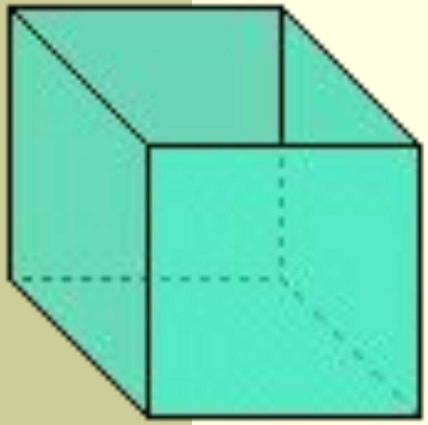
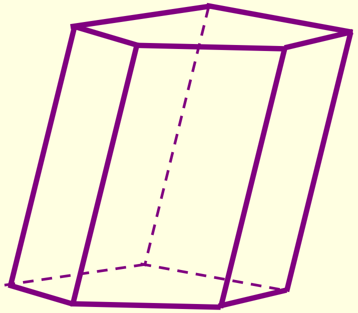


Призма

Презентация учителя
Андреевой Надежды
Михайловны



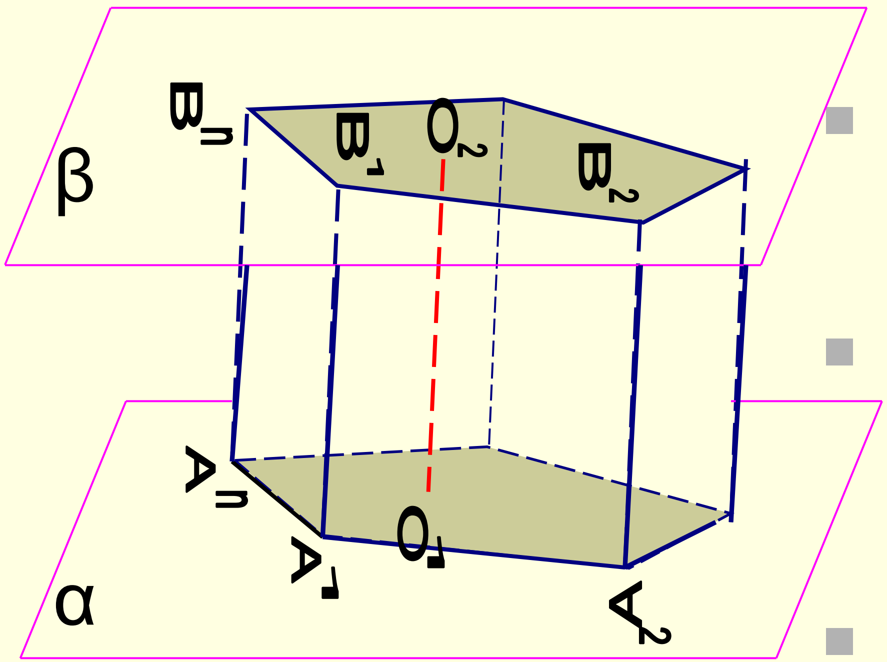
Содержание

Введение

Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны. Каждый из n четырехугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ (1) является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например в четырехугольнике $A_1A_2B_2B_1$ стороны A_1B_1 и A_2B и параллельны по условию, а стороны A_1A_2 и B_1B_2 – по свойству параллельных плоскостей, пересеченных третьей плоскостью.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется призмой.

Введение



- ***$A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_n$ – призма***
- ***Многоугольники $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ – основания призмы***
- ***Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_nA_1B_1B_n$ – боковые грани призмы***
- ***Отрезки A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n - боковые ребра призмы***
- ***Отрезок O_1O_2 - высота призмы***

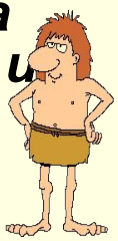
Призма в древности

Подобно тому, как треугольник в понимании Евклида не являются пустым, т. е. представляет собой часть плоскости, ограниченную тремя неконкурентными (т. е. не пересекающимися в одной точке) отрезками, так и многогранник у него не пустой, не полый, а чем-то заполненный (по-нашему - частью пространства). В античной математике, однако, понятия отвлеченного пространства еще не было. Евклид определяет призму как телесную фигуру, заключенную между двумя равными и параллельными плоскостями (основаниями) и с боковыми гранями - параллелограммами. Для того чтобы это определение было вполне корректным, следовало бы, однако, доказать, что плоскости, проходящие через пары непараллельных сторон оснований, пересекаются по параллельным прямым.

Призма в древности

Евклид употребляет термин “плоскость” как в широком смысле (рассматривая ее неограниченно продолженной во все направления), так и в смысле конечной, ограниченной ее части, в частности грани, аналогично применению им термина “прямая” (в широком смысле - бесконечная прямая и в узком - отрезок). В XVIII в. Тейлор дал такое определение призмы: это многогранник, у которого все грани, кроме двух, параллельны одной прямой.

В памятниках вавилонской и древнеегипетской архитектуры встречаются такие геометрические фигуры, как куб, параллелепипед, призма. Важнейшей задачей египетской и вавилонской геометрии было определение объема различных пространственных фигур. Эта задача отвечала необходимости строить дома, дворцы, храмы и другие сооружения.



