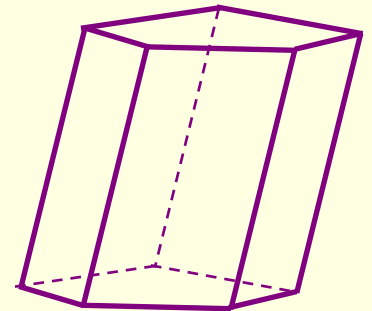


Призма

Презентация учителя
Андреевой Надежды
Михайловны



Содержание



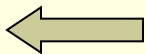
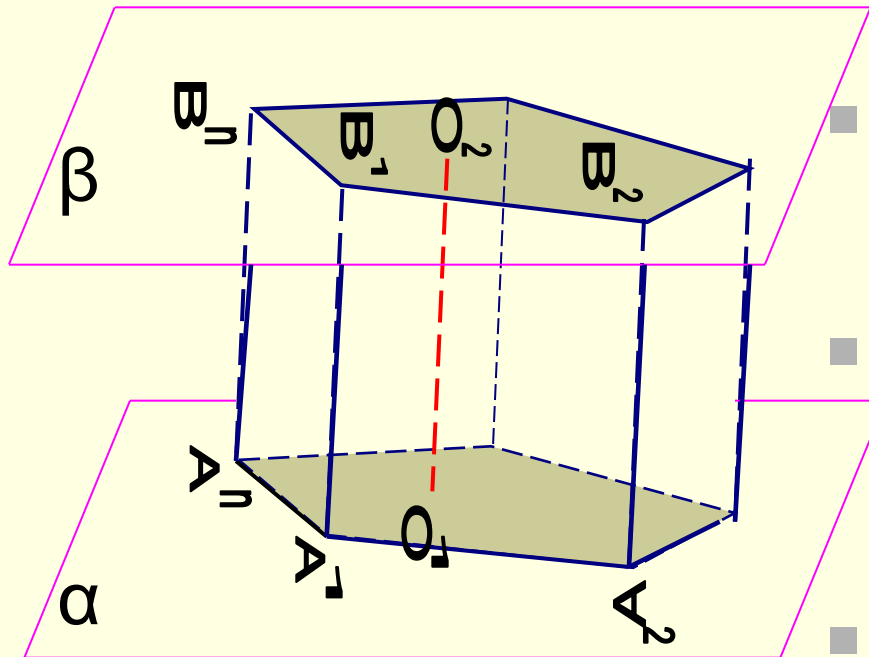
- **Введение** →
- **Призма в древности** →
- **Призма в геометрии** →
- **Теоремы** →
- **Задачи** →
- **Используемые источники** →

Введение

Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны. Каждый из n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ (1) является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например в четырехугольнике $A_1A_2B_2B_1$ стороны A_1B_1 и A_2B_2 параллельны по условию, а стороны A_1A_2 и B_1B_2 – по свойству параллельных плоскостей, пересеченных третьей плоскостью.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется **призмой**.

Введение



- $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$ – призма
- Многоугольники $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ – основания призмы
- Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ – боковые грани призмы
- Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ – боковые ребра призмы
- Отрезок O_1O_2 – высота призмы

Призма в древности



Подобно тому, как треугольник в понимании Евклида не являются пустым, т. е. представляет собой часть плоскости, ограниченную тремя неконкурентными (т. е. не пересекающимися в одной точке) отрезками, так и многогранник у него не пустой, не полый, а чем-то заполненный (по-нашему - частью пространства). В античной математике, однако, понятия отвлеченного пространства еще не было. Евклид определяет призму как телесную фигуру, заключенную между двумя равными и параллельными плоскостями (основаниями) и с боковыми гранями - параллелограммами. Для того чтобы это определение было вполне корректным, следовало бы, однако, доказать, что плоскости, проходящие через пары непараллельных сторон оснований, пересекаются по параллельным прямым.

Призма в древности

Евклид употребляет термин “плоскость” как в широком смысле (рассматривая ее неограниченно продолженной во все направления), так и в смысле конечной, ограниченной ее части, в частности грани, аналогично применению им термина “прямая” (в широком смысле - бесконечная прямая и в узком - отрезок). В XVIII в. **Тейлор** дал такое определение призмы: **это многогранник, у которого все грани, кроме двух, параллельны одной прямой.**

В памятниках вавилонской и древнеегипетской архитектуры встречаются такие геометрические фигуры, как куб, параллелепипед, призма. Важнейшей задачей египетской и вавилонской геометрии было определение объема различных пространственных фигур. Эта задача отвечала необходимости строить дома, дворцы, храмы и другие сооружения.



Призма в древности



Часть геометрии, в которой изучаются свойства куба, призмы, параллелепипеда и других геометрических тел и пространственных фигур, издавна называется стереометрией; Слово это греческого происхождения (“стереос” - пространственный, “метрео” - измеряю) и встречается еще у знаменитого древнегреческого философа Аристотеля. Стереометрия возникла позже, чем планиметрия. Евклид дает следующее определение призмы: **“Призма есть телесная (т.е. пространственная) фигура, заключенная между плоскостями, из которых две противоположные равны и параллельны, остальные же - параллелограммы”**. Тут, как и во многих других местах, Евклид употребляет термин “плоскость” не в смысле безгранично продолженной плоскости, а в смысле ограниченной ее части, грани, подобно тому как “прямая” означает у него и отрезок прямой.



