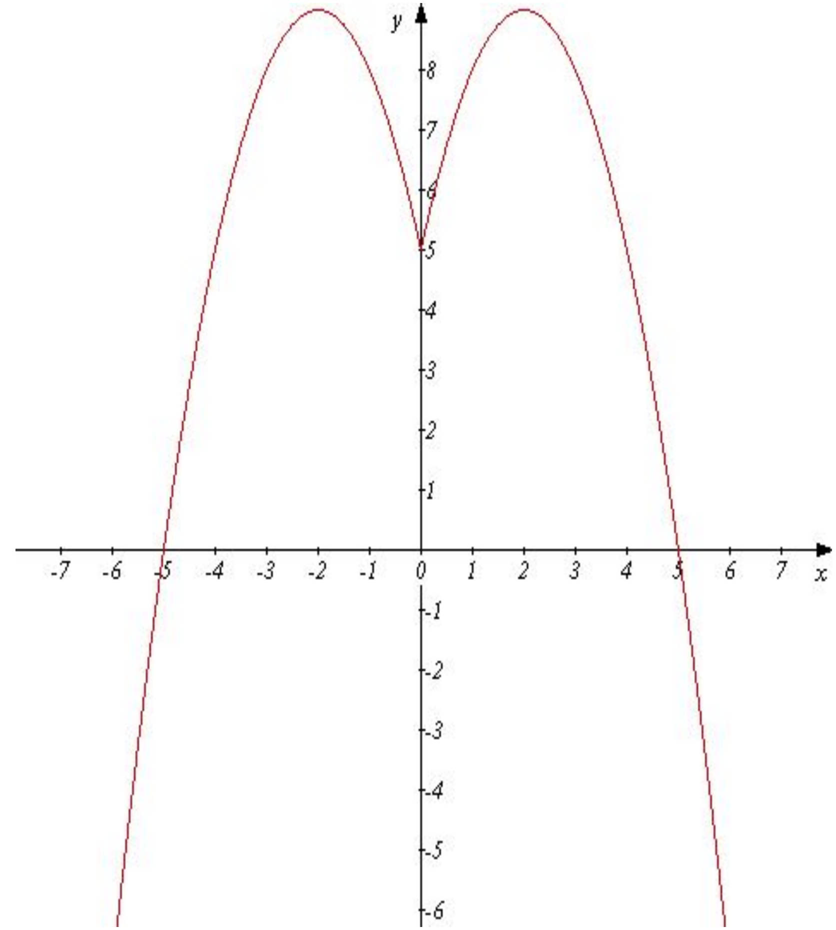
$y=|1-x|-|1+x|$



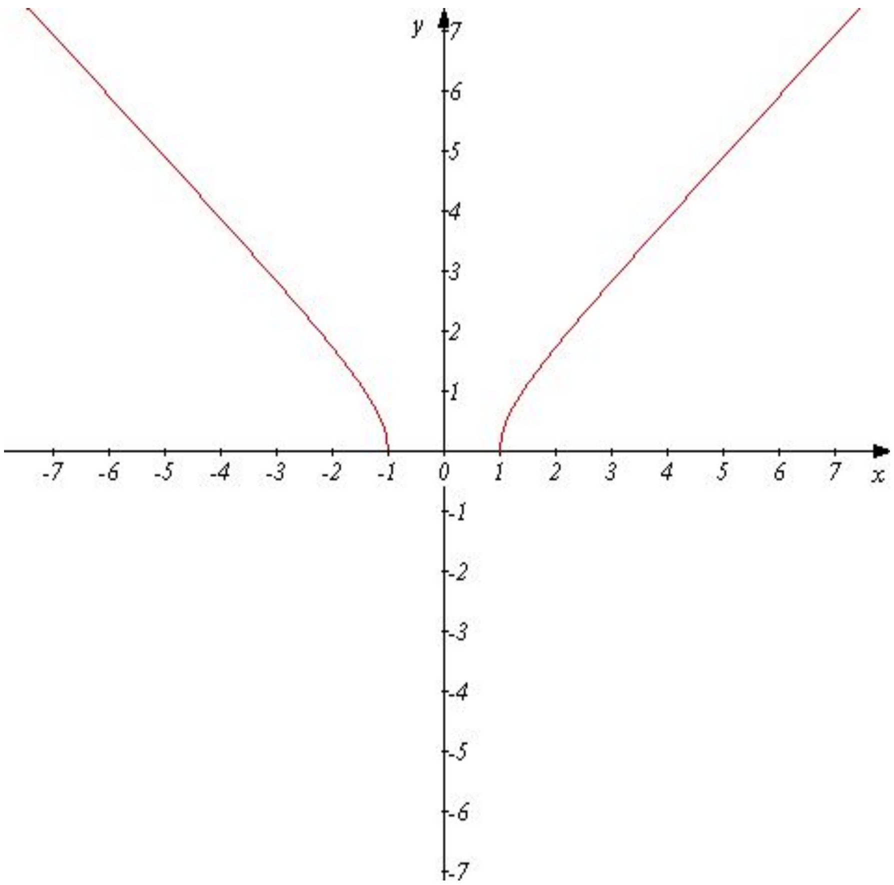
$y = |x^2 - 5|$


y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7