Призма в древности

Часть геометрии, в которой изучаются свойства куба, призмы, параллелепипеда и других геометрических тел и пространственных фигур, издавна называется стереометрией; Слово это греческого происхождения (“стереос” - пространственный, “метрео” - измеряю) и встречается еще у знаменитого древнегреческого философа Аристотеля. Стереометрия возникла позже, чем планиметрия. Евклид дает следующее определение призмы: “Призма есть телесная (т.е. пространственная) фигура, заключенная между плоскостями, из которых две противоположные равны и параллельны, остальные же - параллелограммы”. Тут, как и во многих других местах, Евклид употребляет термин “плоскость” не в смысле безгранично продолженной плоскости, а в смысле ограниченной ее части, грани, подобно тому как “прямая” означает у него и отрезок прямой.

Призма в древности

Термин “призма” греческого происхождения и буквально означает “отпиленное” (тело).

Термин “параллелепипедальное тело” встречается впервые у Евклида и означает дословно “параллеле-плоскостное тело”. Греческое слово “кубос” употребляется Евклидом в том же смысле, что и наше слово “куб”.

Теоремы Евклида относятся только к сравнению объемов, так как непосредственное вычисление объемов тел. Евклид, вероятно, считал делом практических руководств по геометрии. В произведениях прикладного характера Герона Александрийского имеются правила для вычислений объема куба, призмы, параллелепипеда и других пространственных фигур.

Объемы зерновых амбаров и других сооружений в виде кубов, призм и цилиндров египтяне и вавилоняне, китайцы и индийцы вычисляли путем умножения площади основания на высоту.

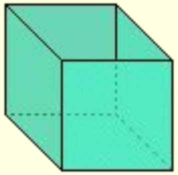
Призма в древности

Однако древнему Востоку были известны в основном только отдельные правила, найденные опытным путем, которыми пользовались для нахождения объемов для площадей фигур. В более позднее время, когда геометрия сформировалась как наука, был найден общий подход к вычислению объемов многогранников.

Среди замечательных греческих ученых V - IV вв. до н. э., которые разрабатывали теорию объемов, были Демокрит из Абдеры и Евдокс Книдский.

Евклид не применяет термина “объем”. Для него термин “куб”, например, означает и объем куба. В XI книге “Начал” изложены среди других и теоремы следующего содержания.

1. Параллелепипеды с одинаковыми высотами и равновеликими основаниями равновелики.
2. Отношение объемов двух параллелепипедов с равными высотами равно отношению площадей их оснований.
3. В равновеликих параллелепипедах площади оснований обратно пропорциональны высотам.



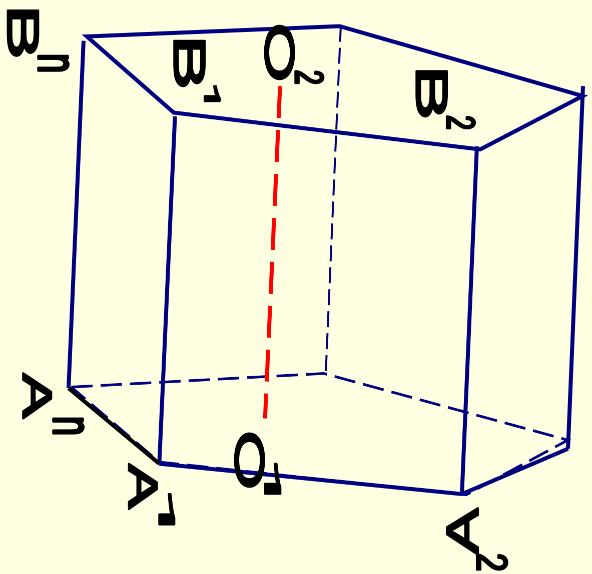
Призма в геометрии

<u>Призма</u> – многогранник, который состоит из двух плоских равных многоугольников с соответственно параллельными сторонами и отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

Многоугольники называются <u>основаниями</u> призмы, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины, – <u>боковыми рёбрами</u> призмы. Все <u>боковые грани</u> призмы – параллелограммы.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется <u>высотой</u>.

Призма в геометрии

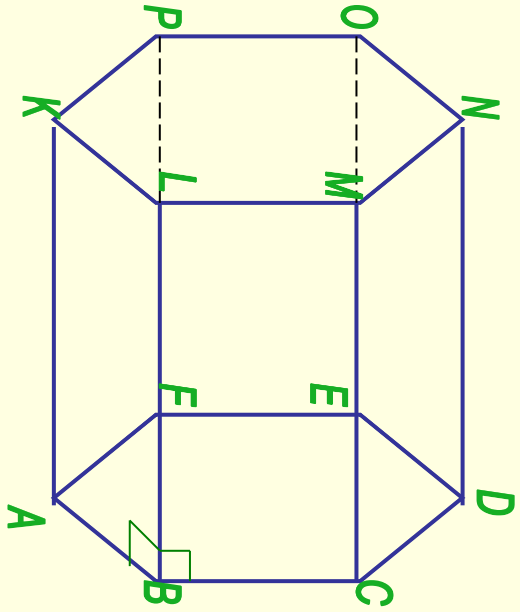


- ***$A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_n$ – призма***
- ***Многоугольники $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ – основания призмы***
- ***Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, …, $A_nA_1B_1B_n$ – боковые грани призмы***
- ***Отрезки A_1B_1 ,A_2B_2, A_nB_n- боковые ребра призмы***
  - ***Отрезок O_1O_2- высота призмы***

Призма в геометрии

<u>Прямая призма</u> **– призма, у которой боковое ребро перпендикулярно основанию.**

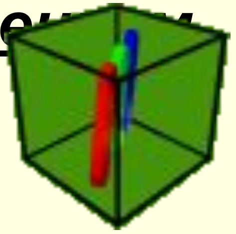
ABCDEFKLMNOP- прямая правильная призма



Призма в геометрии

Прямая призма, основанием которой служит правильный многоугольник, называется правильной призмой.

