Пример решения транспортной задачи (открытая модель)

Исследование операций

Задача

Выпуск продукции трех заводов A1, A2, A3 составляет 260, 240, 300 т. Потребности четырех потребителей B1, B2, B3, B4 равны 300, 200, 250, 100 т.

Известно:

1) продукция завода A1 не требуется пункту B4;

2) с завода A3 потребителю B2 должно быть доставлено груза не более 50 т.

Тарифы перевозок c_{ij} (в ден/ед.) из Ai в Bj приведены в матрице:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Составить оптимальный план перевозок груза.

Решение:

Так как $a1+a2+a3 = 260+240+300 = 800$,

$b1+b2+b3+b4 = 300+200+250+100 = 850$,

т.е. $(b1+b2+b3+b4)-(a1+a2+a3) = 50$, то введем фиктивного поставщика A4 с запасами $a4=50$ и нулевыми тарифами.

Получили **закрытую** модель транспортной задачи.

Учтем условия:

1) В клетку A1B4 запишем число M (блокируем).

2) В столбце B2 запишем потребности $b2=50$, остальные $b2^*=150$ заносим в дополнительный столбец $B2^*$.

Все тарифы, как в B2, но в $A3B2^*$ ставим число M.

Решение задачи методом наименьшей стоимости

	B1	B2	B3	B4	B2*	a_i
A1	3 **110** 4 шаг	4 **X**	6 **X**	1 M	4 **150** 2 шаг	260
A2	5 **X**	7 **X**	2 **240** 3 шаг	3 **X**	7 **X**	240
A3	4 **190** 5 шаг	3 **50** 1 шаг	8 **X**	6 **60** 6 шаг	3 M	300
A4	0 **X**	0 **X**	0 **10** 7 шаг	0 **40** 8 шаг	0 **X**	50
b_j	300	50	250	100	150	850

Опорное решение задачи

$$X_1 = \begin{pmatrix} 110 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 0 \\ 190 & 50 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

Проверим опорный план X1 на оптимальность

Составим систему уравнений для заполненных ячеек:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 110 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 0 \\ 190 & 50 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_1 + v_1 = 3$ Пусть $u_1 = 0$, тогда: $v_1 = 3$

$u_1 + v_2^* = 4$ $v_2^* = 4$

$u_2 + v_3 = 2$ Так как $v_3 = 5$, то $u_2 = -3$

$u_3 + v_1 = 4$ Так как $v_1 = 3$, то $u_3 = 1$

$u_3 + v_2 = 3$ Так как $u_3 = 1$, то $v_2 = 2$

$u_3 + v_4 = 6$ Так как $u_3 = 1$, то $v_4 = 5$

$u_4 + v_3 = 0$ Так как $u_4 = -5$, то $v_3 = 5$

$u_4 + v_4 = 0$ Так как $v_4 = 5$, то $u_4 = -5$

Итак, $u_1 = 0$, $u_2 = -3$, $u_3 = 1$, $u_4 = -5$,

$v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $v_2^* = 4$, $v_3 = 5$, $v_4 = 5$

Проверим второе условие теоремы для незаполненных строк

$$X_1 = \begin{pmatrix} 110 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 0 \\ 190 & 50 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_1 = 0,\ u_2 = -3,\ u_3 = 1,\ u_4 = -5,$

$v_1 = 3,\ v_2 = 2,\ v_2^* = 4,\ v_3 = 5,\ v_4 = 5$

$u_1 + v_2^* = 4 \le C_{12} = 4 \quad +$

$u_1 + v_3 = 5 \le C_{13} = 6 \quad +$

$u_1 + v_4 = 5 > C_{14} = 1 \quad (-4)$

$u_2 + v_1 = 0 \le C_{21} = 5 \quad +$

$u_2 + v_2 = -1 \le C_{22} = 7 \quad +$

$u_2 + v_4 = 2 \le C_{24} = 3 \quad +$

$u_3 + v_3 = 6 \le C_{33} = 8 \quad +$

$u_4 + v_1 = -2 \le C_{41} = 0 \quad +$

$u_4 + v_2 = -3 \le C_{42} = 0 \quad +$

Но ячейка A1B4 заблокирована, следовательно, план X1 оптимальный

Оптимальное решение:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 110 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 0 \\ 190 & 50 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zmin = 110*3+150*4+240*2+190*4+50*3+60*6+
+10*0+40*0 = 2680

Используемая литература:

- Борзунова Т.Л., Барыкин М.П. , Данилов Е.А. Соловьева О.Ю. - Математическое моделирование: учебное пособие/ВолгГТУ, - Волгоград, 2008.
- Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике – СПб: Питер, 2000.