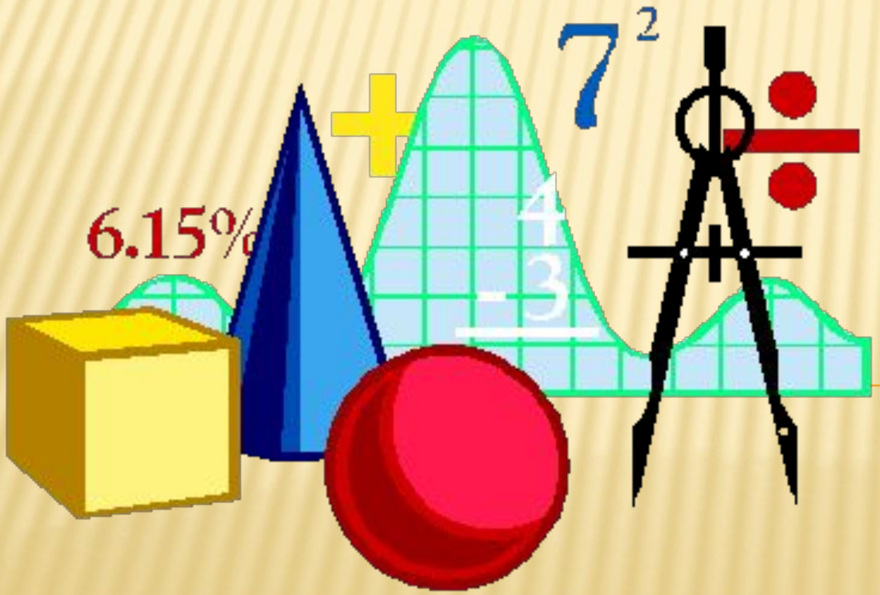
10 способов решения квадратных уравнений



pptcloud.ru

История развития квадратных уравнений

Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени ещё в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей веры вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

$$x^2 - x = 14\frac{1}{2}$$

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводя только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилонии, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения

«Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение 96»
Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа *не* равны, т.к. если бы они равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы , т.е. ***10+X*** , другое же меньше, т.е. ***10-X***.
Разность между ними 2*X*

УРАВНЕНИЕ:

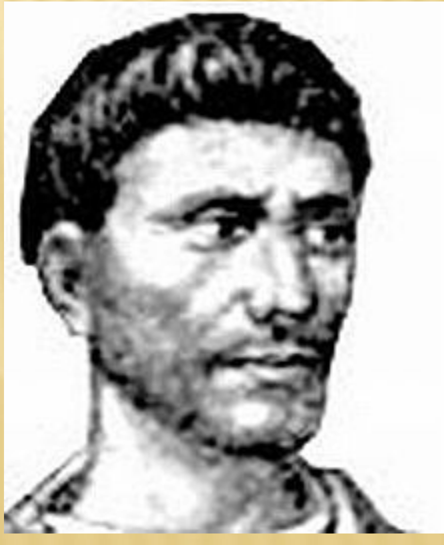
$$(10+X)(10-X)=96$$

или же:

$$100 - X^2=96$$

$$X^2 - 4=0 \quad (1)$$

Отсюда ***X=2***. Одно из искомых чисел равно 12, другое 8. Решение ***X = -2*** для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.



Квадратные уравнения в Индии

Задачи на квадратные уравнения встречаются и в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта, изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме: **$ax^2+bx=c$, $a>0$**

Одна из задач знаменитого индийского математика XII века Бхаскары

Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам…
Стали прыгать повисая…
Сколько было обезьянок
Ты скажи мне, в этой стае?.

Соответствующее задачи уравнение:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x$$

Баскара пишет под видом:

$$x^2-64x=-768$$

Дополнил левую часть до квадрата,

$$x^2-64x+32^2=-768+1024,$$

$$(x-32)^2=256$$

$$x-32=\pm16$$

$$x^1=16, \qquad x^2=48$$

Квадратные уравнения в Древней Азии

$$x^2 + 10x = 39$$

Вот как решал это уравнение среднеазиатский ученый ал-Хорезми:
Он писал : "Правило таково:
раздвои число корней, $x = 2x \cdot 5$
получите в этой задаче пять, 5
умножь на это равное ему, будет двадцать пять, $5 \cdot 5 = 25$
прибавь это к тридцати девяти, $25 + 39$
будет шестьдесят четыре, 64
извлеки из этого корень, будет восемь, 8
и вычти из этого половину числа корней, т.е.пять, $8 - 5$
останется 3
это будет корень квадрата , который ты искал."
А второй корень ? Второй корень не находили, так как отрицательные числа не были известны.