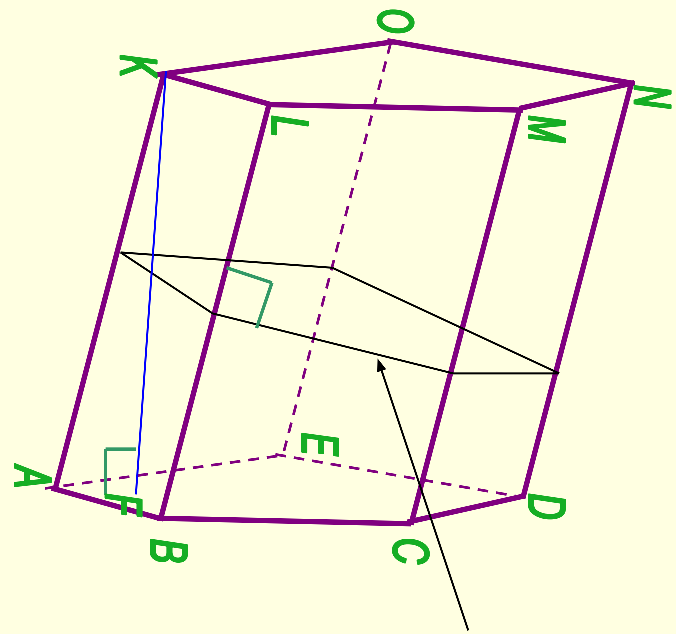
Боковое ребро прямой призмы, в том числе и правильной, есть ее высота. Отрезок, концы которого - две вершины, не принадлежащие одной грани призмы, называют ее диагональю. Сечение призмы с плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, называют диагональным сече… призмы.



Призма в геометрии

<u>***Наклонная призма-***</u> ***призма, у которой боковое ребро не перпендикулярно основанию.***

- ***ABCDEKLMNO- наклонная призма***
- ***KF- высота***

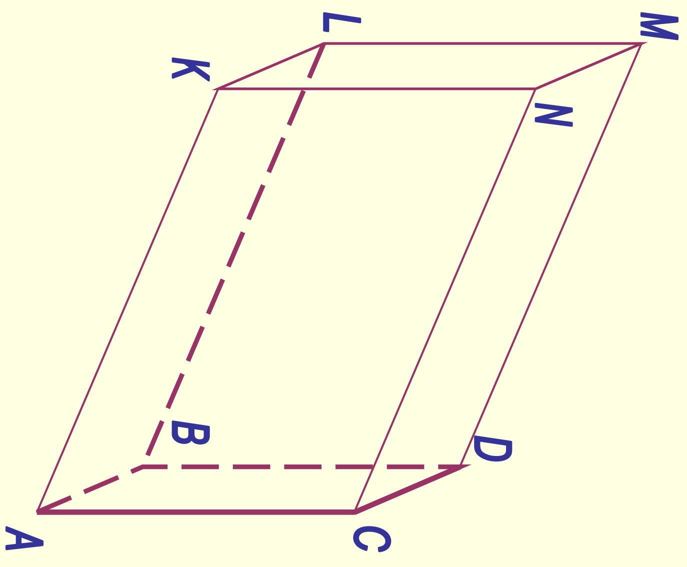


Призма в геометрии

Призма, основание которой - параллелограмм, называется <u>параллелепипедом</u>.

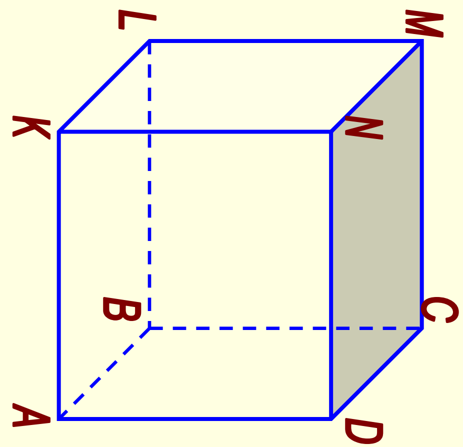
В соответствии с определением параллелепипед - это четырехугольная призма, все грани которой – параллелограммы. Параллелепипеды, как и призмы, могут быть <u>прямыми и наклонными</u>.