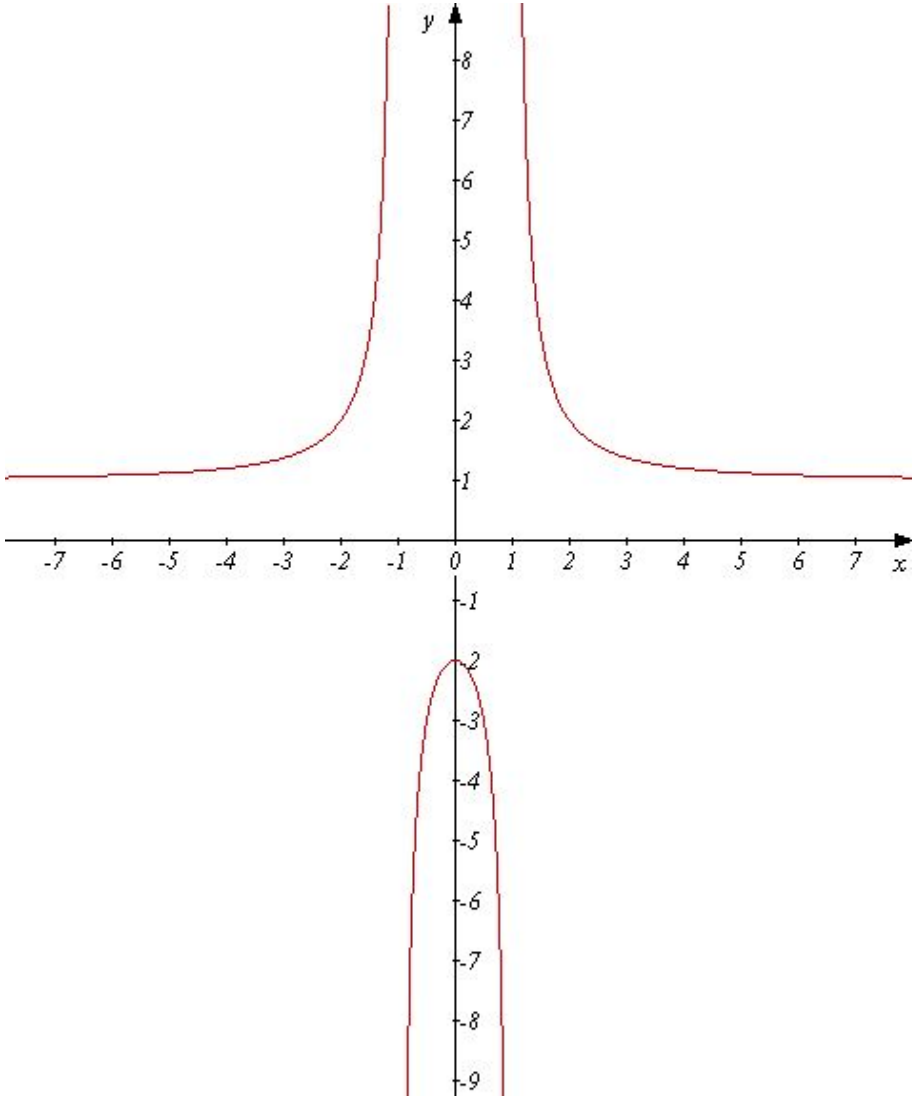
$y = (5 - |x|)(|x| + 1)$


y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
8 7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6