Призма в древности

Термин “призма” греческого происхождения и буквально означает “отпиленное” (тело).

Термин “**параллелепипедальное тело**” встречается впервые у Евклида и означает дословно “**параллеле-плоскостное тело**”. Греческое слово “**кубос**” употребляется Евклидом в том же смысле, что и наше слово “куб”.

Теоремы Евклида относятся только к сравнению объемов, так как непосредственное вычисление объемов тел. Евклид, вероятно, считал делом практических руководств по геометрии. В произведениях прикладного характера Герона Александрийского имеются правила для вычислений объема куба, призмы, параллелепипеда и других пространственных фигур.

Объемы зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне и вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли путем умножения площади основания на высоту.



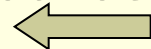
Призма в древности

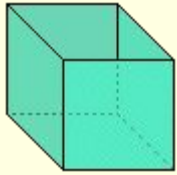
Однако древнему Востоку были известны в основном только отдельные правила, найденные опытным путем, которыми пользовались для нахождения объемов для площадей фигур. В более позднее время, когда геометрия сформировалась как наука, был найден общий подход к вычислению объемов многогранников.

Среди замечательных греческих ученых V - IV вв. до н. э., которые разрабатывали теорию объемов, были Демокрит из Абдеры и Евдокс Книдский.

Евклид не применяет термина “объем”. Для него термин “куб”, например, означает и объем куба. В XI книге “Начал” изложены среди других и теоремы следующего содержания.

- 1. Параллелепипеды с одинаковыми высотами и равновеликими основаниями равновелики.**
- 2. Отношение объемов двух параллелепипедов с равными высотами равно отношению площадей их оснований.**
- 3. В равновеликих параллелепипедах площади оснований обратно пропорциональны высотам.**





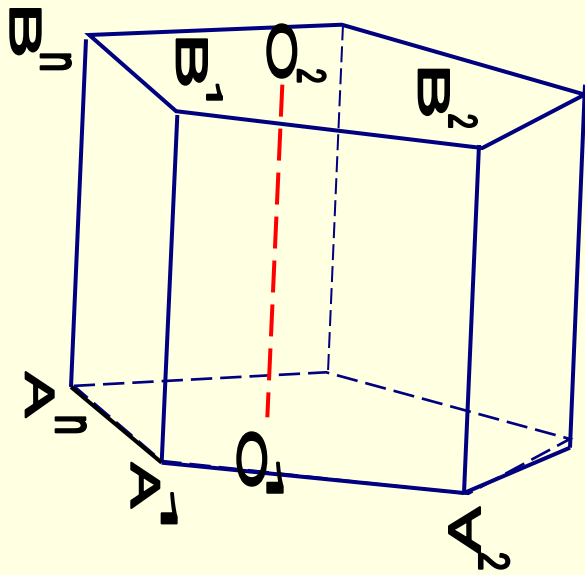
Призма в геометрии

Призма – многогранник, который состоит из двух плоских равных многоугольников с соответственно параллельными сторонами и отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

Многоугольники называются основаниями призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины, – боковыми рёбрами призмы. Все боковые грани призмы – параллелограммы.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой.

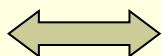
Призма в геометрии



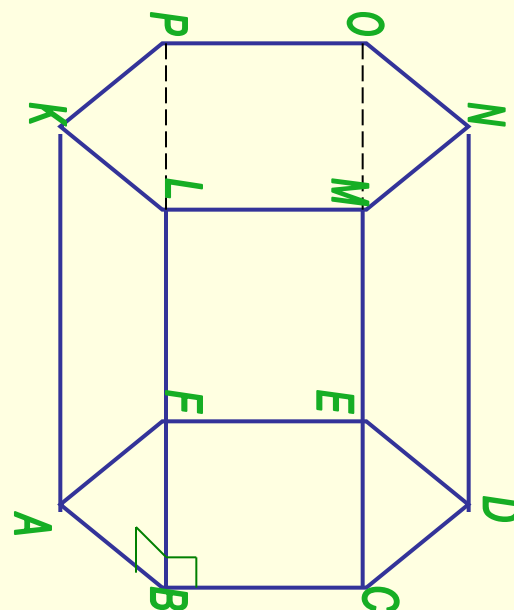
- $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$ – призма
- Многоугольники $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ – основания призмы
- Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ – боковые грани призмы
- Отрезки A_1B_1 , A_2B_2 , A_nB_n – боковые ребра призмы
 - Отрезок O_1O_2 – высота призмы

Призма в геометрии

Прямая призма –
призма, у которой
боковое ребро
перпендикулярно
основанию.



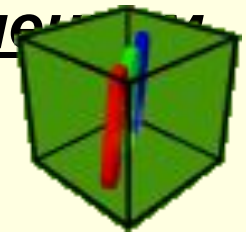
ABCDEFKLMNOP- прямая
правильная призма



Призма в геометрии

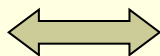
Прямая призма, основанием которой служит правильный многоугольник, называется правильной призмой.