ABCDKLMN- параллелепипед



Призма в геометрии

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называют <u>прямоугольным параллелепипедом</u>. У прямоугольного параллелепипеда все грани - прямоугольники. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, имеющих общий конец, называют его измерениями. <u>Куб</u> - прямоугольный параллелепипед с равными измерениями. Все



ABCDKLMN- куб

Призма в геометрии

- ***Призма:***

$S_{бок}=P_{\perp}l$

$S_{полн}=2S_{о}+S_{бок}$

$V=S_{о}l$

Прямая призма:
$S_{бок}=P_{о}l\ (l=h)$

- ***Параллелепипед:***

$S_{полн}=2(ab+bc+ac)$

$V=abc$

$d^2=a^2+b^2+c^2$

- ***Куб:***

$S_{полн}=6a^2$

$V=a^3$

$d^2=3a^2$

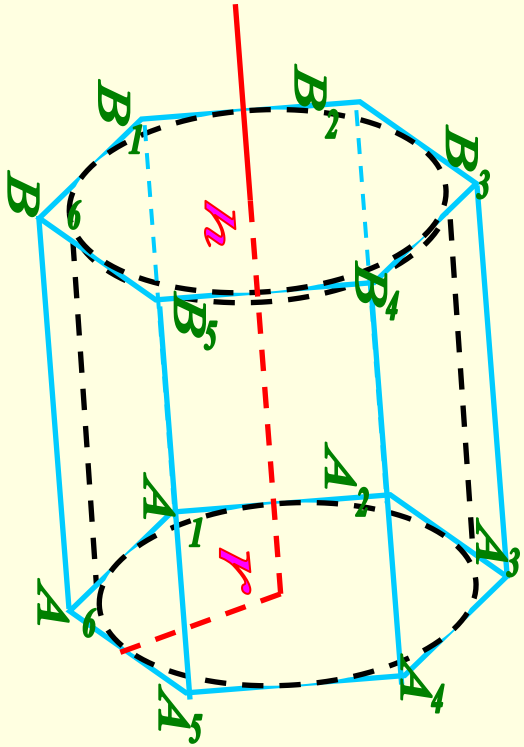
Обозначения:

- ***V- объем;***
- ***$S_{полн}$- площадь полной поверхности;***
- ***$S_{бок}$- площадь боковой поверхности;***
- ***$S_{о}$- площадь основания;***
- ***$P_{о}$- периметр основания;***
- ***P - периметр перпендикулярного сечения;***
- ***l- длина ребра;***
- ***h- высота.***

Призма в геометрии

Призма называется описанной около цилиндра, если ее основания описаны около основания цилиндра.

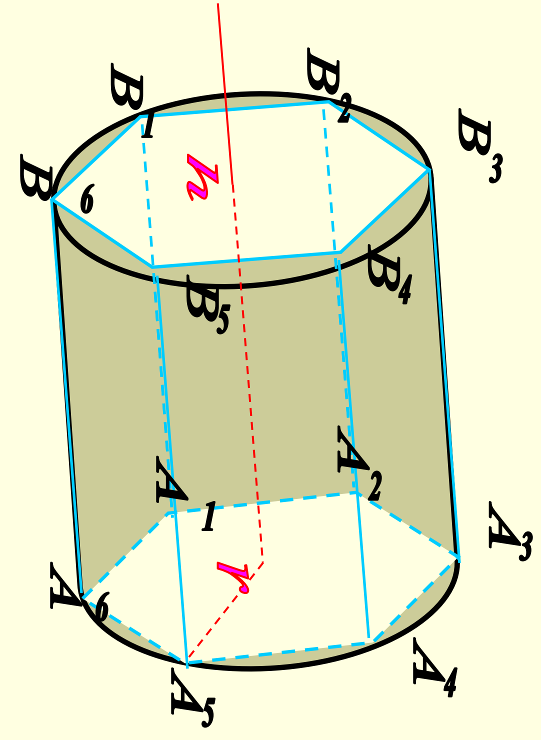
$A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3B_4B_5B_6$- призма описанная около цилиндра



Призма в геометрии

Призма называется <u>вписанной в цилиндр</u>, если ее основания вписаны в основания цилиндра.

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3B_4B_5B_6$- призма вписанная в цилиндр



Теоремы

- ***Объем прямой призмы;***
- ***Объем наклонной призмы;***
- ***Площадь боковой поверхности призмы;***
- ***Площадь боковой поверхности прямой призмы;***

Теоремы

I. **Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту.**

Доказательство

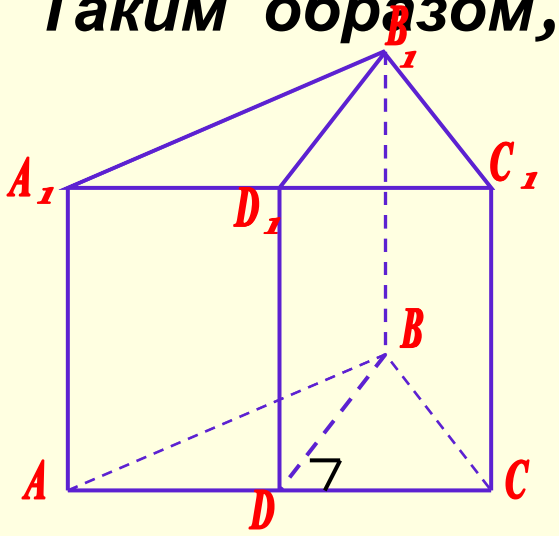
Сначала докажем теорему для треугольников прямой призмы, а затем для произвольной призмы.

