

Применение симметрии при решении алгебраических задач

Учениц 10И класса:
Коротковой Анастасии
Журавлёвой Дарьи
Руководитель:
учитель высшей
категории
Тимофеева М. Н.

2008 год

Цель работы: глубже изучить понятие «симметрия» и ее практическое применение.

Задачи:

- изучить виды симметрии, преобразования;
- изучить понятие «функция», способы задания функции, свойства функции;
- изучить методы решения уравнений высших степеней;
- показать практическое применение данных вопросов.

Существуют **преобразования**, которые сохраняют расстояния между точками (**движение**) и преобразования, которые изменяют расстояния между точками в некоторое число раз (**гомотетия – подобие**).

Симметрия – движение, преобразование плоскости или пространства, при котором сохраняется расстояние между точками.

Функцией называют такую зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению переменной x из множества X соответствует единственное значение переменной y из множества Y .

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Чётность функции.

Функция $y=f(x)$ может быть чётной или нечётной, если её область определения симметрична относительно 0;

Чётная функция: $f(x)=f(-x)$ для любых x из $D(y)$;

Нечётная функция: $-f(x)=f(-x)$ для любых x из $D(y)$;

Если не выполняется ни одно из соотношений, то функцию называют **ни чётной, ни нечётной**.

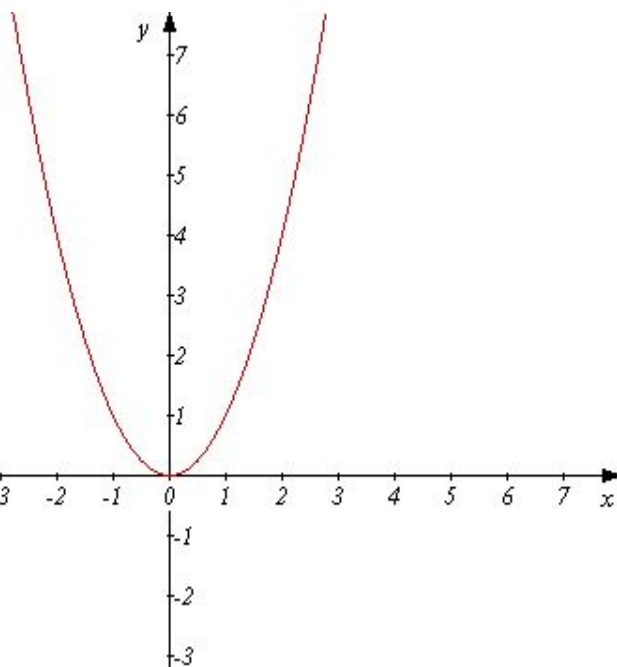
Монотонность функции.

Функция $y=f(x)$ **монотонно возрастает** на промежутке I , если для любых x_1 и x_2 из I таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$;

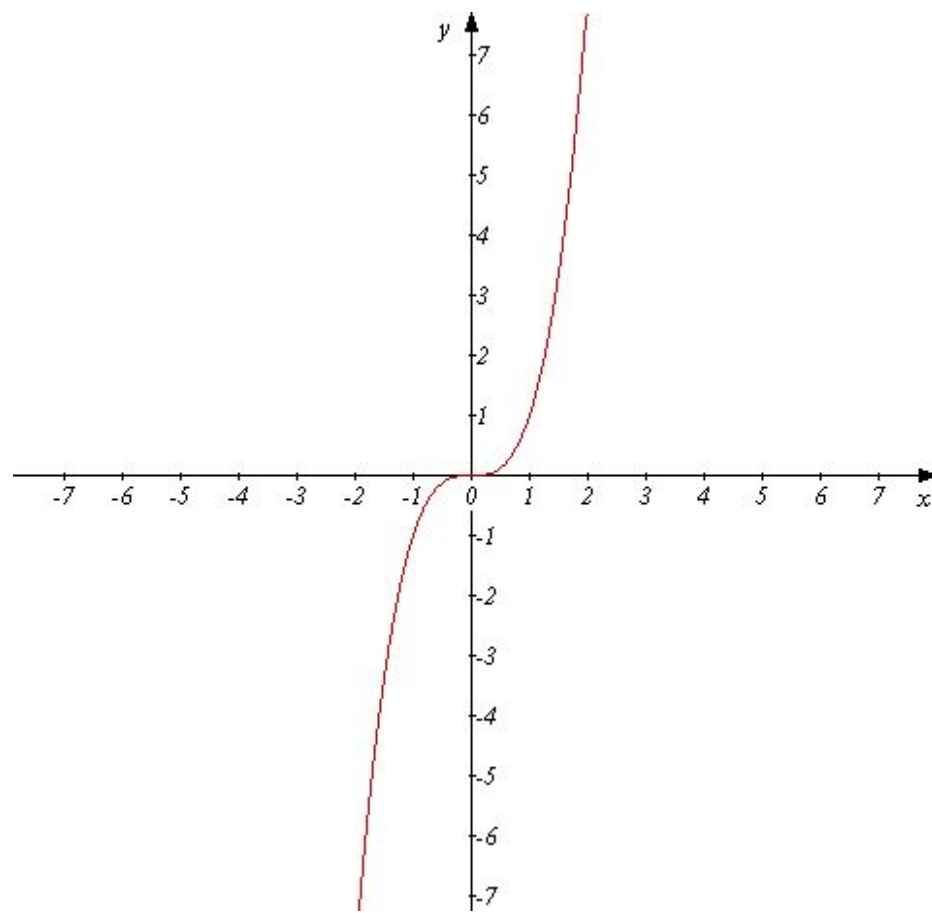
Функция $y=f(x)$ **монотонно убывает** на промежутке I , если для любых x_1 и x_2 из I таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Графики функций