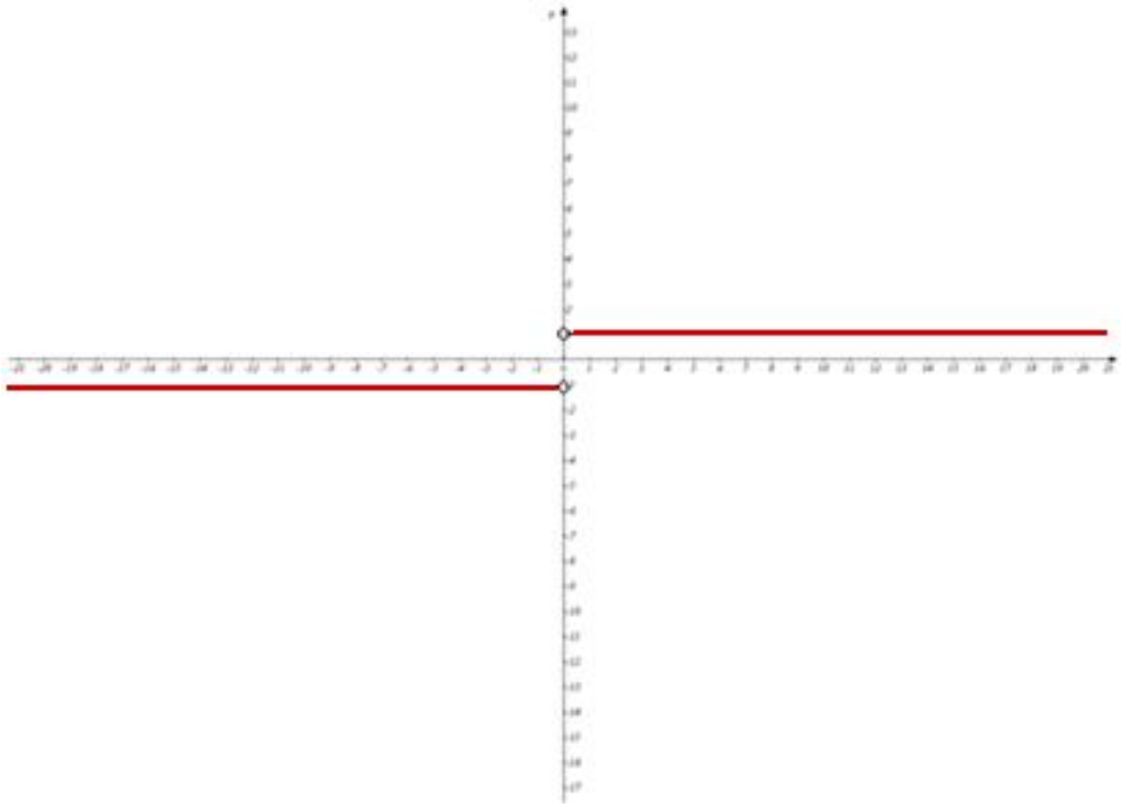
$y=\sqrt{x^2-1}$



$y=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$



y= sgn x



Решение систем нелинейных уравнений с параметром графически

Пример: дана система уравнений

Найти количество решений в зависимости от параметра а

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \ (a > 0). \end{cases}$$

Ответ:

$0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $a>1$,то нет решений;