1. **Рассмотрим прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с объемом V и высотой h. Проведем такую высоту треугольника ABC(отрезок BD), которая разделяет этот треугольник на два треугольника (по крайней мере, одна высота треугольника этому условию удовлетворяет). Плоскость DD_1D разделяет данную призму на две призмы,**

Теоремы

основаниями которых являются прямоугольные треугольники ABD и BDC. Поэтому объемы V_1 и V_2 этих призм соответственно равны $S_{ABD} \bullet h$ и $S_{BDC} \bullet h$. По свойству 2 объемов $V=V_1+V_2$, то есть $V=S_{ABD} \bullet h+S_{BDC} \bullet h=(S_{ABD}+S_{BDC}) \bullet h$.

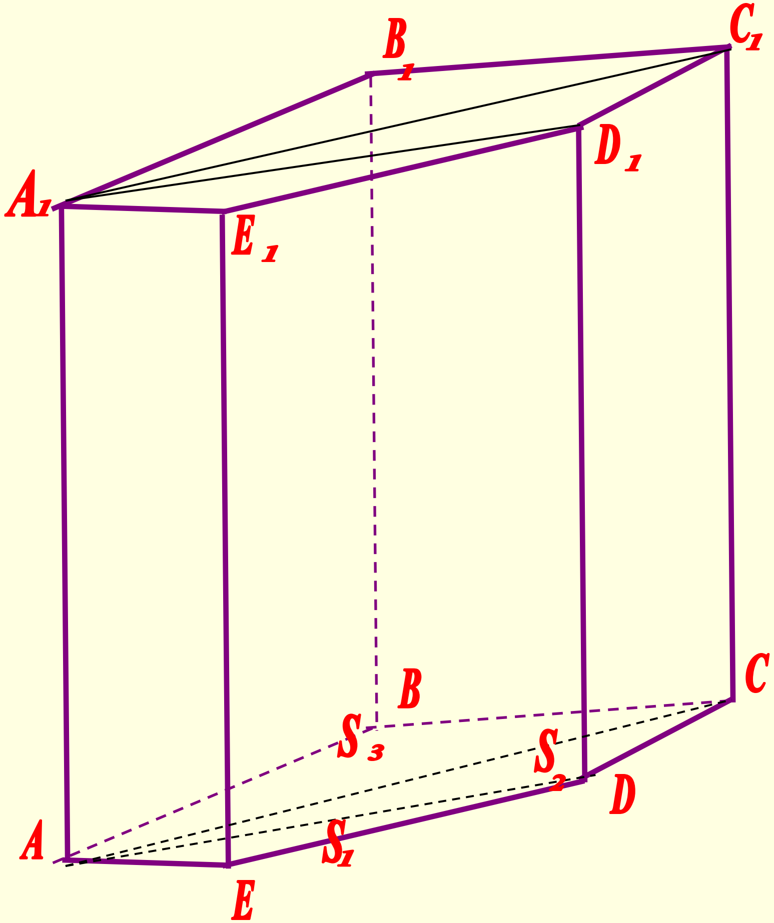
Таким образом, $V=S_{ABC} \bullet h$ (1)



Теоремы

2. ***Докажем теорему для произвольной прямой призмы с высотой h и площадью основания S. Такую призму можно разбить на прямые треугольные призмы с высотой h. Например, на рисунке изображена пятиугольная призма, которая разбита на три прямые треугольные призмы. Выразим объем каждой треугольной призмы по формуле (1) и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель h, получим в скобках сумму площадей основания треугольных призм, то есть площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объем исходной призмы равен произведению $S \cdot h$. Теорема доказана.***

Теоремы



Теоремы

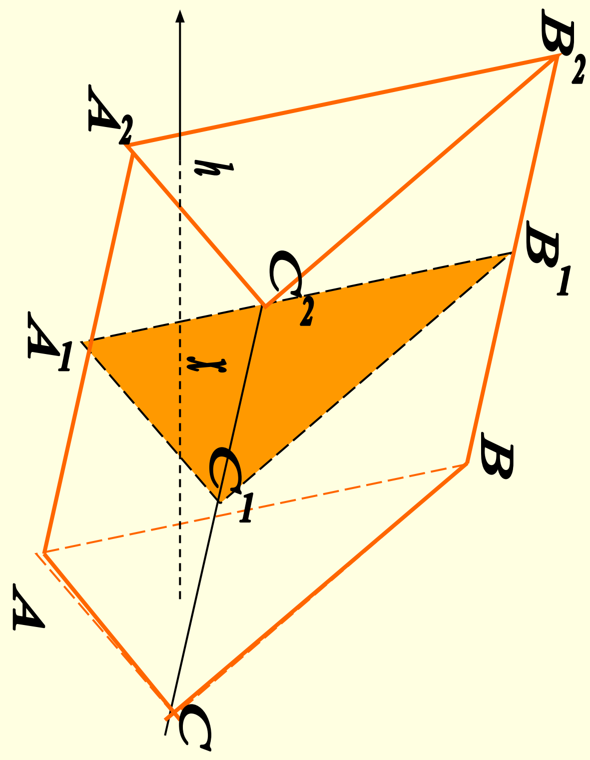
II. **Объем наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту.**

Доказательство

Сначала докажем теорему для треугольной призмы, а затем- для произвольной призмы.

