



Иррациональные уравнения

Урок алгебры и начал анализа

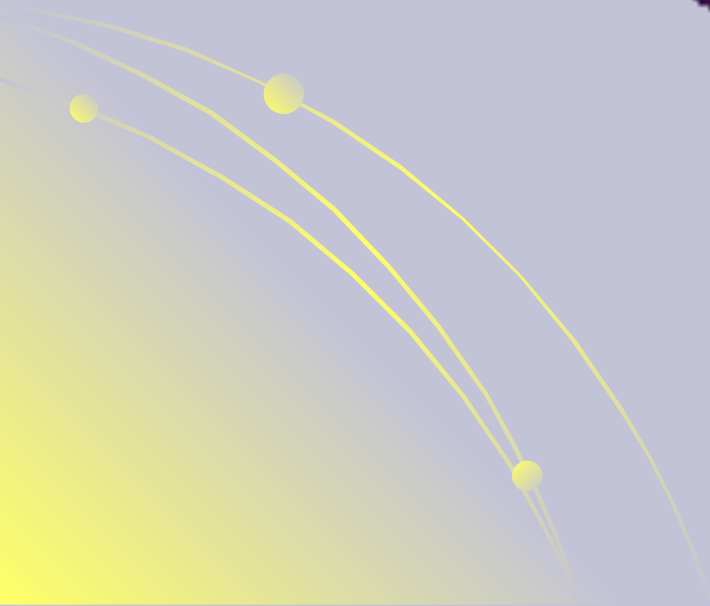
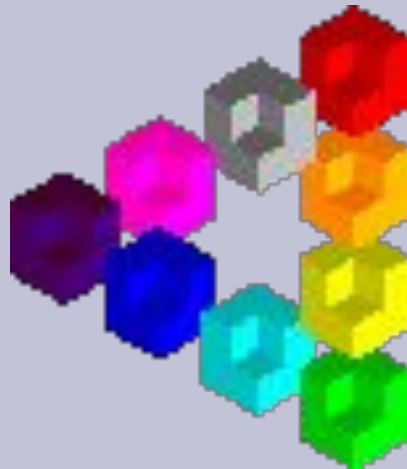
11 класс

Учитель: Вязовченко Н.К.

Цели урока

- Ввести понятие иррациональных уравнений и показать способы их решений.
- Развивать умение выделять главное, существенное в изучаемом материале, обобщать факты и понятия, развивать самостоятельность, мышление, познавательный интерес.
- Содействовать формированию мировоззренческих понятий.

Устная работа



Устная работа

- Упростить выражение:

$$\sqrt{x^2};$$

$$(\sqrt{x})^2;$$

$$\sqrt[3]{x^3};$$

$$\sqrt[5]{x^{10}};$$

$$\sqrt{x^8};$$

$$\sqrt[3]{-x^3};$$

$$\sqrt[4]{(-x)^4};$$

$$\sqrt[5]{x^{10}};$$

$$\sqrt[3]{x^9}.$$

Устная работа

Решите уравнения:

а) $x^4 - 8 = 0;$

б) $x^3 + 4 = 0;$

в) $x^5 - 1 = 0;$

г) $x^8 + 1 = 0;$

д) $x^{10} + 11 = 0.$

НАЙДИ ОШИБКИ"

Решение уравнений

1) $x^2 = 4$ 2) $x^2 = 36$ 3) $x^2 = -8$ 4) $x^3 = -27$
 $x = \pm 2$ $x = \pm 6$ *нет корней* $x = \pm 27$

Применение формул сокращенного умножения

1) $(x + 2)^2 = x^2 - 4x + 4;$

2) $(3x + 2)^2 = 3x^2 + 12x + 4;$

3) $(2y - 4)^2 = 4y - 16y.$

Тема урока

Иррациональные уравнения

Определение

- **Иррациональными называются уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в дробную степень.**



Устно:

Какие из следующих уравнений являются иррациональными?

а) $x + \sqrt{x} = 2$

б) $x + \sqrt{x} = 0$

в) $x\sqrt{7} = 11+x$

г) $y^2 - 3\sqrt{2} = 4$

д) $y + \sqrt{y^2+9} = 2$

е) $\sqrt{x-1} = 3$

Посторонние корни

- Основными причинами появления посторонних корней является возведение обеих частей уравнения в одну и ту же **чётную** степень, расширение области определения и др.
- По этим причинам необходимой частью решения иррационального уравнения является **проверка**, либо использование **области определения** заданного уравнения.

Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень

1. Преобразовать обе части уравнения к виду

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$$

2. Возвести обе части в n -ую степень

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = \left(\sqrt[n]{g(x)}\right)^n$$

3. Учитывая, что $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ получаем:

$$f(x) = g(x)$$

4. Решить полученное уравнение и выполнить проверку (или ОДЗ)

Примеры

$$\begin{aligned}\sqrt{3-x} &= 2 \\ (\sqrt{3-x})^2 &= 2^2 \\ 3-x &= 4 \\ -x &= 1 \quad | :(-1) \\ x &= -1 \\ \text{Ответ: } x &= -1\end{aligned}$$

$$\sqrt{-3x+3} - x = -1$$

уединим корень

$$(\sqrt{-3x+3})^2 = (x-1)^2$$

$$-3x+3 = x^2 - 2x + 1$$

$$-x^2 - x + 2 = 0 \quad | :(-1)$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2.$$

Проверка: при $x = 1$

$$\sqrt{-3 \cdot 1 + 3} = 1 - 1$$

$0 = 0$ - верное равенство,

$x = 1$ является корнем;

при $x = -2$

$$\sqrt{-3 \cdot (-2) + 3} = -2 - 1$$

$3 = -3$ - неверное равенство,

$x = -2$ не является корнем.

Ответ: $x = 1$

Если квадратных корней в иррациональном уравнении много, то приходится возводить в квадрат несколько раз:

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} - 4 = 0$$

уединим корень

$$\sqrt{2x-3} = 4 - \sqrt{4x+1}$$

$$(\sqrt{2x-3})^2 = (4 - \sqrt{4x+1})^2$$

$$2x - 3 = 16 - 8\sqrt{4x+1} + 4x + 1$$

$$2x - 3 - 16 - 4x - 1 = -8\sqrt{4x+1}$$

$$-2x - 20 = -8\sqrt{4x+1} \quad | :(-2)$$

$$x + 10 = 4\sqrt{4x+1}$$

$$(x + 10)^2 = (4\sqrt{4x+1})^2$$

$$x^2 + 20x + 100 = 16(4x + 1)$$

$$x^2 + 20x + 100 = 64x + 16$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0, \text{ по т. Виета}$$

$$x_1 + x_2 = 44, \quad x_1 \cdot x_2 = 84,$$

$$x_1 = 42, \quad x_2 = 2.$$

Проверка: при $x = 42$

$$\sqrt{2 \cdot 42 - 3} + \sqrt{4 \cdot 42 + 1} - 4 = 0$$

$$\sqrt{81} + \sqrt{169} - 4 = 0 - \text{неверное равн} - \text{во,}$$

$x = 42$ не является корнем;

при $x = 2$

$$\sqrt{2 \cdot 2 - 3} + \sqrt{4 \cdot 2 + 1} - 4 = 0$$

$$\sqrt{1} + \sqrt{9} - 4 = 0 - \text{верное равенство,}$$

$x = 2$ является корнем.

Ответ: $x = 2$.

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} - 4 = 0$$

уединим корень

$$\sqrt{2x-3} = 4 - \sqrt{4x+1}$$

$$(\sqrt{2x-3})^2 = (4 - \sqrt{4x+1})^2$$

$$2x - 3 = 16 - 8\sqrt{4x+1} + 4x + 1$$

$$2x - 3 - 16 - 4x - 1 = -8\sqrt{4x+1}$$

$$-2x - 20 = -8\sqrt{4x+1} \quad | :(-2)$$

$$x + 10 = 4\sqrt{4x+1}$$

$$(x + 10)^2 = (4\sqrt{4x+1})^2$$

$$x^2 + 20x + 100 = 16(4x + 1)$$

$$x^2 + 20x + 100 = 64x + 16$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0, \text{ по т. Виета}$$

$$x_1 + x_2 = 44, \quad x_1 \cdot x_2 = 84,$$

$$x_1 = 42, \quad x_2 = 2.$$

Проверка : при $x = 42$

$$\sqrt{2 \cdot 42 - 3} + \sqrt{4 \cdot 42 + 1} - 4 = 0$$

$\sqrt{81} + \sqrt{169} - 4 = 0$ – неверное рав – во,
 $x = 42$ не является корнем;

при $x = 2$

$$\sqrt{2 \cdot 2 - 3} + \sqrt{4 \cdot 2 + 1} - 4 = 0$$

$\sqrt{1} + \sqrt{9} - 4 = 0$ – верное равенство,

$x = 2$ является корнем.

Ответ : $x = 2$.