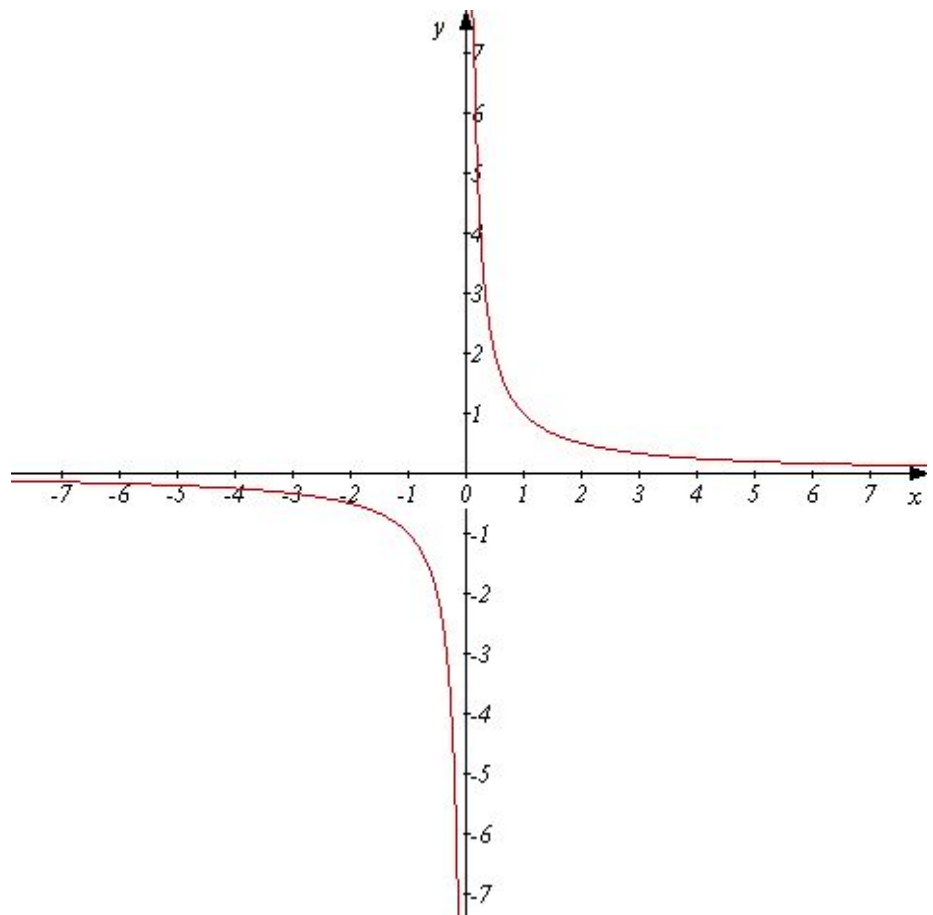
$$y=x^2$$



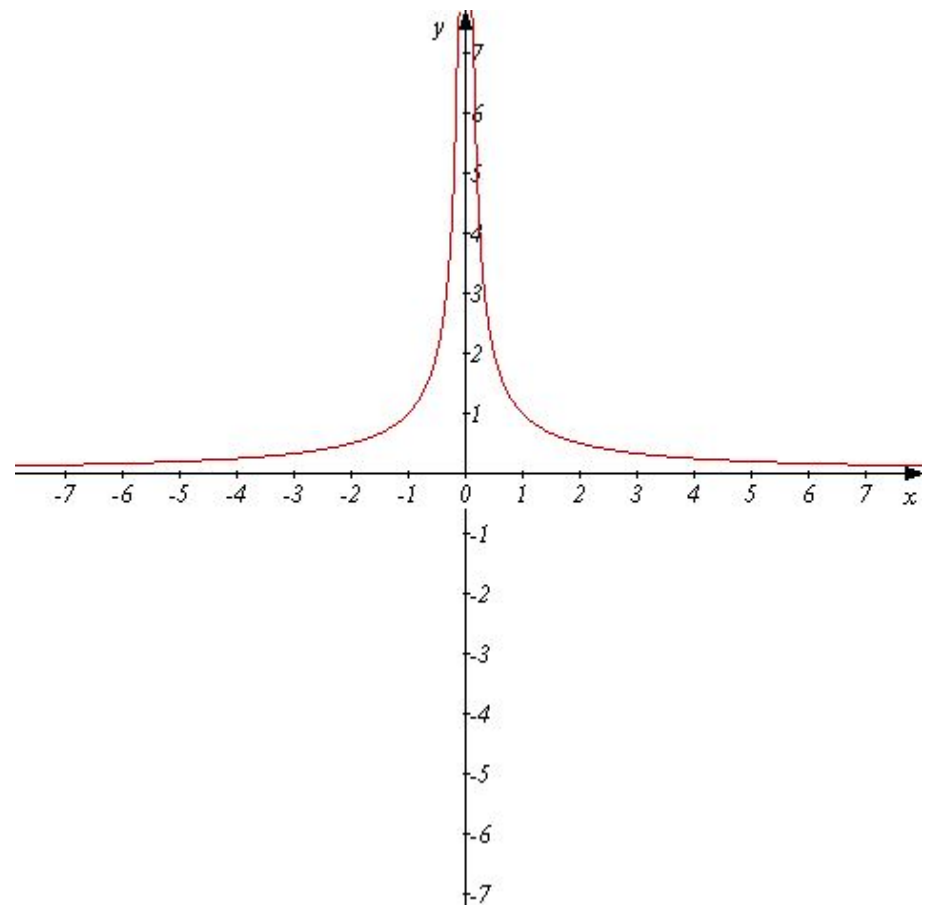
$$y=x^3$$



