

Логарифмические уравнения и неравенства. Методы решения



- Логарифмы в истории
- Логарифм
- Логарифмическая функция $f(x)=\log_a x$
- Логарифмические уравнения
- Логарифмические неравенства



Открытие логарифмов - еще одна историческая цепочка знаний, которая связана не только с математикой, но и, казалось бы, совсем не имеющей к ней отношение музыкой.

Обращаемся к школе Пифагора (VI-IV вв. до н.э.), открытию в области числовых отношений, связанных с музыкальными звуками. Вся пифагорейская теория музыки основывалась на законах "Пифагора-Архита".

1. Высота тона (частота колебаний f) звучащей струны обратно пропорциональна ее длине $l / f = a / l$ (a - коэффициент пропорциональности, характеризующий физические свойства струны).

2. Две звучащие струны дают консонанс (приятное созвучие), если их длины относятся, как 1:2, 2:3, 3:4.

Пифагорова гамма была несовершенной, так как не позволяла транспонировать (переводить из тональности в тональность) мелодию. И лишь только в 1700 году немецкий органист А.Веркмайстер осуществил смелое и гениальное решение, разделив октаву (геометрически) на двенадцать равных частей. Какую же роль сыграли здесь логарифмы? Дело в том, что в основе музыкальной гаммы лежит геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt[12]{2}$, которая является иррациональным числом, при нахождении приближенного значения которого используются логарифмы.

Идея логарифма возникла также в Древней Греции. Так, в сочинении "Псамлигт" Архимеда (287 - 212 г. до н.э.) мы читаем: "Если будет дан ряд чисел в непрерывной пропорции начиная от 1 и если два его члена перемножить, то произведение будет членом того же ряда, настолько удаленным от большего множителя, насколько меньший удален от единицы, и одним членом меньше против того, насколько удалены оба множителя вместе". Здесь под "непрерывной пропорцией" Архимед понимает геометрическую прогрессию, которую мы записали бы так: 1, a , a^2 ... В этих обозначениях правило, сформулированное Архимедом, будет выражено формулой: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Историческое развитие понятия логарифма завершилось в XVII веке. В 1614-м в Англии были опубликованы математические таблицы для выполнения приближенных вычислений, в которых использовались логарифмы. Их автором был шотландец Дж.Непер (1550-1617 гг.). В предисловии к своему сочинению Дж.Непер писал: "Я всегда старался, насколько позволяли мои силы и способности, отделаться от трудности и скуки вычислений, докучность которых обыкновенно отпугивает многих от изучения математики".

Так вслед за изобретением логарифмов и развитием алгебры иррациональных чисел в музыку вошла равномерная темперация (новый двенадцатизвучной строй).

Что такое логарифм?

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Основное логарифмическое
тождество

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

Основные свойства логарифмов

1) Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов этих сомножителей:

$$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2 \quad (a > 0, a \neq 1, N_1 > 0, N_2 > 0).$$

Замечание. Если $N_1 \cdot N_2 > 0$, тогда свойство примет вид

$$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a |N_1| + \log_a |N_2| \quad (a > 0, a \neq 1, N_1 \cdot N_2 > 0).$$

2) Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2 \quad (a > 0, a \neq 1, N_1 > 0, N_2 > 0).$$

Замечание. Если , (что равносильно $N_1 N_2 > 0$) тогда свойство примет вид

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a |N_1| - \log_a |N_2| \quad (a > 0, a \neq 1, N_1 N_2 > 0).$$

3) Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм этого числа:

$$\log_a N^k = k \log_a N \quad (a > 0, a \neq 1, N > 0).$$

Замечание. Если k - четное число ($k = 2s$), то

$$\log_a N^{2s} = 2s \log_a |N| \quad (a > 0, a \neq 1, N \neq 0).$$

4) Формула перехода к другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad (a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, b > 0),$$

в частности, если $b = c$, получим

$(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1).$

$$\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$$

5) Из вышеуказанных свойств вытекают следующие формулы:

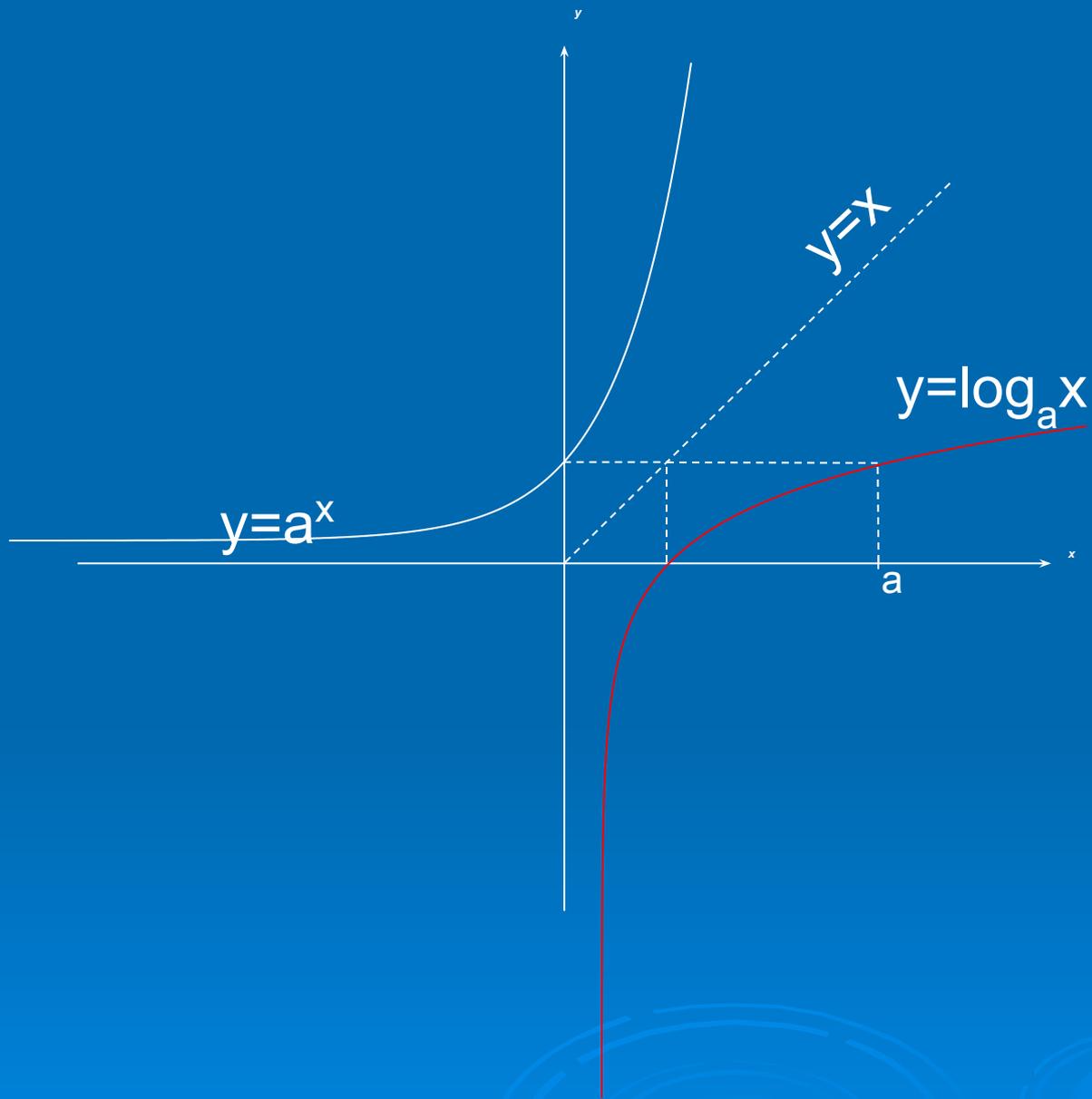
$$\log_{a^c} b^d = \frac{d}{c} \log_a b, (a > 0, a \neq 1, b > 0, c \neq 0),$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b, (a > 0, a \neq 1, b > 0, c \neq 0),$$