Квадратные уравнения в Европе XIII-XVII вв.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду $x2+вx+c=0$, было сформулировано в Европе лишь в 1544 **г. Штифелем.**

.

Формулы решения квадратных уравнений в Европе были впервые изложены в 1202 г. итальянским математиком **Леонардом Фибоначчи.**

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Лишь в 17 в. благодаря трудам **Декарта, Ньютона и других ученых** способ решения квадратных уравнений принимает современный вид

О теореме Виета

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. Следующим образом: «Если B+D, умноженное на A-A , равно BD, то A равно B и равно D».

Чтобы понять Виета, следует помнить, что A, как и всякая гласная буква , означало у него неизвестное (наше x), гласные же B,D- кэффициенты при неизвестном.

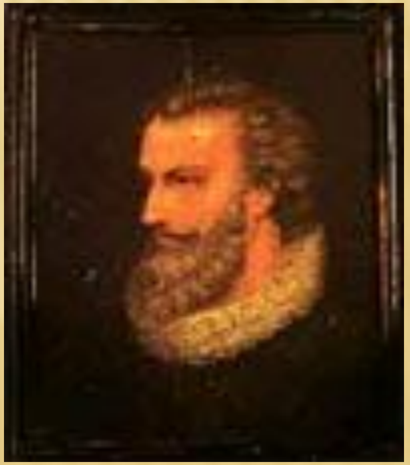
На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает:

Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то есть

$x_1 + x_2 = -p$,

$x_1 x_2 = q$

(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).



Метод разложения на множители

Цель:

привести квадратное уравнение общего вида к виду:

$$A(x) \cdot B(x) = 0,$$

где A(x) и B(x) – многочлены относительно x.

Способы:

- Вынесение общего множителя за скобки;
- Использование формул сокращенного умножения;
- Способ группировки.

Пример:

$$4x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$4(x+1)\left(x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

Метод выделения полного квадрата

Решим уравнение: $x^2 + 6x - 7 = 0.$

$x^2 + 6x - 7 = 0.$

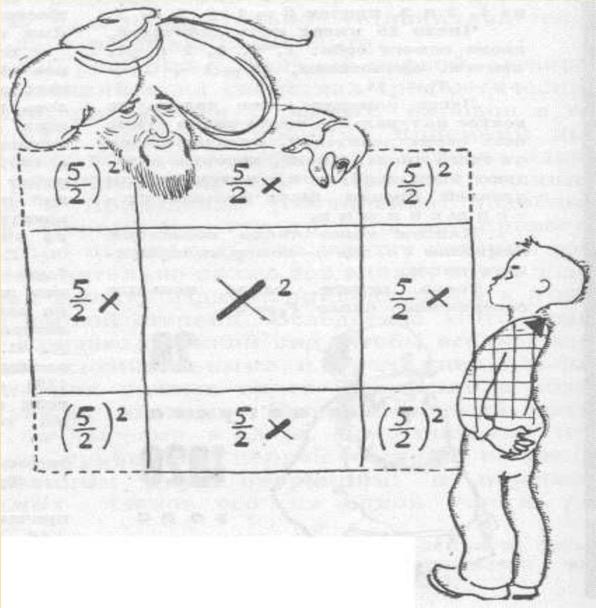
$(x + 3)^2 - 16 = 0.$

$(x + 3)^2 = 16.$

$x + 3 = 4;\ x + 3 = -4.$

$x = 1,\ x = -7.$

Ответ: 1; -7.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

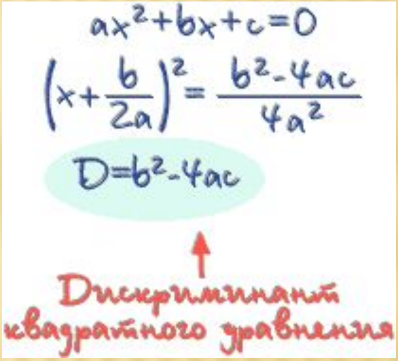
Решение квадратных уравнений по формуле

$$ax^2+bx+c=0$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ зывают ***дискриминантом*** квадратного уравнения.