Боковое ребро прямой призмы, в том числе и правильной, есть ее высота. Отрезок, концы которого - две вершины, не принадлежащие одной грани призмы, называют ее диагональю. Сечение призмы с плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, называют диагональным сечением призмы.

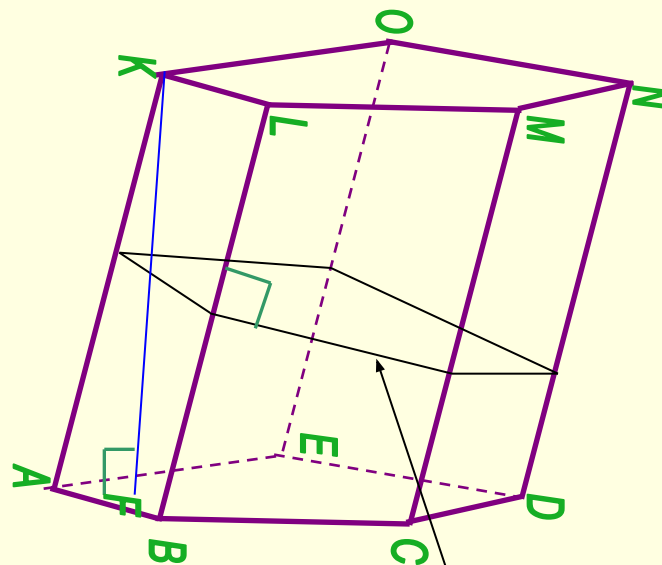


Призма в геометрии

**Наклонная призма-
призма, у которой
боковое ребро не
перпендикулярно
основанию.**



- $ABCDEKLMNO$ - наклонная призма
- KF - высота



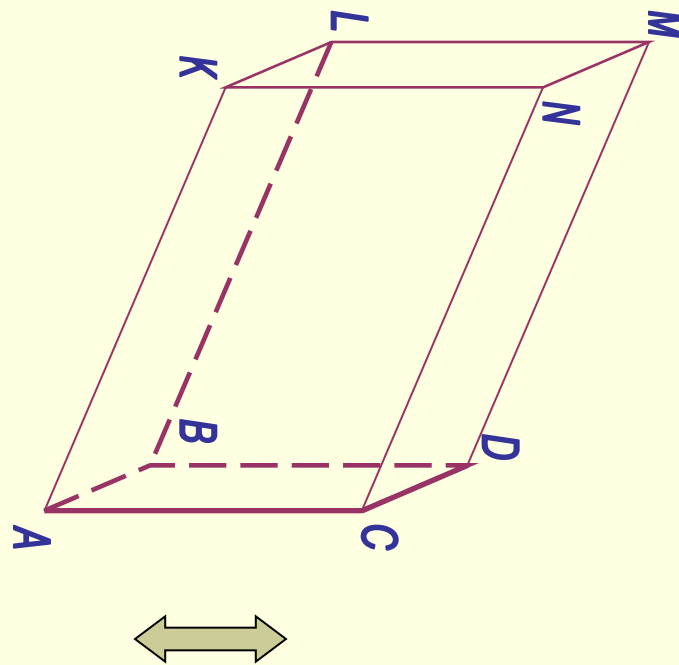
Перпендикулярное сечение

Призма в геометрии

Призма, основание которой - параллелограмм, называется параллелепипедом.

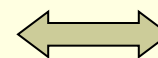
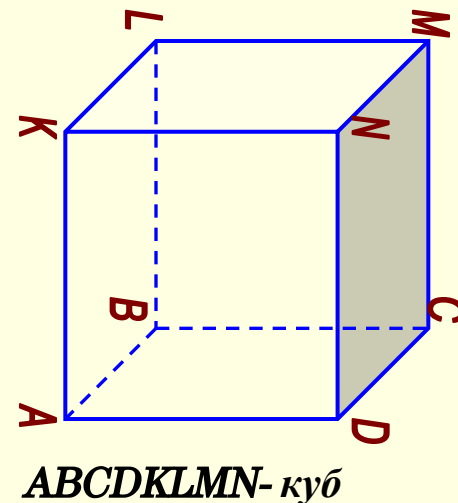
В соответствии с определением параллелепипед - это четырехугольная призма, все грани которой - параллелограммы. Параллелепипеды, как и призмы, могут быть прямыми и наклонными.

ABCDKLMN-
параллелепипед



Призма в геометрии

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называют прямоугольным параллелепипедом. У прямоугольного параллелепипеда все грани - прямоугольники. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, имеющих общий конец, называют его измерениями. Куб - прямоугольный параллелепипед с равными измерениями. Все



Призма в геометрии

■ **Призма:** ↔

$$S_{\text{бок}} = P_{\perp} L$$

$$S_{\text{полн}} = 2S_o + S_{\text{бок}}$$

$$V = S_o L$$

Прямая призма:

$$S_{\text{бок}} = P_o L \quad (L = h)$$

■ **Параллелепипед:** ↔

$$S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

■ **Куб:** ↔

$$S_{\text{полн}} = 6a^2$$

$$V = a^3$$

$$d^2 = 3a^2$$



Обозначения:

■ V - объем;