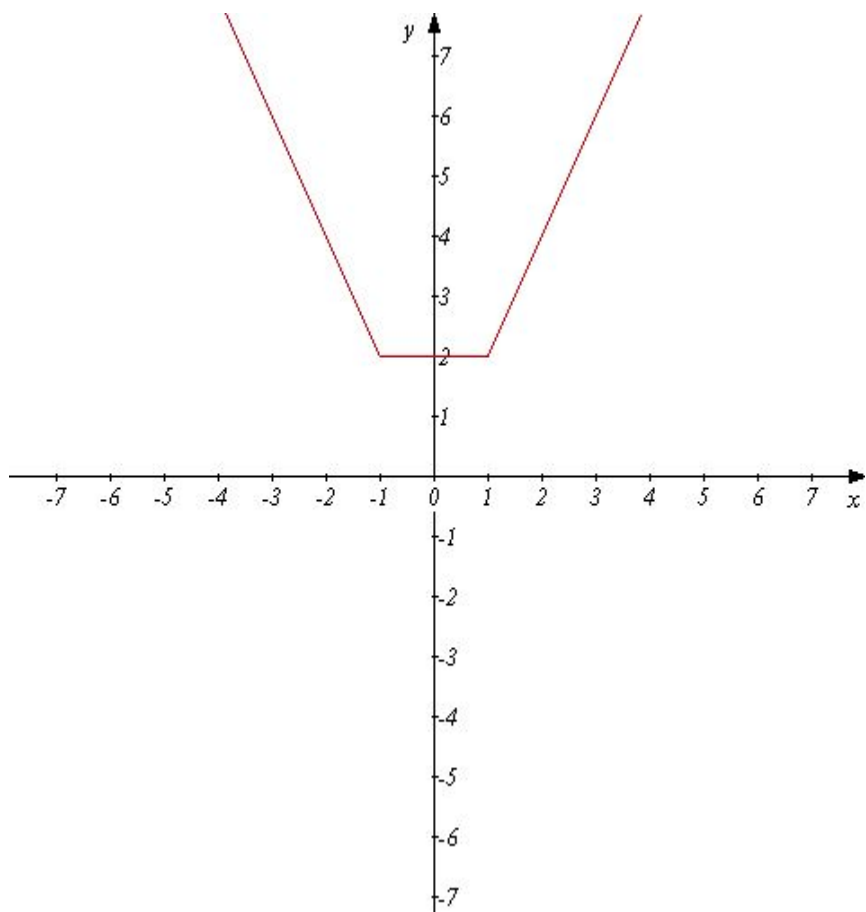
$$y = \frac{1}{x}$$



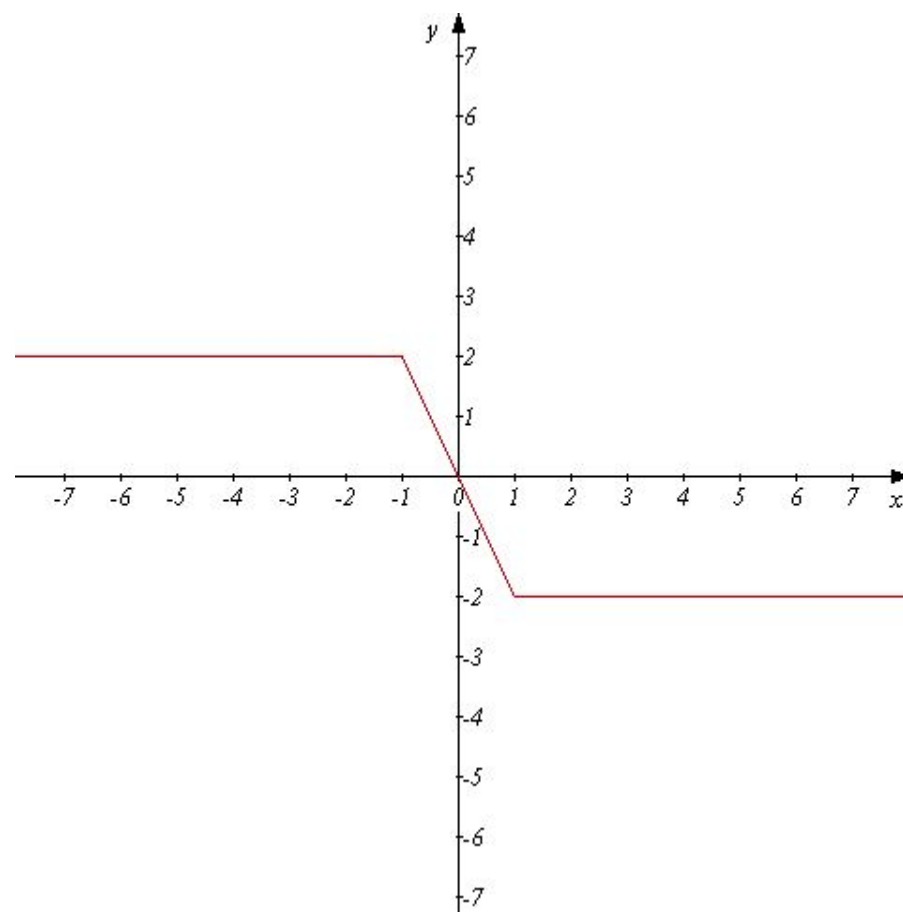
$$y = \frac{1}{|x|}$$