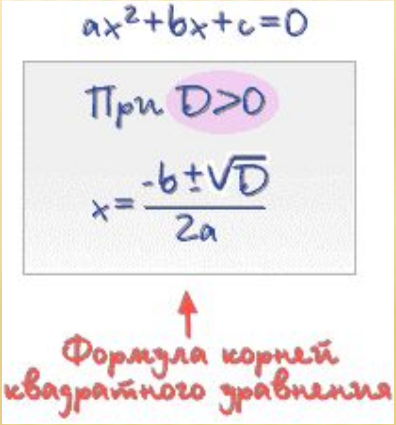
Корни квадратного уравнения:

Если D>0, $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$



Если D<0, $$x = \frac{-b}{2a}$$

Если D<0, ***Нет корней***

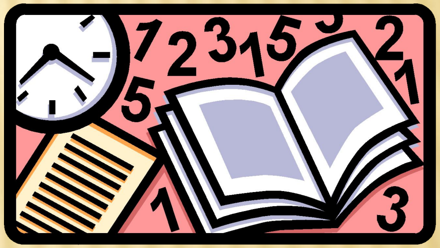


Решение уравнений с помощью теоремы Виета

если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

то $x_1 + x_2 = -p$ $(D \geq 0)$

$x_1 \cdot x_2 = q$



Например:

$X^2 + 3X - 10 = 0$

$X_1 \cdot X_2 = -10$, значит корни имеют разные знаки

$X_1 + X_2 = -3$, значит больший по модулю корень - отрицательный

Подбором находим корни: $X_1 = -5$, $X_2 = 2$

Решение уравнений способом «переброски»

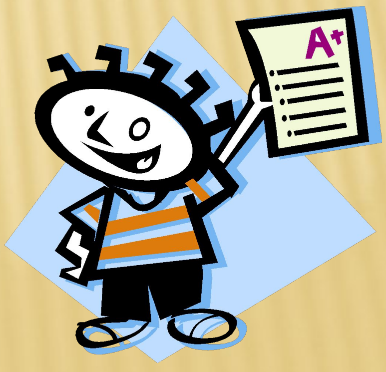
Решите уравнение: $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Перебросим коэффициент 2 к свободному члену

$y^2 - 11y + 30 = 0$.

$D > 0$, по теореме, обратной теореме Виета, получаем корни: 5;6, далее возвращаемся к корням исходного уравнения: 2,5; 3.

Ответ: 2,5; 3.



Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Если в квадратном уравнении *a+b+c=0*, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен

Если в квадратном уравнении *a+c=b*, то один из корней равен (-1), а второй по теореме Виета равен

Пример:

$137x^2 + 20x - 157 = 0.$

$a = 137, b = 20, c = -157.$

$a + b + c = 137 + 20 - 157 = 0.$

$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-157}{137}$

Ответ $\frac{-157}{137}$

Второй коэффициент - четный

Если $b = 2k$, то корни уравнения $ax^2 + 2kx + c = 0$ находятся по формуле $\boxed{x = \dfrac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}}$,

где $\boxed{D_1 = \dfrac{D}{4} = k^2 - ac = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac}$.

$\boxed{x^2 + px + q = 0}$ — **приведенное квадратное уравнение.**

Старший коэффициент равен 1.

Квадратное уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 1$	$\Leftrightarrow$	Приведенное квадратное уравнение: $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$, здесь $p = \dfrac{b}{a}$, $q = \dfrac{c}{a}$

Формула корней приведенного квадратного уравнения.

$$\boxed{x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Графический способ решения квадратного уравнения

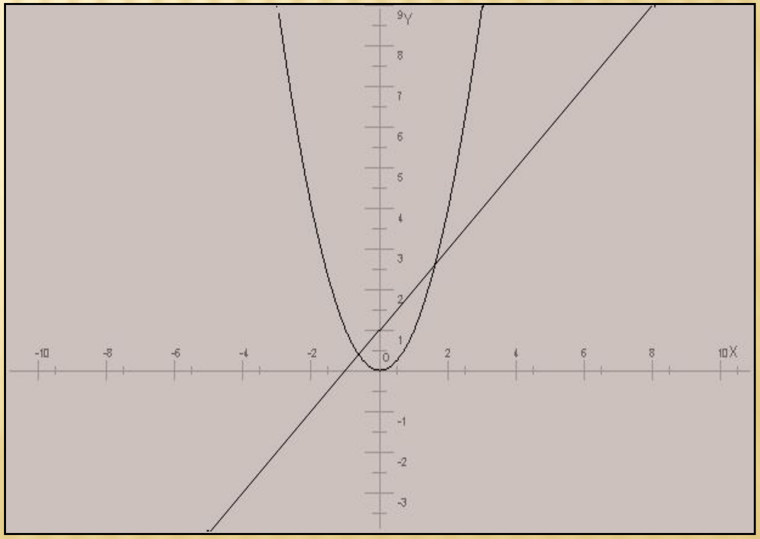
Не используя формул квадратное уравнение можно решить графическим способом. Решим уравнение $x^2 - x - 1 = 0.$

Для этого построим два графика: **1)y=x2**
2)y=x+1

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

X	-1	0	1
Y	0	1	2

Абсциссы точек пересечения графиков и будет корнями уравнения. Если графики пересекаются в двух точках, то уравнение имеет два корня. Если графики пересекаются в одной точке, то уравнение имеет один корень. Если графики не пересекаются, то уравнение корней не имеет.