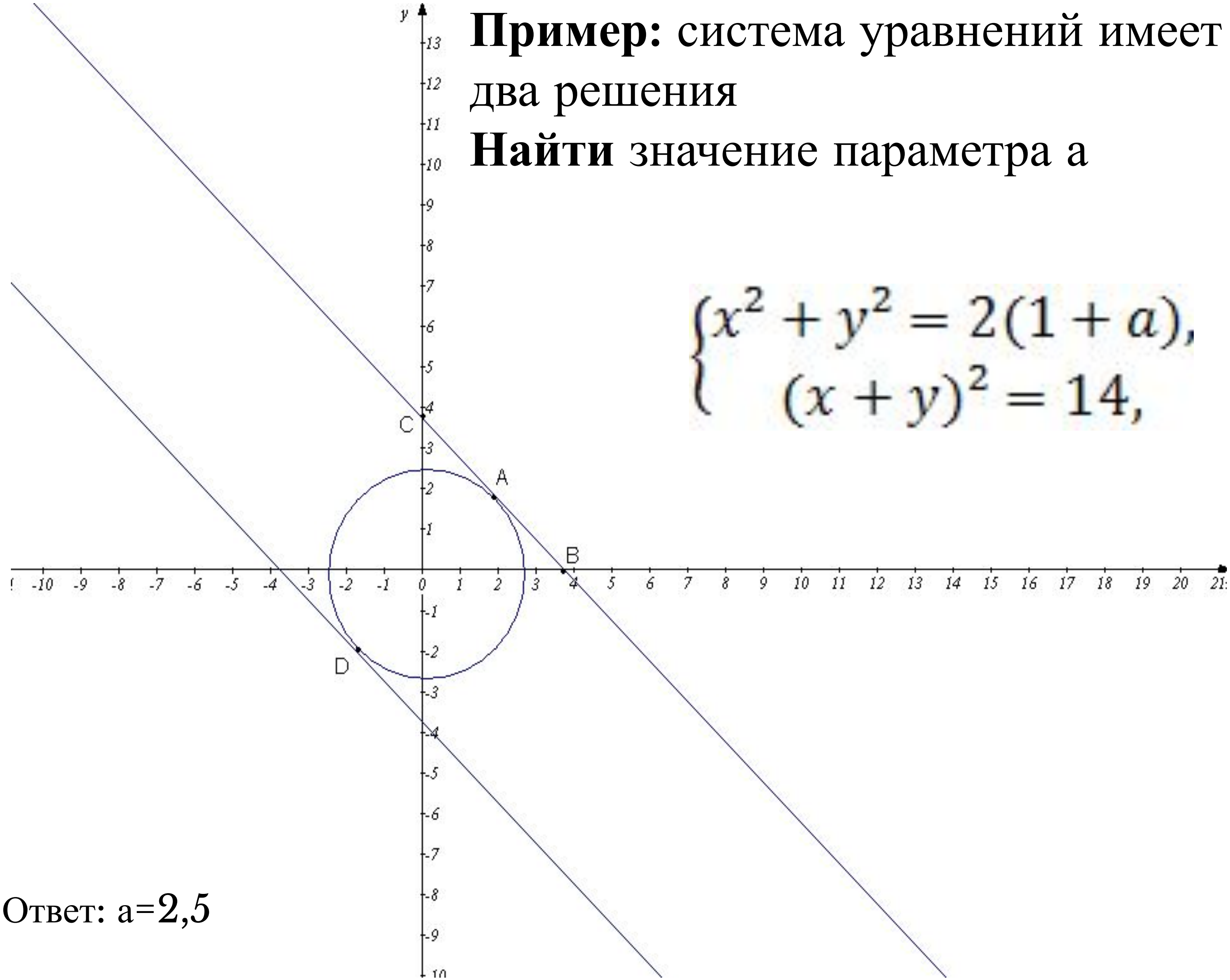
если $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $a=1$, то решений 4;

если $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$, то решений восемь.

Пример: система уравнений имеет два решения

Найти значение параметра а

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14, \end{cases}$$



Ответ: а=2,5

Решение некоторых уравнений аналитическими методами, основанных на симметрии

Уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \quad + a_{n-1}x + a_n = 0$

Где a_0 ,...a_n - некоторые числа $a_0 \neq 0$,

x- переменная, называется уравнением n- степени от одной переменной x.