■ $S_{\text{полн}}$ - площадь полной поверхности;

↔ ■ $S_{\text{бок}}$ - площадь боковой поверхности;

■ S_o - площадь основания;

■ P_o - периметр основания;

■ P - периметр перпендикулярного сечения;

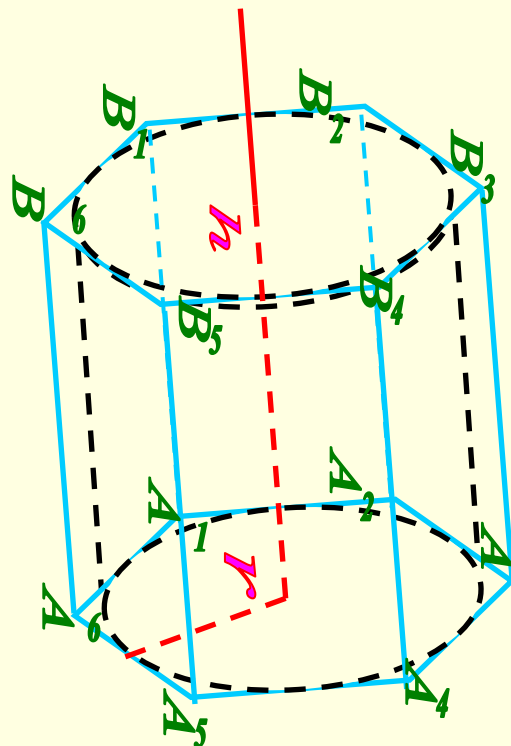
■ L - длина ребра;

■ h - высота.

Призма в геометрии

Призма называется описанной около цилиндра, если ее основания описаны около основания цилиндра.

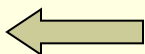
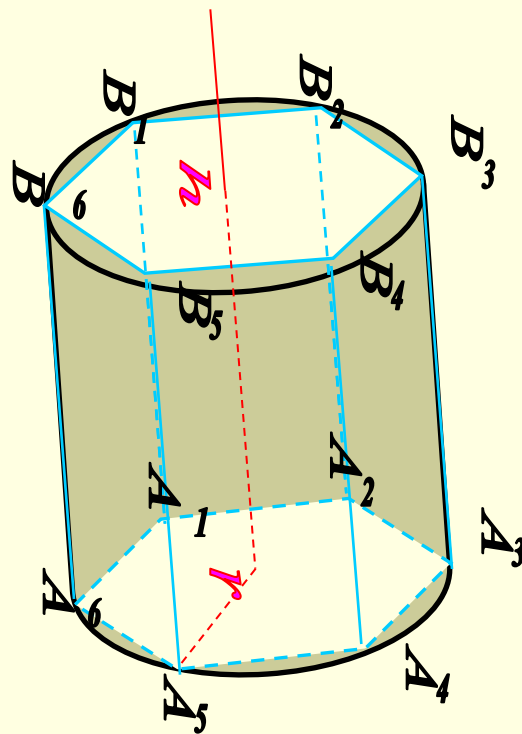
$A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ - призма описанная около цилиндра



Призма в геометрии

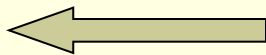
Призма называется вписанной в цилиндр, если ее основания вписаны в основания цилиндра.

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ - призма вписанная в цилиндр



Теоремы

- **Объем прямой призмы;** →
- **Объем наклонной призмы;** →
- **Площадь боковой поверхности призмы;** →
- **Площадь боковой поверхности прямой призмы;** →





Теоремы

- I. Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.**

Доказательство

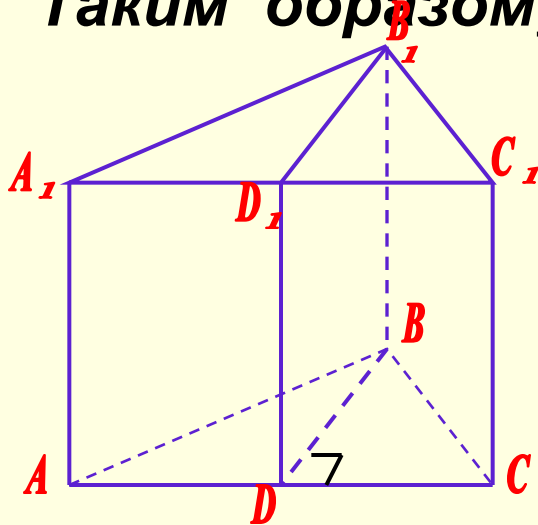
Сначала докажем теорему для треугольников прямой призмы, а затем для произвольной призмы.

- 1. Рассмотрим прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с объемом V и высотой h . Проведем такую высоту треугольника ABC (отрезок BD), которая разделяет этот треугольник на два треугольника (по крайней мере, одна высота треугольника этому условию удовлетворяет). Плоскость DD_1D разделяет данную призму на две призмы,**

Теоремы

основаниями которых являются
прямоугольные треугольники ABD и BDC .
Поэтому объемы V_1 и V_2 этих призм
соответственно равны $S_{ABD} \cdot h$ и $S_{BDC} \cdot h$. По
свойству 2 объемов $V = V_1 + V_2$, то есть
 $V = S_{ABD} \cdot h + S_{BDC} \cdot h = (S_{ABD} + S_{BDC}) \cdot h$.