Проверка

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} - 4 = 0$$

уединим корень

$$\sqrt{2x-3} = 4 - \sqrt{4x+1}$$

$$(\sqrt{2x-3})^2 = (4 - \sqrt{4x+1})^2$$

$$2x - 3 = 16 - 8\sqrt{4x+1} + 4x + 1$$

$$2x - 3 - 16 - 4x - 1 = -8\sqrt{4x+1}$$

$$-2x - 20 = -8\sqrt{4x+1} \quad | :(-2)$$

$$x + 10 = 4\sqrt{4x+1}$$

$$(x + 10)^2 = (4\sqrt{4x+1})^2$$

$$x^2 + 20x + 100 = 16(4x + 1)$$

$$x^2 + 20x + 100 = 64x + 16$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0, \text{ по т. Виета}$$

$$x_1 + x_2 = 44, \quad x_1 \cdot x_2 = 84,$$

$$x_1 = 42, \quad x_2 = 2.$$

Проверка: при $x = 42$

$$\sqrt{2 \cdot 42 - 3} + \sqrt{4 \cdot 42 + 1} - 4 = 0$$

$$\sqrt{81} + \sqrt{169} - 4 = 0 - \text{неверное равн} - \text{во,}$$

$x = 42$ не является корнем,

при $x = 2$

$$\sqrt{2 \cdot 2 - 3} + \sqrt{4 \cdot 2 + 1} - 4 = 0$$

$$\sqrt{1} + \sqrt{9} - 4 = 0 - \text{верное равенство,}$$

$x = 2$ является корнем.

Ответ: $x = 2$.

Метод замены переменной

1. Ввести новую переменную
2. Решить уравнение,
отбросить посторонние
корни
3. Вернуться к
первоначальному
неизвестному

- Введение вспомогательной переменной в ряде случаев приводит к упрощению уравнения.
- Чаще всего в качестве новой переменной используют входящий в уравнение радикал.
- При этом уравнение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример

$$2x^2 + 3x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 33, x \in \mathbb{R}.$$

Пусть $y = \sqrt{2x^2 + 3x + 9}, y \geq 0,$

тогда исходное уравнение примет вид:

$$y^2 + y - 42 = 0$$

$$y_1 = -7, y_2 = 6$$

Решая уравнение

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6$$

получим:

$$x = 3$$

$$x = -4,5.$$

Ответ: $x = 3$; $x = -4,5$

- В некоторых случаях можно сделать вывод о решении иррационального уравнения, не прибегая к преобразованиям.
- Например, уравнения

$$\sqrt{5x - 2} = -1$$

$$\sqrt[4]{x - 5} = 3 - x$$

не имеют решения.

Метод пристального взгляда

Этот метод основан на следующем теоретическом положении: “Если функция $y = f(x)$ возрастает в области определения и число a входит в множество значений, то уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение.”

Для реализации метода, основанного на этом утверждении требуется:

- Выделить функцию, которая фигурирует в уравнении.
- Записать область определения данной функции.
- Доказать ее монотонность в области определения.
- Угадать корень уравнения.
- Обосновать, что других корней нет.
- Записать ответ.

Пример 1

$$\sqrt{x-10} + \sqrt{3-x} = 2$$

Наличие радикалов четной степени говорит о том, что подкоренные выражения должны быть неотрицательными.

Поэтому сначала найдем область допустимых значений переменной x

$$\begin{cases} x-10 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 10 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Очевидно, что левая часть уравнения не существует ни при одном значении неизвестного x . Таким образом, вопрос о решении уравнения снимается – ведь нельзя же осуществить операцию сложения в левой части уравнения, так как не существует сама сумма. Каков же вывод? Уравнение не может иметь решений, так как левая часть не существует ни при одном значении неизвестного x .

Пример 2

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$$

Рассмотрим функцию

$$y = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8}$$

Найдем область определения данной функции:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -3$$

Данная функция является монотонно
возрастающей.

Для $x \in [-3, \infty)$ эта функция будет принимать наименьшее значение при $x = -3$, а далее только возрастать.

$$f(-3) = \sqrt{5} \approx 2,23$$

Число 5 принадлежит области значения, следовательно, согласно утверждению $x = 1$.

Проверкой убеждаемся, что это действительный корень уравнения..

Решение упражнений

№ 417 (а, б),

418 (а, б),

№ 419 (а, б),

422 (а, б)



ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

п. 33

№ 417 (в, г),

418 (в, г)

№ 419 (в, г),

422 (в, г)