1. **Рассмотрим треугольную призму с объемом V, площадью основания S и высотой h. Отметим точку O на одном из оснований призмы и направим ось Ox перпендикулярно к основаниям. Рассмотрим сечение призмы плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и, значит, параллельной плоскости основания. Обозначим буквой x абсциссу точки пересечения этой плоскости с осью Ox,**

Теоремы



Теоремы

Докажем, что площадь $S(x)$ равна площади S основания призмы. Для этого заметим, что треугольники ABC(основания призмы) и $A_1B_1C_1$ (сечение призмы рассматриваемой плоскостью) равны. В самом деле, четырехугольник AA_1B_1B– параллелограмм (отрезки AA_1 и B_1B равны и параллельны), поэтому $A_1B_1=AB$. Аналогично доказывается, что $B1C1=BC$ и $A_1C_1=AC$. Итак треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны по трем сторонам. Следовательно, $S(x)=S$. Применяя теперь основную формулу для вычисления объемов тел при $a=0$ и $b=h$, получаем

$$V=\int S(x)dx=\int Sdx=S\int dx=Sx|=Sh$$

Теоремы

2. ***Докажем теорему для произвольной прямой призмы с высотой h и площадью основания S. Такую призму можно разбить на прямые треугольные призмы с высотой h. Выразим объем каждой треугольной призмы по доказанной нами формуле и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель h, получим в скобках сумму площадей основания треугольных призм, то есть площадь S основания исходной призмы. Таким образом, объем исходной призмы равен произведению S•h. Теорема доказана.***

Теоремы

III. **Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра ее перпендикулярного сечения и длины бокового ребра.**

Дано: **AC_1 - произвольная n-угольная призма, a^AA_1, $A_2B_2C_2D_2$ - перпендикулярное сечение (сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру), l - длина бокового ребра.**

Доказать: **$S_{бок} = P\,l$, где P - периметр перпендикулярного сечения.**

Теоремы

Доказательство.

$$S_{бок}=\underbrace{S_{AA_1B_1B}+S_{BB_1C_1C}+S_{CC_1D_1D}+\ldots}_{n\ \text{слагаемых}}$$

Каждая боковая грань призмы - параллелограмм, основание которого - боковое ребро призмы, а высота - сторона перпендикулярного сечения.

Поэтому

$$S_{бок}=l\,A_2B_2+l\,B_2C_2+l\,C_2D_2+\ldots=(A_2B_2+B_2C_2+C_2D_2+\ldots)l=P\,l.$$

$$S_{бок}=P\,l.$$

Теорема доказана.

Теоремы

IV. **Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.**

Доказательство

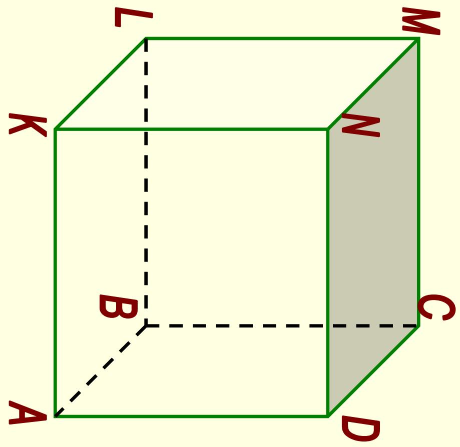
Боковые грани прямой призмы- прямоугольники, основания которых- стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, то есть равна сумме произведений сторон основания на высоту h. Вынося множитель h за скобки получим в скобках сумму сторон основания призмы, то есть его периметр P. Итак, $S_{бок}=Ph$. Теорема доказана.

Задачи

- ***Задача №1***
- ***Задача №2***
- ***Задача №3***
- ***Задача №4***

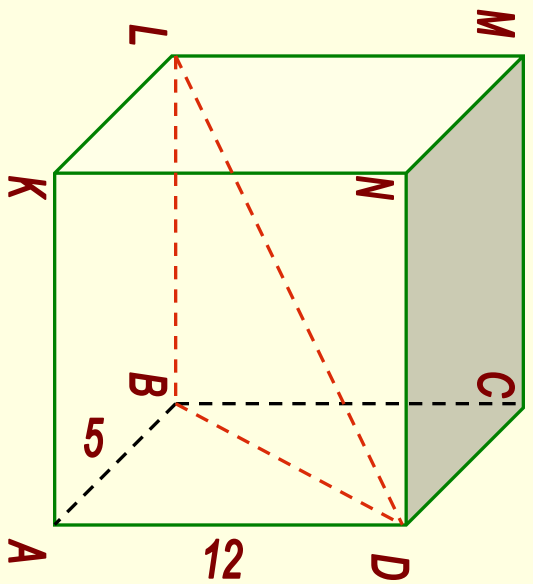
Задача №1

В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12см и 5см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите боковое ребро параллелепипеда.



Задача №1

Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

Рассмотрим прямоугольный $\triangle ABD$

По теореме Пифагора:

$$BD^2=AD^2+AB^2$$

$$BD=\sqrt{(AD^2+AB^2)}=13$$

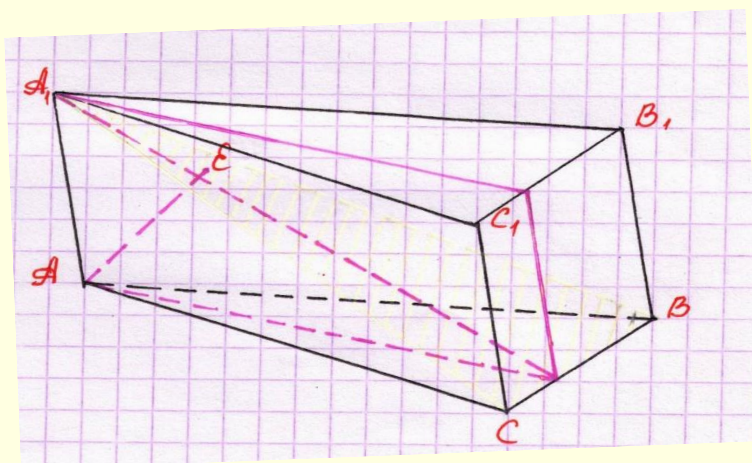
Рассмотрим $\triangle BLD$- прямоугольный, равнобедренный, значит