Таким образом, $V = S_{ABC} \cdot h$ (1)

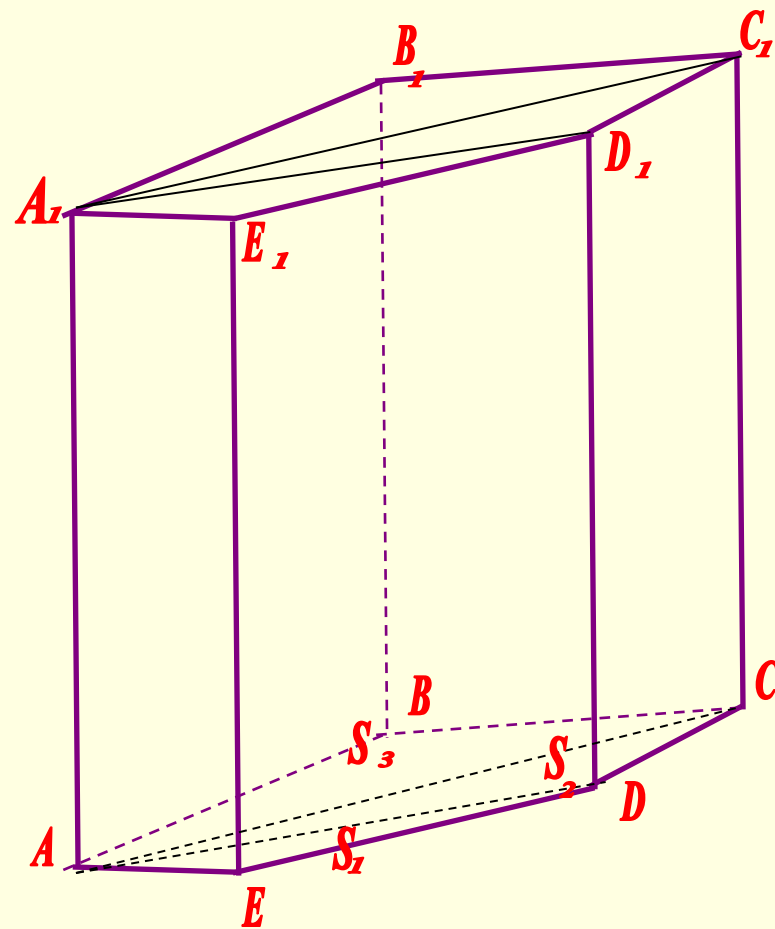




Теоремы

- 2. Докажем теорему для произвольной прямой призмы с высотой h и площадью основания S . Такую призму можно разбить на прямые треугольные призмы с высотой h . Например, на рисунке изображена пятиугольная призма, которая разбита на три прямые треугольные призмы. Выразим объем каждой треугольной призмы по формуле (1) и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель h , получим в скобках сумму площадей основания треугольных призм, то есть площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объем исходной призмы равен произведению $S \cdot h$. Теорема доказана.**

Теоремы





Теоремы

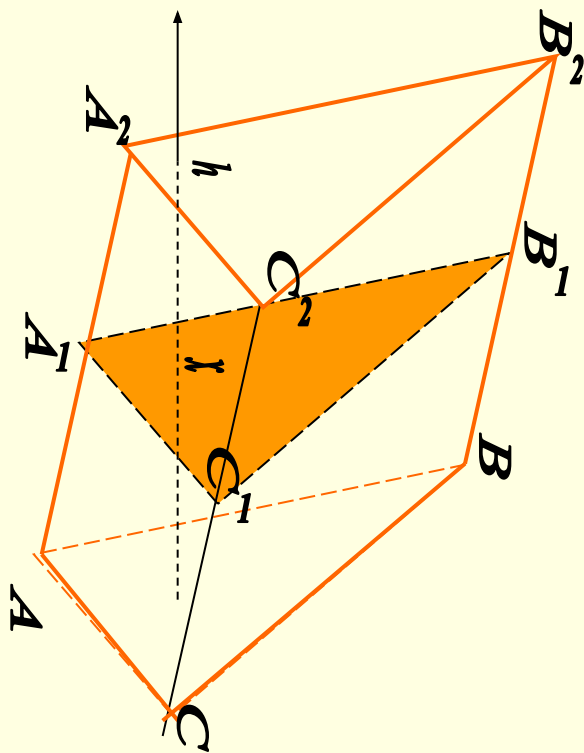
II. Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство

Сначала докажем теорему для треугольной призмы, а затем - для произвольной призмы.

1. Рассмотрим треугольную призму с объемом V , площадью основания S и высотой h . Отметим точку O на одном из оснований призмы и направим ось Ox перпендикулярно к основаниям. Рассмотрим сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим буквой x абсциссу точки пересечения этой плоскости с осью Ox ,

Теоремы





Теоремы

Докажем, что площадь $S(x)$ равна площади S основания призмы. Для этого заметим, что треугольники ABC (основания призмы) и $A_1B_1C_1$ (сечение призмы рассматриваемой плоскостью) равны. В самом деле, четырехугольник AA_1B_1B – параллелограмм (отрезки AA_1 и B_1B равны и параллельны), поэтому $A_1B_1=AB$. Аналогично доказывается, что $B_1C_1=BC$ и $A_1C_1=AC$. Итак треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны по трем сторонам.

