

Примеры задач линейного программирования



Задача об использовании ресурсов



P



Для изготовления двух видов продукции P1 и P2 используют четыре вида ресурсов: S1, S2, S3 и S4.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P1	P2
S1	18	1	3
S2	16	2	1
S3	5	-	1
S4	21	3	-

Прибыль от реализации единицы продукции P1 и P2 соответственно 2 и 3 ден. ед.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет **максимальной**.

Задача об использовании ресурсов



Решение



Введем переменные

X_1 – число единиц продукции P_1 , запланированных к производству

X_2 – число единиц продукции P_2 , запланированных к производству

Прибыль:

$$F = 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2$$

Цель:

$$F \rightarrow \max$$

Задача об использовании ресурсов

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P1	P2
S1	18	1	3
S2	16	2	1
S3	5	-	1
S4	21	3	-



Решение



Ограничения

1) Условие неотрицательности:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

2) На запас сырья S1: $1 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 \leq 18$

3) На запас сырья S2: $2 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 \leq 16$

4) На запас сырья S3: $0 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 \leq 5$

5) На запас сырья S4: $3 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 \leq 21$

Задача об использовании ресурсов



Экономико-математическая модель (задача линейного программирования)

Т.о. необходимо найти план выпуска продукции $X = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_2 \leq 5, \\ 3x_1 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

при котором целевая функция $F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$
(принимает максимальное значение)



Экономико-математическая модель (коротко)

$$\begin{cases} F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_2 \leq 5, \\ 3x_1 \leq 21, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задача составления рациона



В дневной рацион питания цыплят включают два продукта П1 и П2. Причем продукта П1 должно войти в дневной рацион не более 200 ед.

Стоимость 1 ед. продукта П1 составляет 2 ден. ед., а продукта П2 – 4 ден. ед.

Питательное вещество	Минимальная норма потребления, ед/день	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		П1	П2
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2

Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет **наименьшей**

Задача составления рациона



Решение



Введем переменные

X_1 – число единиц продукта П1, входящего в дневной рацион

X_2 – число единиц продукта П2, входящего в дневной рацион

Стоимость дневного рациона :

$$F = 2 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2$$

Цель:

$$F \rightarrow \min$$

Задача составления рациона

Питательное вещество	Минимальная норма потребления, ед/день	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		П1	П2
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2



Решение



Ограничения

1) Условие неотрицательности:

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

2) Ограничение на максимальное содержание продукта П1: $X_1 \leq 200$

3) Ограничения на минимальное содержание питательных веществ:

$$0,2 \cdot X_1 + 0,2 \cdot X_2 \geq 120$$

$$0,4 \cdot X_1 + 0,2 \cdot X_2 \geq 160$$

Задача составления рациона

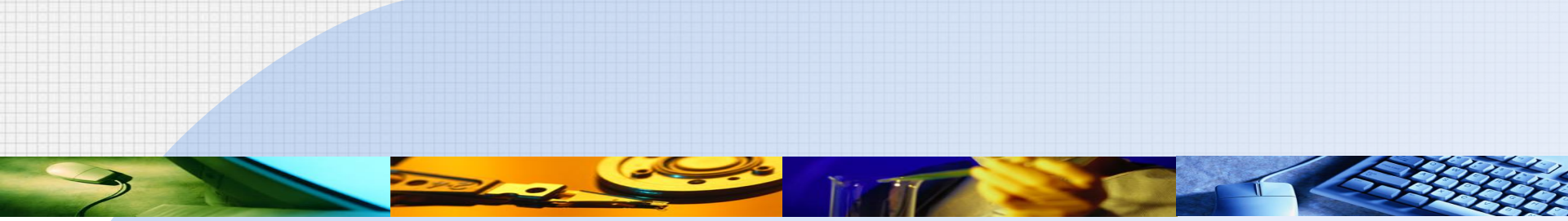


Экономико-математическая модель (задача линейного программирования)

Найти рацион питания $X = (x_1; x_2)$, удовлетворяющий системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 \leq 200, \\ 0,2x_1 + 0,2x_2 \geq 120, \\ 0,4x_1 + 0,2x_2 \geq 160, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

при котором целевая функция $F = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$
(принимает минимальное значение)



Поясним термин **линейное программирование**

линейное означает: ищется экстремальное значение (min или max) линейной целевой функции при линейных ограничениях (линейных уравнениях или неравенствах)

программирование в данном словосочетании имеет смысл планирования

Общий вид задачи линейного программирования

Целевая функция

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max (\min)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (\geq, =)b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (\geq, =)b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (\geq, =)b_m, \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{array} \right.$$

Общий вид задачи линейного программирования



Краткая форма

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Каноническая задача ЛП



$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

В канонической задаче:

- 1) Целевая функция $\rightarrow \max$
- 2) Все ограничения имеют вид уравнений
- 3) Все переменные неотрицательны

В канонической задаче:

- 1) Целевая функция $\rightarrow \max$
- 2) Все ограничения имеют вид уравнений
- 3) Все переменные неотрицательны

Для выполнения этих условий может понадобиться выполнить следующие преобразования:

1. Пусть **F** \rightarrow **min**

Переходим к **(-F)** \rightarrow **max** (переходим к противоположной функции)



В канонической задаче:

- 1) Целевая функция $\rightarrow \max$
- 2) Все ограничения имеют вид уравнений
- 3) Все переменные неотрицательны

Для выполнения этих условий может понадобиться выполнить следующие преобразования:

2. Пусть дано ограничение неравенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$$

Вводим новую переменную $x_3 \geq 0$:

$$a_1x_1 + a_2x_2 - x_3 = b$$



В канонической задаче:

- 1) Целевая функция $\rightarrow \max$
- 2) Все ограничения имеют вид уравнений
- 3) Все переменные неотрицательны

Для выполнения этих условий может понадобиться выполнить следующие преобразования:

3. Пусть $x_i \leq 0$

Вводим новые переменные $x_j \geq 0, x_k \geq 0$:

$$x_i = x_j - x_k$$

Таким образом, задача линейного программирования (ЗЛП) в любом виде **может быть преобразована к канонической форме**





Литература

1. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Исследование операций. - М.: ТК Велби, 2006. - 280 с.
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Исследование операций в экономике. - М.: ЮНИТИ, 2003. - 407 с.
3. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. - СПб.: Питер, 2005. - 464 с.