$$BL=BD=13см$$

Ответ: $BL=13см$

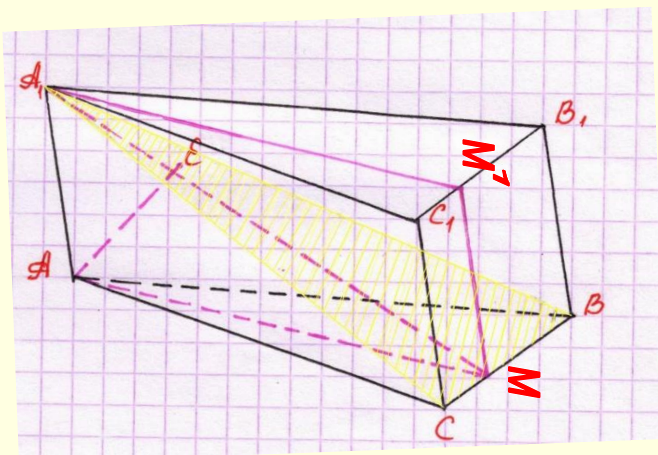
Задача №2

Высота прямой треугольной призмы $ABCA_1B_2C_3$ равна 10. Расстояние от вершины A до плоскости A_1BC равно 6. Найдите площадь сечения призмы плоскостью A_1BC, если BC равен 16.



Задача №2

- Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

Сечение A_1BC разбивает призму $ABCA_1B_1C_1$ на две пирамиды AA_1BC и$A_1BB_1C_1C$. Пусть V– объем призмы, V_1- объем пирамиды AA_1BC_1, V_2 - объем пирамиды $A_1BB_1C_1C$. По свойству $V=V_1+V_2$ (1)

Проведем AM перпендикулярную BC, тогда A_1M перпендикулярен BC. Обозначим $AM=h$, $A_1M=\sqrt{100+h^2}$. Проведем MM_1 AA_1, тогда AM перпендикулярен MM_1, значит AM перпендикулярен BB_1C_1, A_1M_1 AM $\rightarrow$ A_1M_1 перпендикулярен BB_1C, $A_1M_1=AM=h$

Задача №2

Найдем V, V_1, V_2.

$V=S_{ABC}\bullet AA_1=\frac{1}{2}\bullet 16\bullet h\bullet 10=80h$

$V_1=\frac{1}{3}\bullet S_{A1BC}\bullet AE= =\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}\bullet 16\bullet(\sqrt{100+h^2})\bullet 6=16\bullet(\sqrt{100+h^2})$

$V_2=\frac{1}{3}\bullet S_{BB1C1C}\bullet A_1M_1=\frac{2}{3}\bullet 16\bullet h\bullet 10=160/3h$

Найденные значения подставим в формулу(1):

$80h=16\bullet(\sqrt{100+h^2})+160/3h$

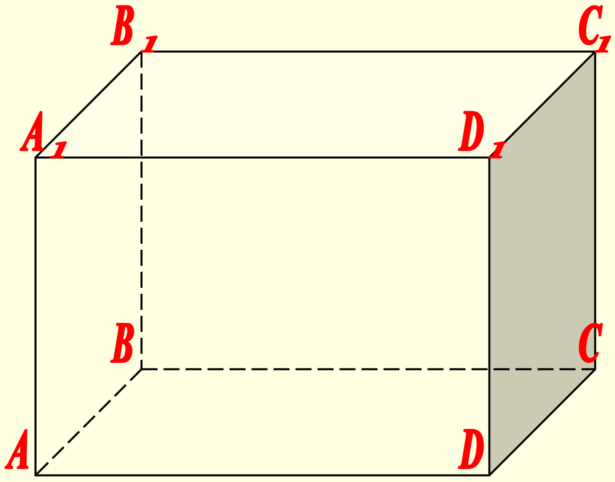
$h=7{,}5$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\bullet BC\bullet A_1M=\frac{1}{2}\bullet 16\bullet(\sqrt{100+56{,}25})=100$

Ответ: $S=100$

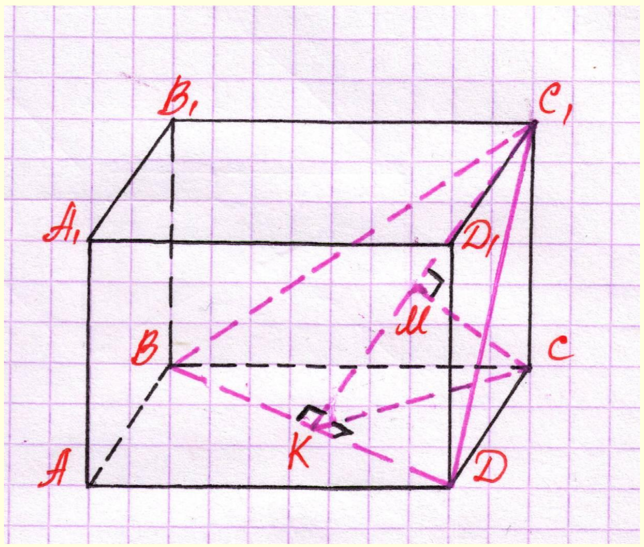
Задача №3

Дана прямая четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Расстояние от точек C до плоскости BC_1D равно $3\sqrt{2}$. Плоскость BC_1D наклонена к плоскости основания под углом $30°$. Найдите сторону основания призмы.