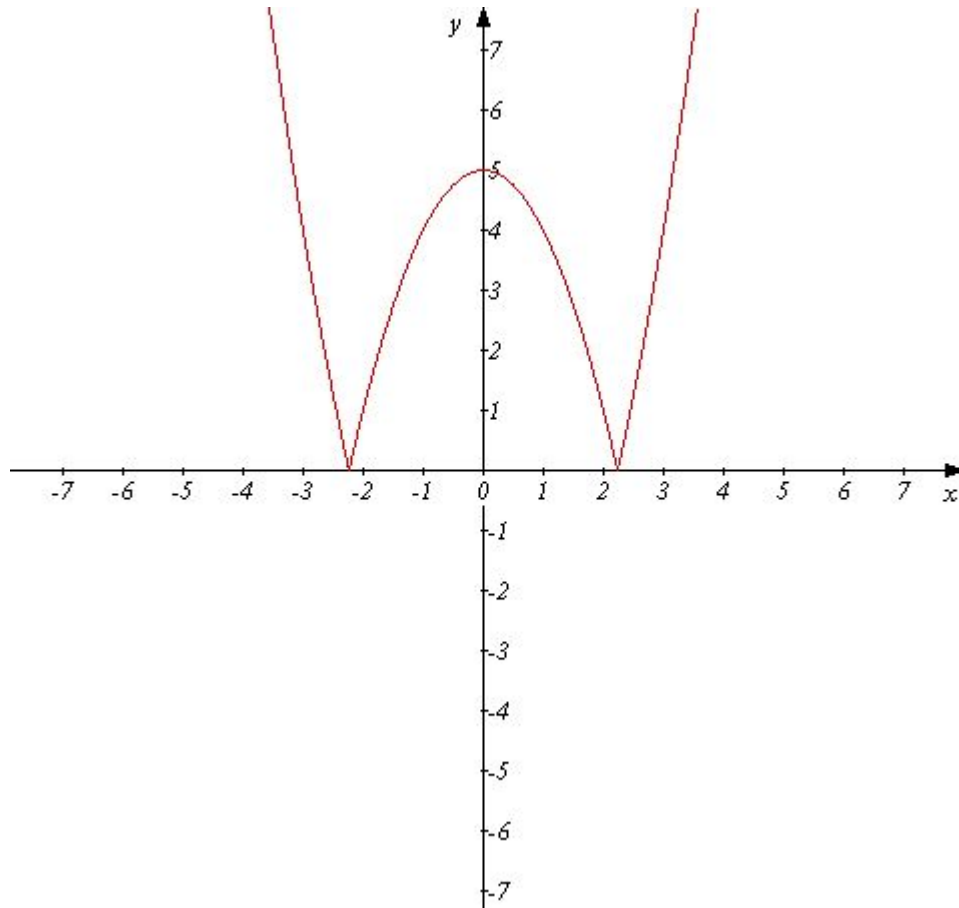
$$y = |1-x| + |1+x|$$



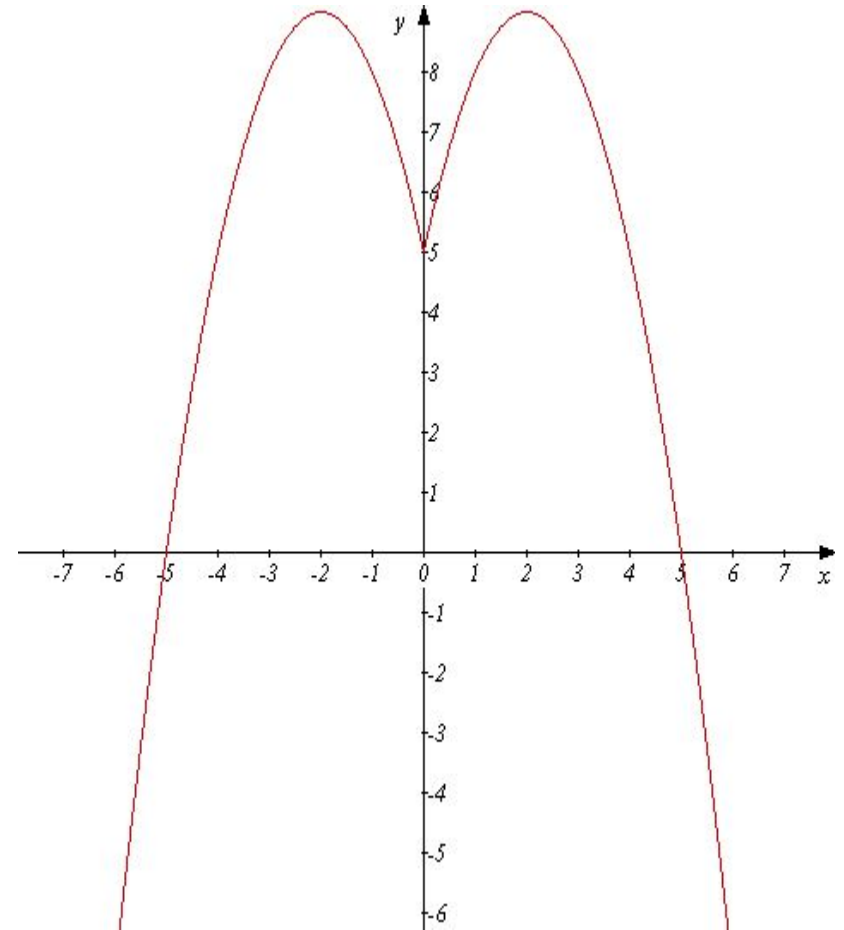
$$y = |1-x| - |1+x|$$