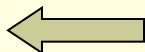
Следовательно, $S(x)=S$. Применяя теперь основную формулу для вычисления объемов тел при $a=0$ и $b=h$, получаем

$$V = \int S(x) dx = \int S dx = S \int dx = Sx \Big|_0^h = Sh$$



Теоремы

2. Докажем теорему для произвольной прямой призмы с высотой h и площадью основания S . Такую призму можно разбить на прямые треугольные призмы с высотой h . Выразим объем каждой треугольной призмы по доказанной нами формуле и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель h , получим в скобках сумму площадей основания треугольных призм, то есть площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объем исходной призмы равен произведению $S \cdot h$. Теорема доказана.





Теоремы

III. **Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения и длины бокового ребра.**

Дано: AC_1 - произвольная n -угольная призма, $a^{\wedge}AA_1$, $A_2B_2C_2D_2$ - перпендикулярное сечение (сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру), l - длина бокового ребра.

Доказать: $S_{бок} = P l$, где P - периметр перпендикулярного сечения.



Теоремы

Доказательство.

$$S_{бок} = \underline{S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} + S_{CC_1D_1D} + \dots}$$

и слагаемых

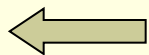
Каждая боковая грань призмы - параллелограмм, основание которого - боковое ребро призмы, а высота - сторона перпендикулярного сечения.

Поэтому

$$S_{бок} = L_{A_2B_2} + L_{B_2C_2} + L_{C_2D_2} + \dots = (A_2B_2 + B_2C_2 + C_2D_2 + \dots) L = P L.$$

$$S_{бок} = P L.$$

Теорема доказана.



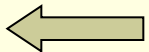


Теоремы

IV. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

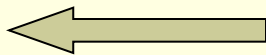
Доказательство

Боковые грани прямой призмы-прямоугольники, основания которых-стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, то есть равна сумме произведений сторон основания на высоту h . Вынося множитель h за скобки получим в скобках сумму сторон основания призмы, то есть его периметр P . Итак, $S_{бок}=Ph$. Теорема доказана.



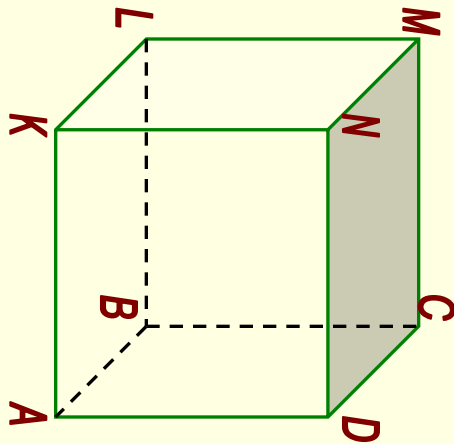
Задачи

- **Задача №1** →
- **Задача №2** →
- **Задача №3** →
- **Задача №4** →



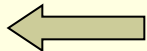
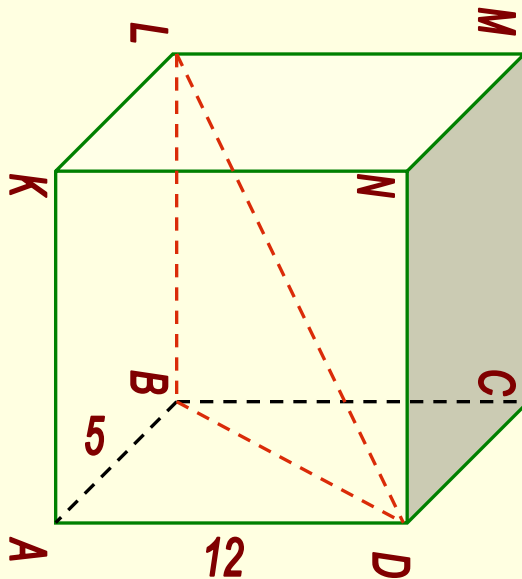
Задача №1

В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12см и 5см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45° . Найдите боковое ребро параллелепипеда.



Задача №1

Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABD$

По теореме Пифагора:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2$$

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 13$$

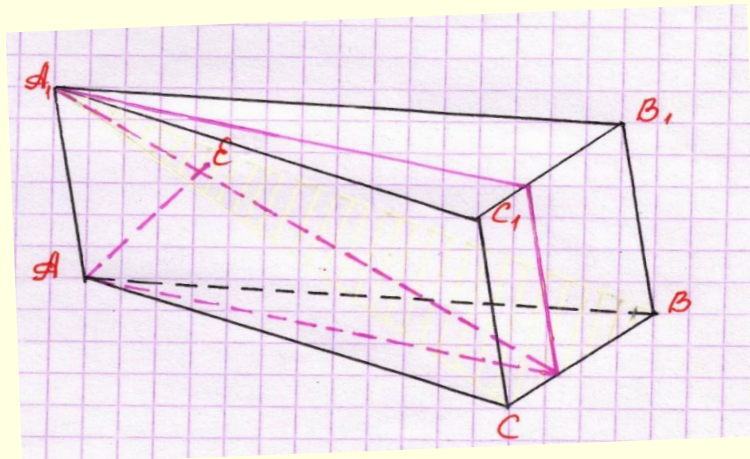
**Рассмотрим $\triangle BLD$ -
прямоугольный,
равнобедренный, значит**