$$\log_{a^c} b^c = \log_a b, (a > 0, a \neq 1, b > 0, c \neq 0),$$

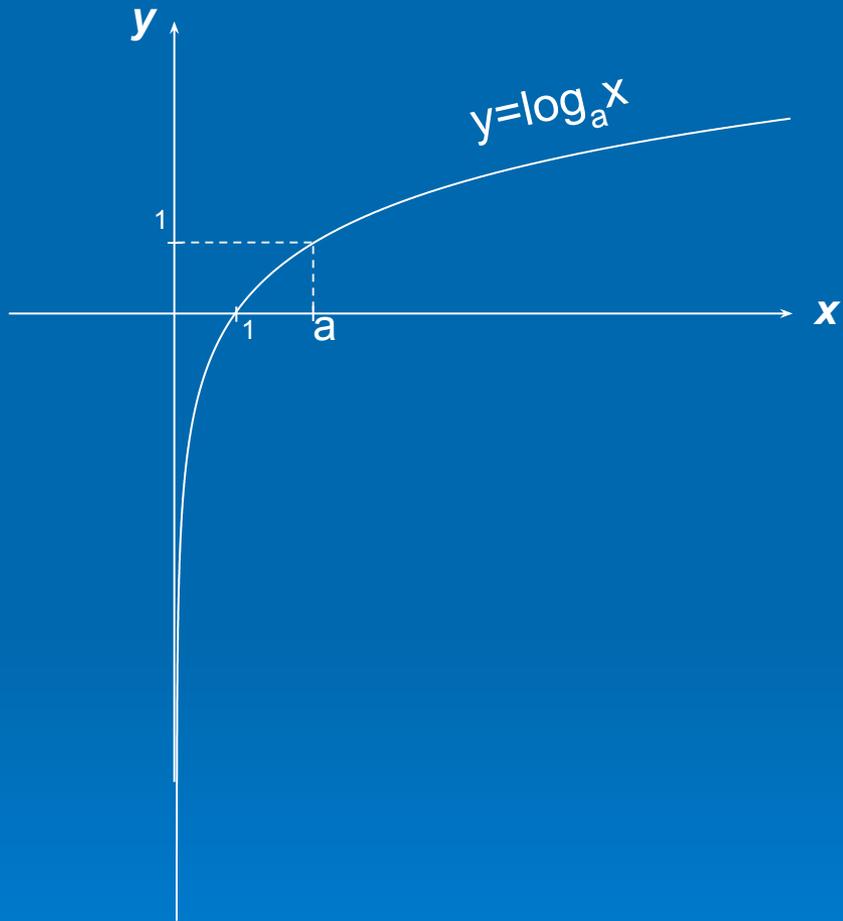
$$\log_{a^{2k}} b = \frac{1}{2k} \log_{|a|} b, (b > 0, a \neq 0, |a| \neq 1),$$