Задача №3

Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

Пусть CM- перпендикуляр, проведенный из точки C к плоскости BC_1D. Так как BC=CD и $BC_1=C_1D$, то высота C_1K (она же медиана) ΔBC_1D проходит через точку M.

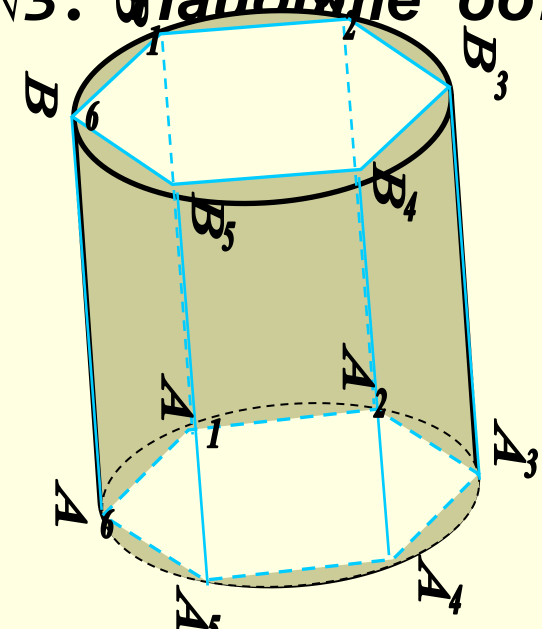
В ΔKMC: $KC=CM/\sin\angle MKC=3\sqrt{2}/\sin 30^\circ=6\sqrt{2}$, так как ABCD– квадрат, то KC=KD, и из ΔKCD имеем $CD^2=(6\sqrt{2})^2+(6\sqrt{2})^2=144$,

CD=12

Ответ: CD=12

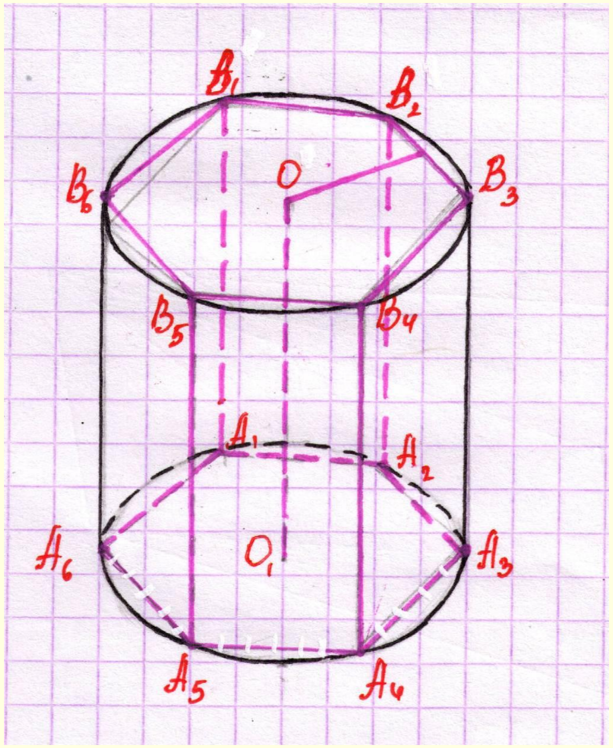
Задача №4

Около правильной шестиугольной призмы описан цилиндр. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16П√3. Расстояние между осью цилиндра и диагональю боковой грани призмы равно 2√3. Найдите объем призмы.



Задача №4

Рисунок с дополнительными построениями



Решение:

По формуле $S_{б\ ц}=2ПRH=16П\sqrt{3}$. Отсюда $RH=8\sqrt{3}$. Расстояние $d=2\sqrt{3}$ есть расстояние между осью цилиндра и плоскостью боковой грани призмы (так как $OO_1 \parallel A_2A_3B_3B_2$). А это есть радиус вписанного в шестиугольник круга:

$$d=r=R\sqrt{3}/2=2\sqrt{3}$$

Отсюда $R=4$

Сторона основания правильной шестиугольной призмы $A_2A_3=R=4$. Высоту призмы H найдем из равенства $RH=8\sqrt{3}$; $H=2\sqrt{3}$

$S_{осн}=6S_{\triangle OA_2A_3}=6\cdot(4^2\cdot\sqrt{3}/4)=24\sqrt{3}$

$V_{пр}=S_{осн}\cdot H=24\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sqrt{3}=144$

Ответ: $V_{пр}=144$

Используемые источники

- Л.С. Атанасян. Геометрия. Учебное пособие для старших классов. М.: Просвещение, 2006.
- Лысенко Ф.Ф. Математика ЕГЭ 2008. Вступительные испытания. Легион, 2007.
- Интернет