Применения производной к исследованию функций

Оглавление

- **Схема исследования функций;**
- **Признак возрастания (убывания) функции:**
  - Достаточный признак возрастания функции;
  - Достаточный признак убывания функции;
- **Критические точки функции:**
  - Необходимое условие экстремума;
  - Признак максимума функции;
  - Признак минимума функции.

Схема исследования функций

- Найти области определения и значений данной функции f.
- Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование.
- Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат.
- Найти промежутки знакопостоянства функции f.
- Выяснить, на каких промежутках функция f возрастает, а на каких убывает.
- Найти точки и вид экстремума и вычислить значения f в этих точках.
- Исследовать поведение функции f в окрестности характерных точек, не входящих в область определения.

Признак возрастания (убывания) функции

Достаточный признак возрастания функции. **Если f´ (x) > 0 в каждой точке интервала I, то функция возрастает на I.**

Достаточный признак убывания функции. **Если f´ (x) < 0 в каждой точке интервала I, то функция убывает на I.**

Доказательство признака возрастания (убывания) функции

Доказательство проводится на основании формулы Лагранжа:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Пример нахождения промежутков возрастания (убывания) функции

Дано:

$f(x) = -2x + \sin x$

Найти:

промежутки возрастания (убывания) функции

Решение

Функция определена на всей числовой прямой.

Найдем $f'(x)$. $f'(x) = -2 + \cos x$.

$|\cos x| \le 1 \Rightarrow f'(x) < 0$ для всех действительных x.

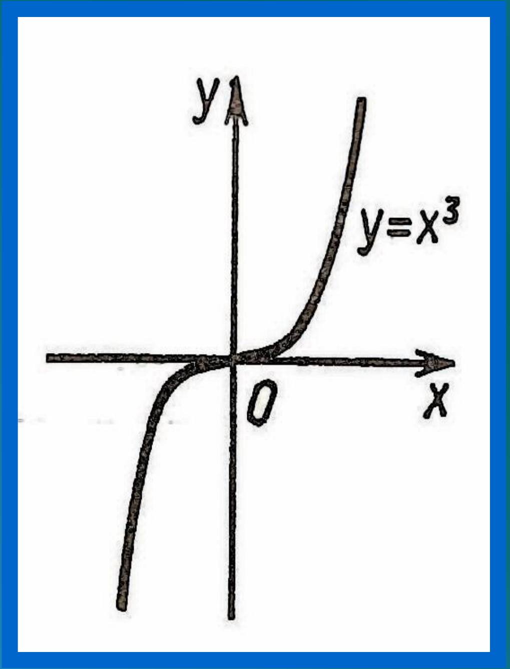
Вывод: $f(x) = -2x + \sin x$ убывает на всей числовой прямой

Критические точки функции, максимумы и минимумы

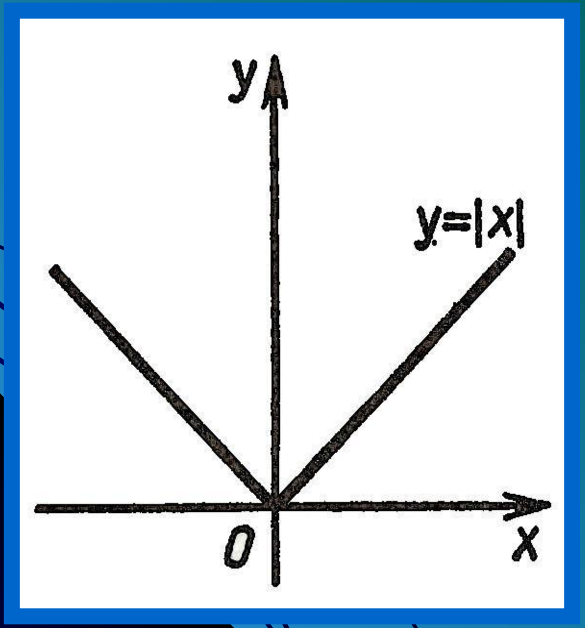
Необходимое условие экстремума (теорема Ферма)

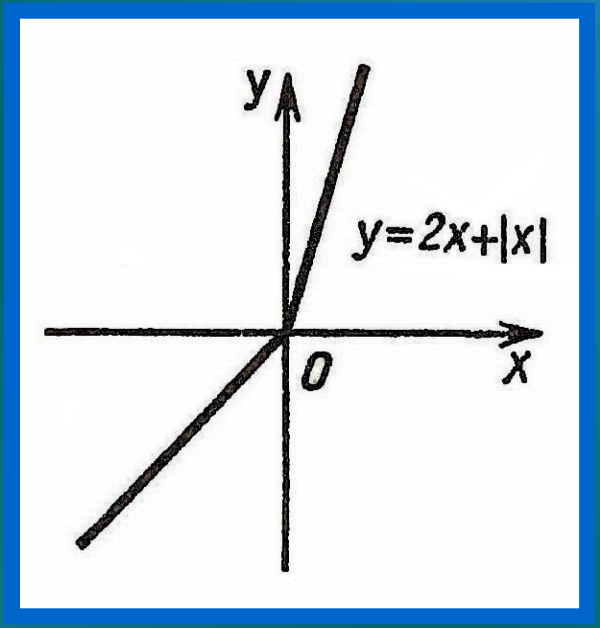
Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f´, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$

Теорема Ферма есть лишь необходимое условие экстремума. Из того, что производная в точке x_0 обращается в нуль, необязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум.



Примеры критических точек, в которых производная не существует





Признак максимума функции

Если функция f непрерывна в точке x_0, а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.

Упрощённая формулировка признака:

Если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

Признак минимума функции

Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f.

Упрощённая формулировка признака:

Если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка максимума.

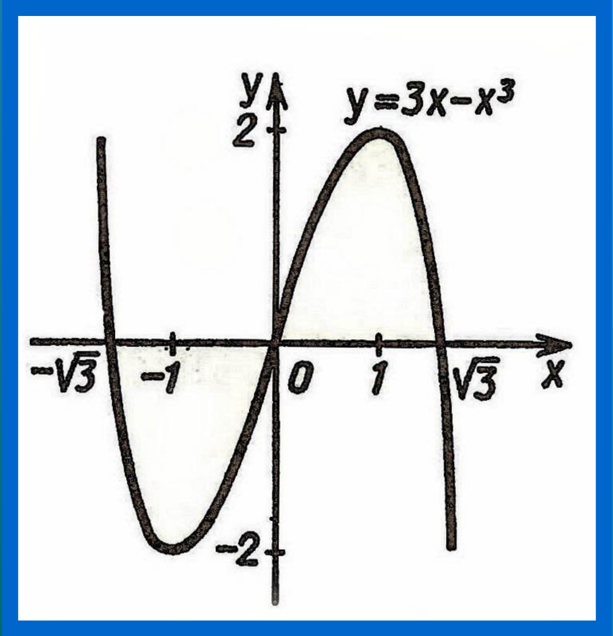
Пример нахождения точек экстремума функции

Дано:

$f(x) = 3x - x^3$

Найти:

Точки экстремума функции



Решение

Найдём производную функции: $f'(x) = 3 - 3x^2$

$f'(x) = 0$, *при* $x = 1$ *и* $x = -1$

$f'(x) < 0$ *при* $x < -1$; $f'(x) > 0$ *при* $-1 < x < 1$, *т.е. в точках -1 и 1 функция меняет знак.*

По признакам максимума и минимума точка -1 является точкой минимума, а точка 1 — точкой максимума.

Проект выполняла Сергеева Вероника, ученица 11 класса, с использованием следующих материалов:

- Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов средней школы.