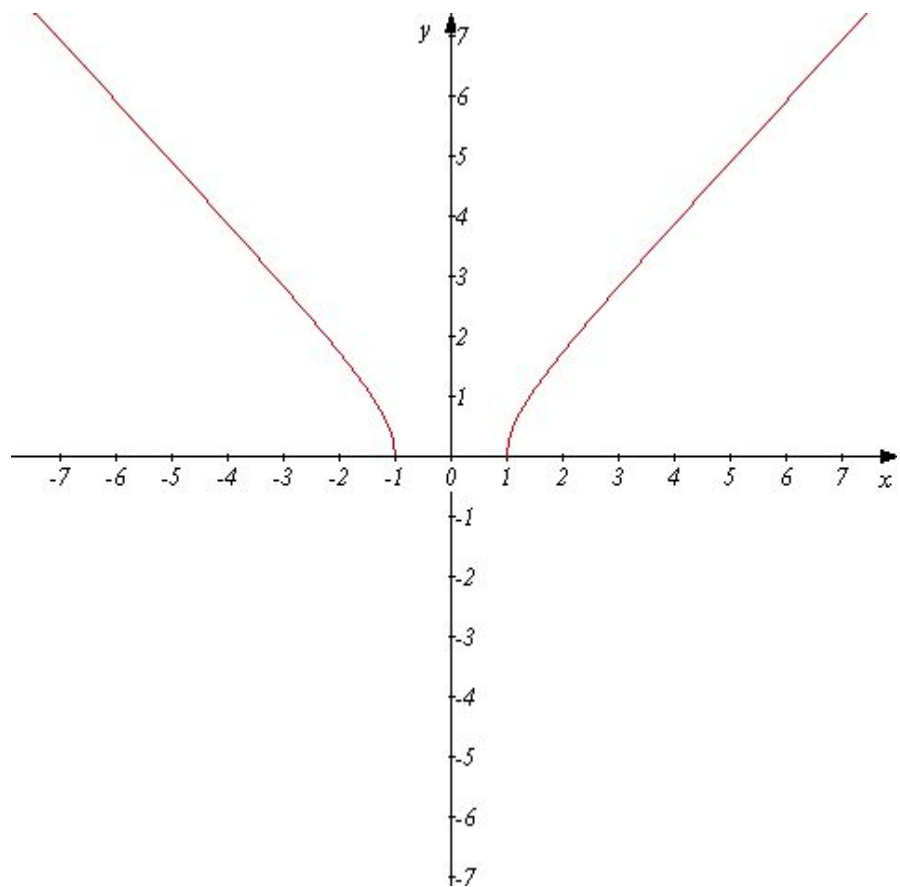
$$y = |x^2 - 5|$$



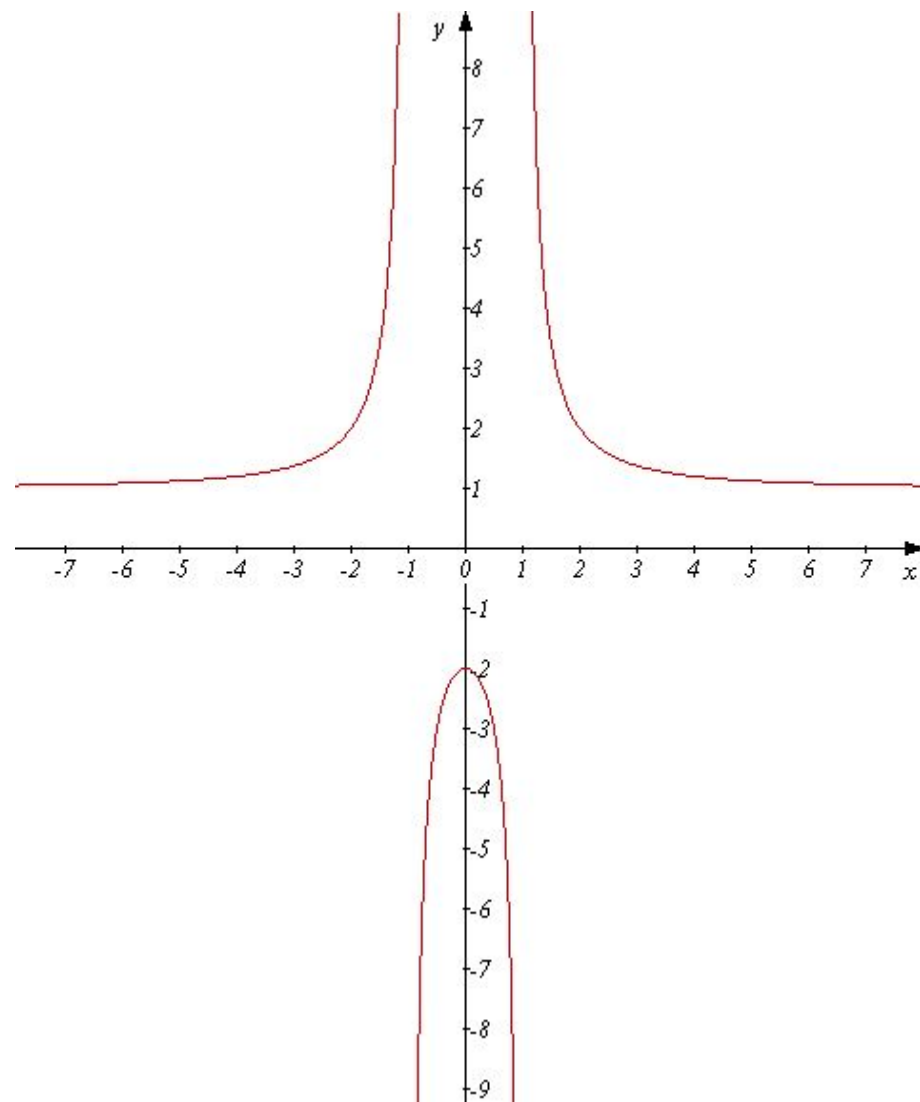