Симметрическое(возвратное) уравнение четвёртой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$$

где a≠0

Решение симметрических уравнений высших степеней

$$2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$$

x=0 не является корнем уравнения, значит разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$

$$2x^2 + x - 11 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 11 = 0$$

Пусть $y = x + \frac{1}{x}$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

получим $2(y^2 - 2) + y - 11 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} y = 2{,}5 \\ y = -3 \end{array}\right.$$

Возвращаясь к уравнению замены, получим $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0{,}5 \end{array}\right.$

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=A$$

Где a< b< c< d, b-a=d-c

$$y=\frac{(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)}{4}=x-\frac{a+b+c+d}{4}$$

Решить уравнение **(1-12x)(1-6x)(1-4x)(1-3x)=5**

(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5

$$y=\frac{1}{4}\left(\left(x-\frac{1}{12}\right)+\left(x-\frac{1}{6}\right)+\left(x-\frac{1}{4}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)=x-\frac{5}{24}$$

$$x=y+\frac{5}{24}$$

$$\left[y^2-\left(\frac{1}{24}\right)^2\right]\cdot\left[y^2-\left(\frac{3}{24}\right)^2\right]=\frac{5}{3\times4\times6\times12}$$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{7}{24}, \\ y=-\frac{7}{24}. \end{array}\right.$$

Соответствующие корни исходного уравнения равны $-\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{2}$

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=Ax^2$, где ab= cd

$y=x+\frac{ab}{x}$

Решить уравнение $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$

$$(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=4x^2$$

$$\left(x+14+\frac{24}{x}\right)\left(x+11+\frac{24}{x}\right)=4$$

$$x+\frac{24}{x}=y$$

$$(y+14)(y+11)=4$$

$$\left[\begin{array}{l} y=-10 \\ y=-15 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-15-\sqrt{129}}{2} \\ x=\frac{-15+\sqrt{129}}{2} \\ x=-6 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Уравнение вида $(x-a)^n + (x-b)^n = A$, где n>2, ***n Є N***

можно решить, используя ***метод симметризации***, т.е. делая замену

$$y = x - \frac{a+b}{2}$$

Решить $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$

$$y = \frac{x-2+x-4}{2} = x-3$$

x=y+3

$$(y+1)^6 + (y-1)^6 = 64$$

$y^6 + 15y^4 + 15y^2 - 31 = 0$, тогда, пусть $y^2 = t$, получим

$$t^3 + 15t^2 + 15t - 31 = 0$$

$$t^3 + 15t^2 + 15t - 31 = (t-1)(t^2 + 16t + 31)$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Уравнения с параметром

Пример: может ли уравнение $2x^6 - x^4 - ax^2 = 1$ иметь три корня (№6.221,математика-11).

$$y = 2x^6 - x^4 - ax^2 - 1$$

D(y)=R

$$y(-x) = 2x^6 - x^4 - ax^2 - 1 = y(x)$$

X=0 не является корнем уравнения

Ответ: данное уравнение не может иметь три корня.

Использование свойств четности при решении уравнений

Пример (ЕГЭ 2008): дана функция $g(x)=2,3+f(x-9)$ и нечетная функция $f(x)$, найти значение выражения $g(6)+g(8)+g(10)+g(12)$.

Решение:

$g(6) = 2,3 + f(-3)$

$g(8) = 2,3 + f(-1)$

$g(10) = 2,3 + f(1)$

$g(12) = 2,3 + f(3)$

$f(-x)=-f(x)$

$f(-1)=-f(1)$

$f(-3)=-f(3)$

Ответ: $g(6)+g(8)+g(10)+g(12)=9,2$

Пример(Межрегиональная заочная математическая олимпиада 2008): представьте произвольную функцию f(x), определенную на всей действительной оси, в виде суммы четной и нечетной функций.

Решение: y=f(x), D(y)=R

f(x)=g(x)+h(x), где g(x)- четная функция,

h(x)- нечетная функция

f(-x)= g(-x)+h(-x),

f(-x)= g(x)-h(x), составим систему уравнений

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

Получим,

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

Пример(ЕГЭ 2008): нечетная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x)=x(2x+1)(2x-1)$. Найдите значение функции

$h(x) = \dfrac{f(x) + 2g(x)}{f(x) + g(x)}$, при $x=-3$

Решение: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ x \geq 0 \end{cases}$

$f(3)=g(3)$

$$h(-3) = \frac{f(-3) + 2g(-3)}{f(-3) + g(-3)}$$

$g(-3)=-105$, $g(3)=105$

$h(-3)=1,5$

Ответ: 1,5