$$\log_a b^{2k} = 2k \log_a |b|, (b > 0, a \neq 0, |a| \neq 1)$$

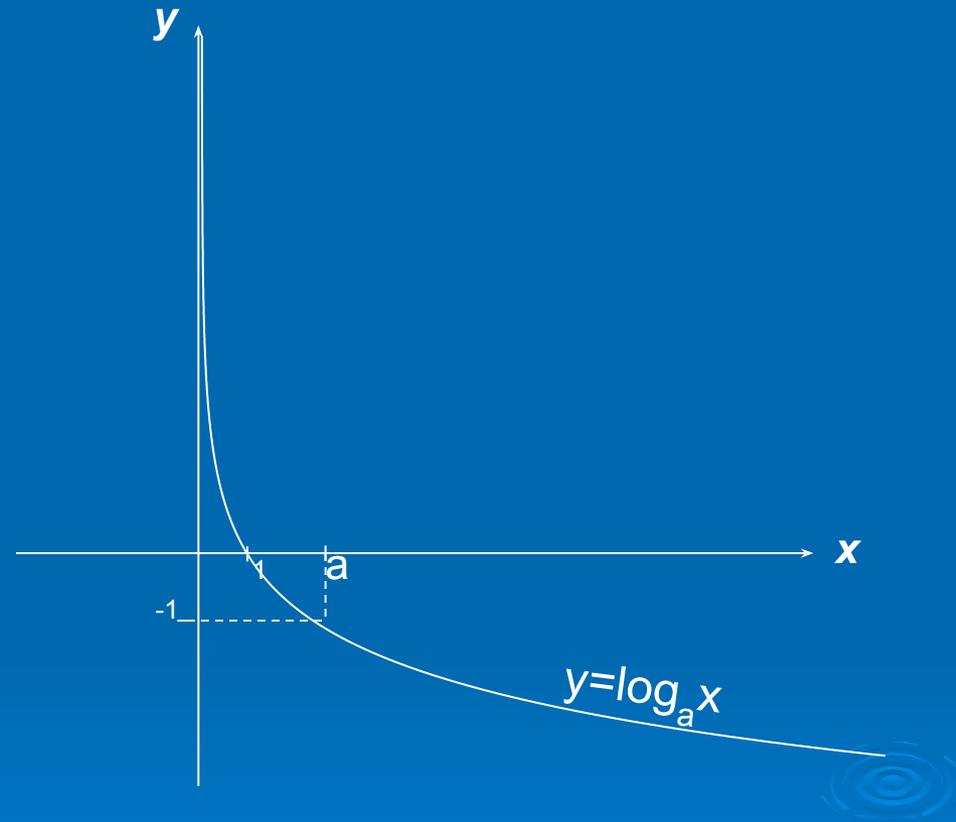


1. Область определения логарифмической функции есть множество положительных чисел.
2. Область значений логарифмической функции - множество действительных чисел.
3. При $a > 1$ логарифмическая функция строго возрастает ($0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$), а при $0 < a < 1$, - строго убывает ($0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$).
4. $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$ ($a > 0, a \neq 1$).
5. Если $a > 1$, то логарифмическая функция отрицательна при $x \in (0; 1)$ и положительна при $x \in (1; +\infty)$, а если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция положительна при $x \in (0; 1)$ и отрицательна при $x \in (1; +\infty)$.
6. Если $a > 1$, то логарифмическая функция выпукла вверх, а если $a \in (0; 1)$ - выпукла вниз.

$a > 1$



$0 < a < 1$



Логарифмические

уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется логарифмическим уравнением.

1) Простейшее логарифмическое уравнение $\log_a x = b$.

Решением является $x = a^b$

$$2) \log_a f(x) = \log_a g(x) \left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{array} \right.$$

$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{array} \right.$

$$4) \log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{array} \right.$$

Потеря решений при неравносильных переходах

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \not\Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Методы решения логарифмических уравнений

□ Использование определения логарифма

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

Пример

$$\log_2(5 + 3\log_2(x - 3)) = 3$$

Решение

$$5 + 3\log_2(x - 3) = 2^3 \Leftrightarrow \log_2(x - 3) = 1 \Leftrightarrow \underline{x=5}$$

Методы решения логарифмических уравнений

□ Использование свойств логарифма

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

Пример

$$\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24),$$

Решение

$$\text{О.Д.З.: } x > 0,$$

$$x(x+3) = x+24 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow x = \{-6; 4\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} x > 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x=4}$$

Методы решения логарифмических уравнений

□ Метод подстановки

$$f(\log_a x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a x \\ f(t) = 0 \end{cases}$$

Пример

$$\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$$

Решение

$$\lg x = t$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$\lg x = 1$$

$$\Leftrightarrow \lg x = 2$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = \{10; 100\}}$$

$$a^{\log_c b} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}} = (a^{\log_a b})^{\frac{1}{\log_a c}} = b^{\log_c a}$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Пример

$$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5} \Leftrightarrow 5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x} \Leftrightarrow 5^{\lg x} = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{x=100}$$

Методы решения логарифмических уравнений

- Уравнения, содержащие выражения вида

$$f(x)^{\log_a g(x)}$$

Пример

$$(x+2)^{\log_2(x+2)} = 4(x+2)$$

Решение

$$\log_2(x+2)^{\log_2(x+2)} = \log_2(4(x+2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2) * \log_2(x+2) = 2 + \log_2(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+2)=t, \\ t^2-t-2=0. \end{cases} \rightarrow x = \{-\frac{3}{2}; 2\}$$

Методы решения логарифмических уравнений

- Метод оценки левой и правой частей

Пример

$$\log_2 (2x - x^2 + 15) = x^2 - 2x + 5.$$

Решение

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) 2x - x^2 + 15 = -(x^2 - 2x - 15) = -((x^2 - 2x + 1) - 1 - 15) = (16 - (x - 1)^2) \leq 16 \Leftrightarrow \log_2 (2x - x^2 + 15) \leq 4. \\ 2) x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + 5 = (x - 1)^2 + 4 \geq 4; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_2 (2x - x^2 + 15) = 4, \\ x^2 - 2x + 5 = 4. \end{array} \right. \longleftrightarrow \underline{x=1}$$

Методы решения логарифмических уравнений

- Использование монотонности функций. Подбор корней.