$$y = (5 - |x|)(|x| + 1)$$



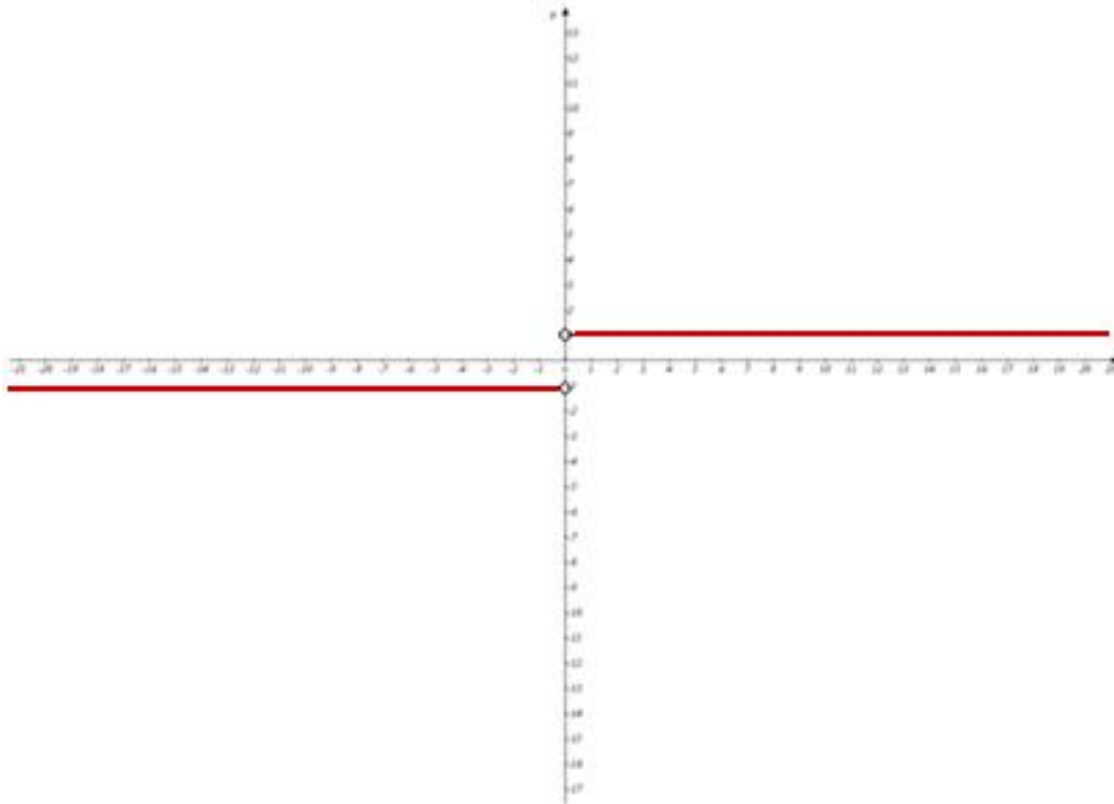
$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$