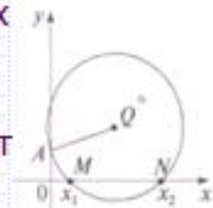
Ответ: $x \approx -0.6; x \approx 2.6$

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) можно рассматривать как абсциссы точек пересечения окружности с центром Q (-$\frac{b}{2a}$ $\frac{a+c}{2a}$ проходящей через точку A(0; 1), и оси *Ox* .

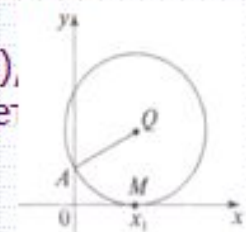
1) если QA > $\frac{a+c}{2a}$, то

окружность пересекает ось Ox в двух точках M(x_1; 0) и N(x_2; 0) уравнение имеет корни x_1 ; x_2;



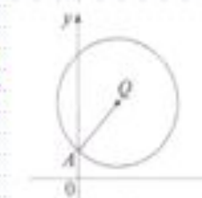
2) если QA = $\frac{a+c}{2a}$, то

окружность касается оси *Ox* в точке M(x_1; 0), уравнение имеет корень x_1.



если QA < $\frac{a+c}{2a}$,

то окружность не имеет общих точек с осью *Ox*, у уравнения нет корней.



Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 «Четырехзначные математические таблицы» Брадис В.М.

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения

$$z^2 + pz + q = 0$$

Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

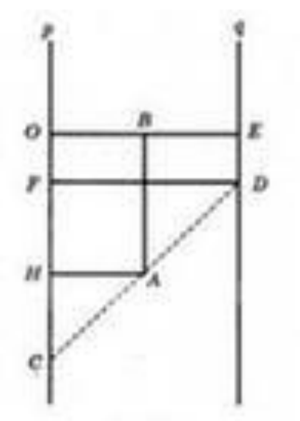
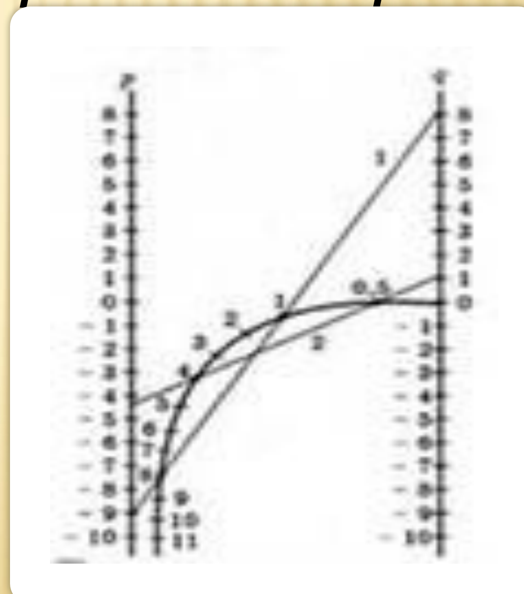


Рис. 11

Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ ***номограмма дает корни***



$$Z_1 = 8.0 \quad \text{и} \quad Z_2 = 1.0$$

Геометрический способ решения квадратных уравнений

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически.

А вот, например, как древние греки решали уравнение:

$$y^2 + 6y - 16 = 0$$

$$y^2 + 6y = 16 \qquad y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$$

Выражения $y^2 + 6y + 9$ $16 + 9$ етрически предоставляют собой один и тот же квадрат, а исходное уравнение $y^2 + 6y - 16 + 9 - 9 = 0$ и тоже уравнение.

Откуда и получаем что $y + 3 = \pm 5$ и $y_1 = 2, y_2 = -8$

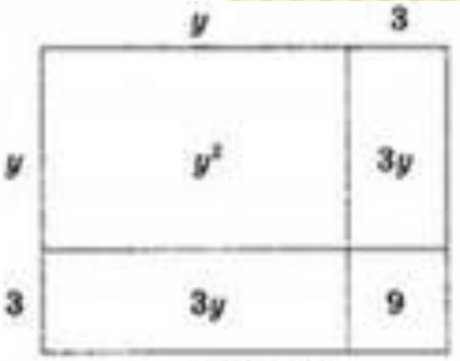


Рис. 16

Заключение

- данные приёмы решения заслуживают внимания, поскольку они не все отражены в школьных учебниках математики;
- овладение данными приёмами поможет учащимся экономить время и эффективно решать уравнения;
- потребность в быстром решении обусловлена применением тестовой системы вступительных экзаменов;