$$BL = BD = 13 \text{ см}$$

Ответ: $BL = 13 \text{ см}$

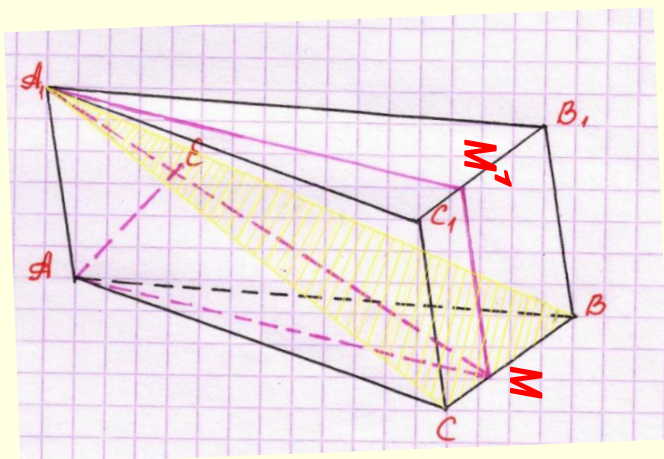
Задача №2

Высота прямой треугольной призмы $ABCA_1B_2C_3$ равна 10. Расстояние от вершины A до плоскости A_1BC равно 6. Найдите площадь сечения призмы плоскостью A_1BC , если BC равен 16.



Задача №2

- Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

Сечение A_1BC разбивает призму $ABCA_1B_1C_1$ на две пирамиды AA_1BC и $A_1BB_1C_1C$. Пусть V – объем призмы, V_1 – объем пирамиды AA_1BC , V_2 – объем пирамиды $A_1BB_1C_1C$. По свойству $V=V_1+V_2$ (1)

Проведем AM перпендикулярную BC , тогда A_1M перпендикулярен BC . Обозначим $AM=h$, $A_1M=\sqrt{100+h^2}$. Проведем $MM_1 \perp AA_1$, тогда AM перпендикулярен MM_1 , значит AM перпендикулярен MM_1 , AA_1 , значит AM перпендикулярен AA_1M_1 , $AA_1M_1 \perp AM \rightarrow A_1M_1$ перпендикулярен BB_1C , $A_1M_1=AM=h$

Задача №2

Найдем V , V_1 , V_2 .

$$V = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot h \cdot 10 = 80h$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1BC} \cdot AE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (\sqrt{100+h^2}) \cdot 6 = 16 \cdot (\sqrt{100+h^2})$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot S_{BB_1C_1C} \cdot A_1M_1 = \frac{2}{3} \cdot 16 \cdot h \cdot 10 = 160/3h$$

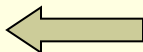
Найденные значения подставим в формулу(1):

$$80h = 16 \cdot (\sqrt{100+h^2}) + 160/3h$$

$$h = 7,5$$

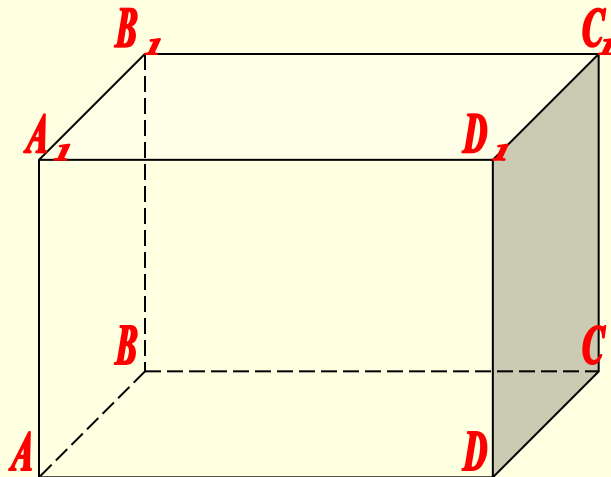
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot A_1M = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (\sqrt{100+56,25}) = 100$$

Ответ: $S=100$



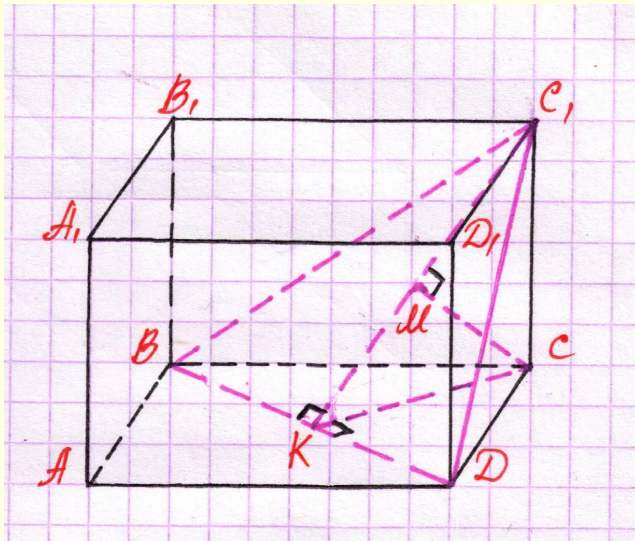
Задача №3

Дана прямая четырехугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Расстояние от точки C до плоскости $BC_1 D$ равно $3\sqrt{2}$. Плоскость $BC_1 D$ наклонена к плоскости основания под углом 30° . Найдите сторону основания призмы.