$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$$



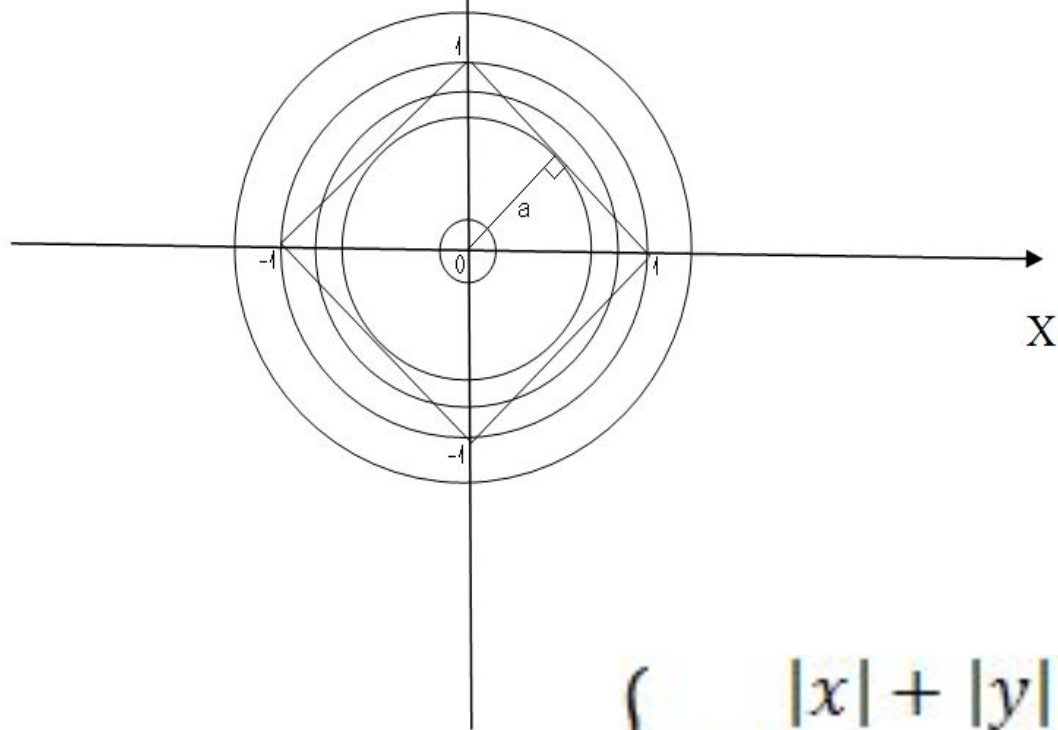
$$y = \operatorname{sgn} x$$



Решение систем нелинейных уравнений с параметром графически

Пример: дана система уравнений

Найти количество решений в зависимости от параметра a



$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0). \end{cases}$$

Ответ:

$0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $a > 1$, то нет решений;

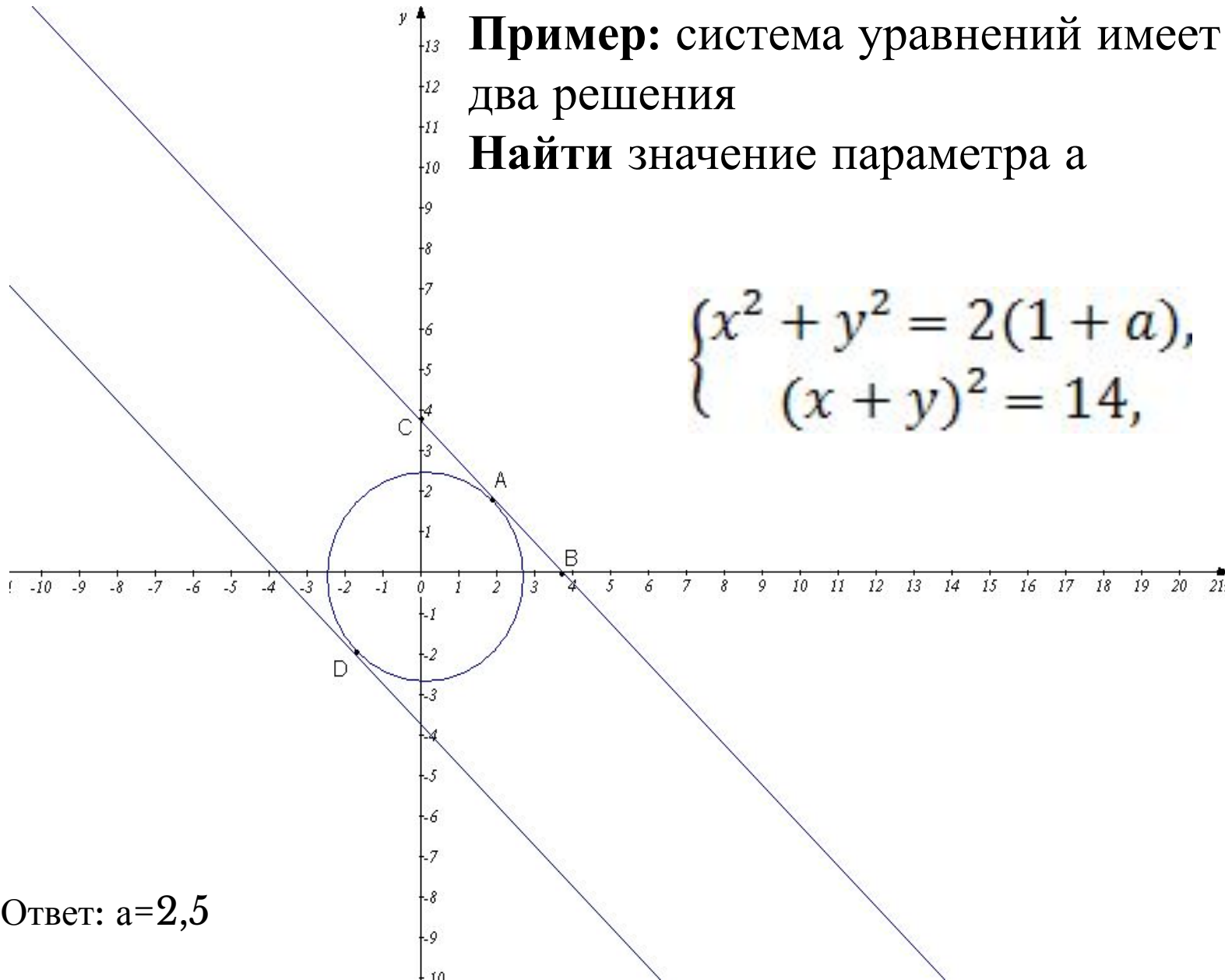
если $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $a = 1$, то решений 4;

если $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, то решений восемь.