Пример

$$\log_2 (2x - x^2 + 15) = x^2 - 2x + 5.$$

$$\begin{array}{l} \text{Решение } 2x - x^2 + 15 = t, t > 0 \\ \quad \quad \quad x^2 - 2x + 5 = 20 - t \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2x - x^2 + 15 = t, t > 0 \\ x^2 - 2x + 5 = 20 - t \end{array}} \right\} \rightarrow \log_2 t = 20 - t$$

$y = \log_2 t$ – возрастающая, $y = 20 - t$ – убывающая.
Геометрическая интерпретация дает понять, что исходное уравнение имеет единственный корень, который нетрудно найти подбором, $t = 16$. Решив уравнение $2x - x^2 + 15 = 16$, находим, что $x = 1$

$$3) \log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x) \longleftrightarrow \begin{cases} (h(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$4) f(\log_a x) > 0 \longleftrightarrow \begin{cases} t = \log_a x, \\ f(t) > 0. \end{cases}$$

Методы решения логарифмических неравенств с переменным основанием

□ Быстрое избавление от логарифмов

Пример

$$\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$$

Решение

$$\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x^2 - 5x + 6) - \lg 2x}{\lg 2x - \lg 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x^2 - 5x + 6) - 2x}{2x - 1} < 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x > 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (0; 1/2) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$$

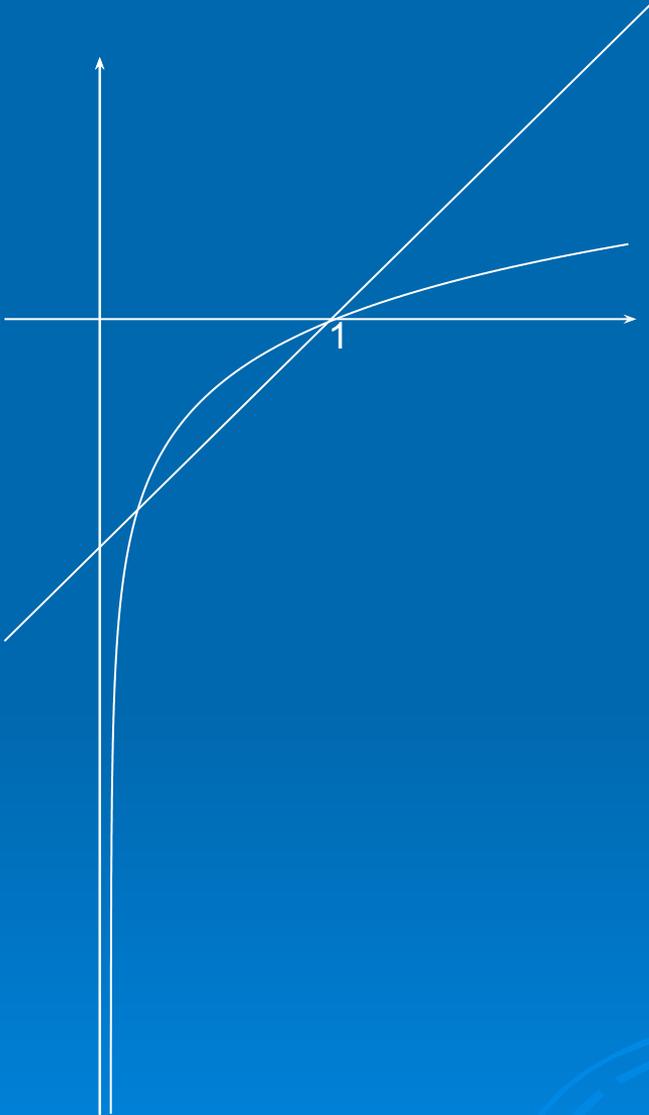
Правило знаков

Очевидно, что $\lg x$, как и $\log_a x$ по любому основанию $a > 1$, имеет тот же знак, что и число $x - 1$.

В более общем случае от логарифма по произвольному основанию a можно перейти к основанию 10:

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}$$

Таким образом, знак величины $\log_a x$ совпадает со знаком числа $(x - 1)/(a - 1)$ или $(x - 1)(a - 1)$.



Пример

$$\log_{2x}(x-4) \log_{x-1}(6-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(x-5)(x-2)(5-x) < 0, \\ x-4 > 0, \quad \Leftrightarrow \\ 6-x > 0, \\ x > 0, \quad x \neq 1/2, \\ x > 1, \quad x-1 \neq 1. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x \in (4;5) \cup (5;6)}$$