Задача №3

Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

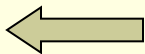
Пусть CM - перпендикуляр, проведенный из точки C к плоскости BC_1D . Так как $BC=CD$ и $BC_1=C_1D$, то высота C_1K (она же медиана) $\triangle BC_1D$ проходит через точку M .

В $\triangle KMC$:

$KC = CM / \sin \angle MKC = 3\sqrt{2} / \sin 30^\circ = 6\sqrt{2}$,
так как $ABCD$ - квадрат, то $KC=KD$, и из $\triangle KCD$ имеем
 $CD^2 = (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 = 144$,

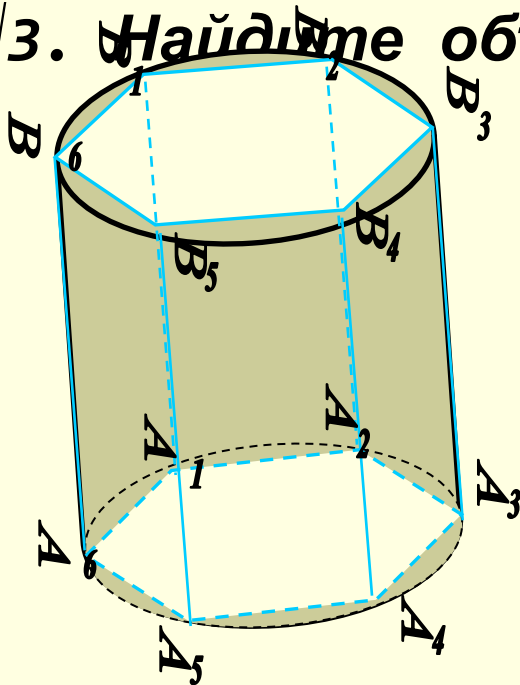
$$CD = 12$$

Ответ: $CD = 12$



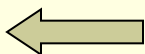
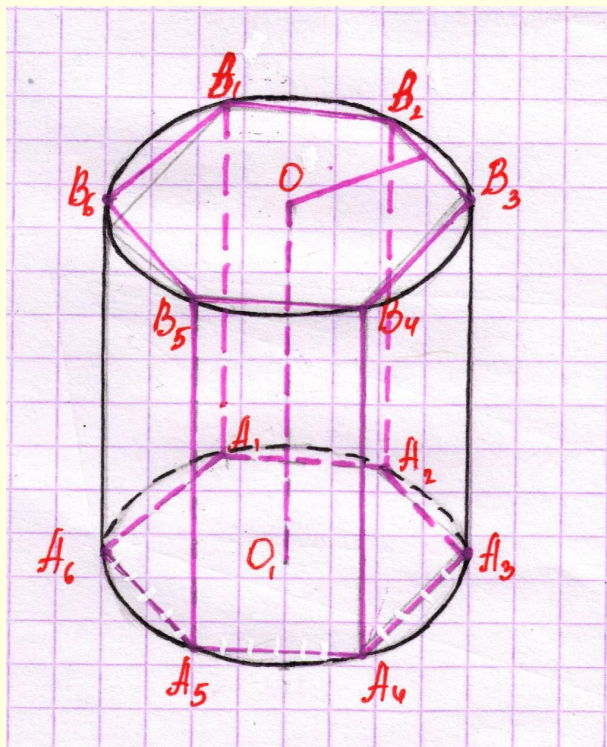
Задача №4

Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $16\pi\sqrt{3}$. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем призмы.



Задача №4

Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

По формуле $S_{б\ ц} = 2\pi R H = 16\pi\sqrt{3}$.

Отсюда $RH = 8\sqrt{3}$. Расстояние $d = 2\sqrt{3}$ есть расстояние между осью цилиндра и плоскостью боковой грани призмы (так как $|OO_1 A_2 A_3 B_3 B_2|$). А это есть радиус вписанного в шестиугольник круга:

$$d = r = R\sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3}$$

Отсюда $R = 4$

Сторона основания правильной шестиугольной призмы $A_2 A_3 = R = 4$. Высоту призмы H найдем из равенства $RH = 8\sqrt{3}$; $H = 2\sqrt{3}$

$$S_{осн} = 6S_{\triangle O A_2 A_3} = 6 \cdot (4^2 \cdot \sqrt{3} / 4) = 24\sqrt{3}$$

$$V_{пр} = S_{осн} \cdot H = 24\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 144$$

Ответ: $V_{пр} = 144$

Используемые источники

- **Л. С. Атанасян. Геометрия. Учебное пособие для старших классов. М.: Просвещение, 2006.**
- **Лысенко Ф. Ф. Математика ЕГЭ 2008. Вступительные испытания. Легион, 2007.**
- **Интернет**