Пример: система уравнений имеет
два решения

Найти значение параметра a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14, \end{cases}$$



Ответ: $a=2,5$

Решение некоторых уравнений аналитическими методами, основанных на симметрии

Уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$

Где a_0, \dots, a_n - некоторые числа $a_0 \neq 0$,

x - переменная, называется уравнением n - степени от
одной переменной x .

Симметрическое(возвратное) уравнение четвёртой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$$

где $a \neq 0$

Решение симметрических уравнений высших степеней

$$2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$$

$x=0$ не является корнем уравнения, значит разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$

$$2x^2 + x - 11 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 11 = 0$$

Пусть $y = x + \frac{1}{x}$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

получим $2(y^2 - 2) + y - 11 = 0$

$$\begin{cases} y = 2,5 \\ y = -3 \end{cases}$$

Возвращаясь к уравнению замены, получим

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 0,5 \end{cases}$$

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = A$$

Где $a < b < c < d$, $b-a=d-c$

$$y = \frac{(x-a) + (x-b) + (x-c) + (x-d)}{4} = x - \frac{a+b+c+d}{4}$$

Решить уравнение $(1-12x)(1-6x)(1-4x)(1-3x)=5$

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$$

$$y = \frac{1}{4} \left(\left(x - \frac{1}{12} \right) + \left(x - \frac{1}{6} \right) + \left(x - \frac{1}{4} \right) + \left(x - \frac{1}{3} \right) \right) = x - \frac{5}{24}$$

$$x = y + \frac{5}{24}$$

$$\left[y^2 - \left(\frac{1}{24} \right)^2 \right] \cdot \left[y^2 - \left(\frac{3}{24} \right)^2 \right] = \frac{5}{3 \times 4 \times 6 \times 12} \quad \begin{cases} y = \frac{7}{24}, \\ y = -\frac{7}{24}. \end{cases}$$

Соответствующие корни исходного уравнения равны $-\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{2}$

и

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = Ax^2, \text{ где } ab = cd$$

$$y = x + \frac{ab}{x}$$

Решить уравнение $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$

$$(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2$$

$$\left(x + 14 + \frac{24}{x}\right)\left(x + 11 + \frac{24}{x}\right) = 4$$

$$x + \frac{24}{x} = y$$

$$(y + 14)(y + 11) = 4$$

$$\begin{cases} y = -10 \\ y = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-15 - \sqrt{129}}{2} \\ x = \frac{-15 + \sqrt{129}}{2} \\ x = -6 \\ x = -4 \end{cases}$$

Уравнение вида $(x - a)^n + (x - b)^n = A$, где $n > 2, n \in \mathbb{N}$

можно решить, используя **метод симметризации**, т.е. делая замену

$$y = x - \frac{a+b}{2}$$

Решить $(x - 2)^6 + (x - 4)^6 = 64$

$$y = \frac{x - 2 + x - 4}{2} = x - 3$$

$$x = y + 3$$

$$(y + 1)^6 + (y - 1)^6 = 64$$

$y^6 + 15y^4 + 15y^2 - 31 = 0$, тогда, пусть $y^2 = t$, получим

$$t^3 + 15t^2 + 15t - 31 = 0$$

$$t^3 + 15t^2 + 15t - 31 = (t - 1)(t^2 + 16t + 31)$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Уравнения с параметром

Пример: может ли уравнение $2x^6 - x^4 - ax^2 = 1$ иметь три корня (№6.221, математика-11).

$$y = 2x^6 - x^4 - ax^2 - 1$$

$$D(y) = \mathbb{R}$$

$$y(-x) = 2x^6 - x^4 - ax^2 - 1 = y(x)$$

$x=0$ не является корнем уравнения

Ответ: данное уравнение не может иметь три корня.

Использование свойств четности при решении уравнений

Пример (ЕГЭ 2008): дана функция $g(x)=2,3+f(x-9)$ и нечетная функция $f(x)$, найти значение выражения $g(6)+g(8)+g(10)+g(12)$.

Решение:

$$g(6) = 2,3 + f(-3)$$

$$g(8) = 2,3 + f(-1)$$

$$g(10) = 2,3 + f(1)$$

$$g(12) = 2,3 + f(3)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$f(-1) = -f(1)$$

$$f(-3) = -f(3)$$

Ответ: $g(6)+g(8)+g(10)+g(12)=9,2$

Пример(Межрегиональная заочная математическая олимпиада 2008): представьте произвольную функцию $f(x)$, определенную на всей действительной оси, в виде суммы четной и нечетной функций.

Решение: $y=f(x)$, $D(y)=\mathbb{R}$

$f(x)=g(x)+h(x)$, где $g(x)$ - четная функция,
 $h(x)$ - нечетная функция

$$f(-x) = g(-x) + h(-x),$$

$f(-x) = g(x) - h(x)$, составим систему уравнений

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

Получим,

$$\begin{cases} g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

Пример(ЕГЭ 2008): нечетная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x)=x(2x+1)(2x-1)$. Найдите значение функции

$$h(x) = \frac{f(x) + 2g(x)}{f(x) + g(x)}, \text{ при } x = -3$$

Решение:
$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(3) = g(3)$$

$$h(-3) = \frac{f(-3) + 2g(-3)}{f(-3) + g(-3)}$$

$$g(-3) = -105, g(3) = 105$$

$$h(-3) = 1,5$$

Ответ: 1,5