

Тема: “Призма и ее свойства”



Автор: Тихонов Никита Евгеньевич
Руководитель: Кузьмина В. В.

2007 г.

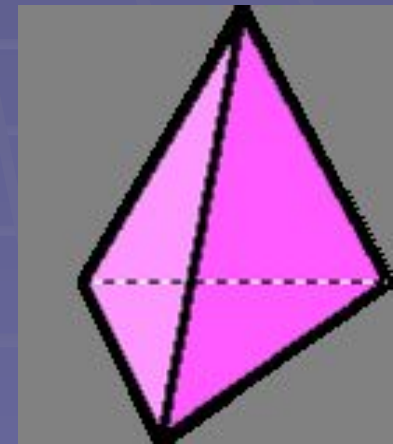
Содержание

- Историческая справка
- Призма и ее свойства
- Решение задач
- Задачи для самостоятельной работы
- Литература

Историческая справка

Еще в древности существовали два пути определения геометрических понятий.

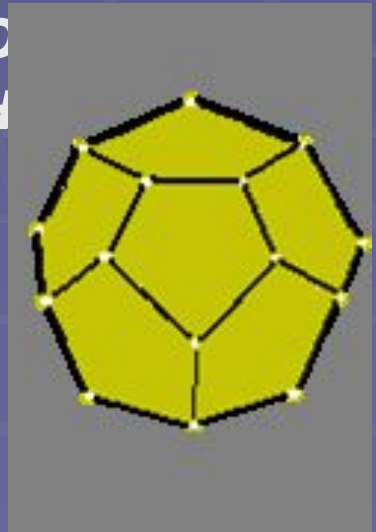
Первый вел от фигур высшего порядка к фигурам низшего. Такой точки зрения придерживался, в частности, Евклид, определяющий поверхность как *границу тела*, линию – как *границу поверхности*, концы же линии – как *точки*.



Историческая справка

Второй путь ведет, наоборот, от фигур низшего измерения к фигурам высшего: движением точки образуется *линия*, аналогично из линий составляется поверхность и т. д.

Одним из первых, который соединил обе эти точки зрения, был Герон Александрийский, писавший, что *тело ограничивается поверхностью и вместе с этим может быть рассмотрено как образованное движением поверхности.*



Историческая справка

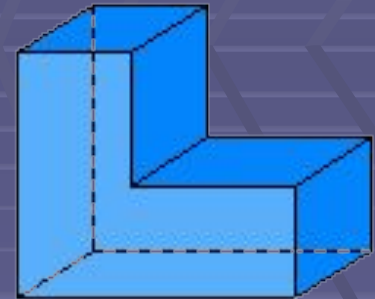


рис. 3

В появившихся позже на протяжении веков учебниках геометрии принималась за основу то одна, то другая, а иногда и обе вместе точки зрения.

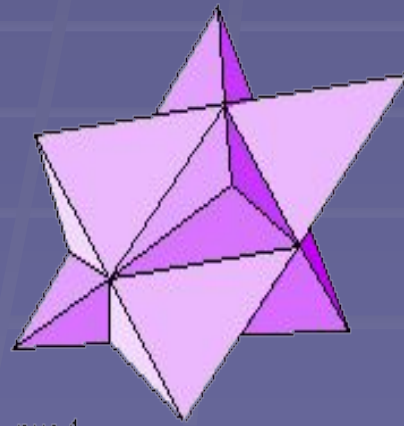


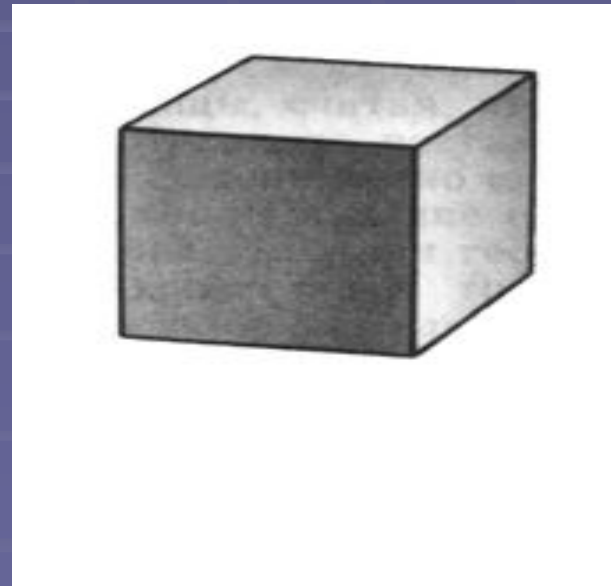
рис. 4

Историческая справка

Евклид употребляет термин «*плоскость*» как в широком смысле (Рассматривая ее неограниченно продолженной во все направления), так и в смысле конечной, ограниченной ее части, в частности грани, аналогично применению им термина «*прямая*» (в широком смысле - бесконечная прямая и в узком – отрезок).

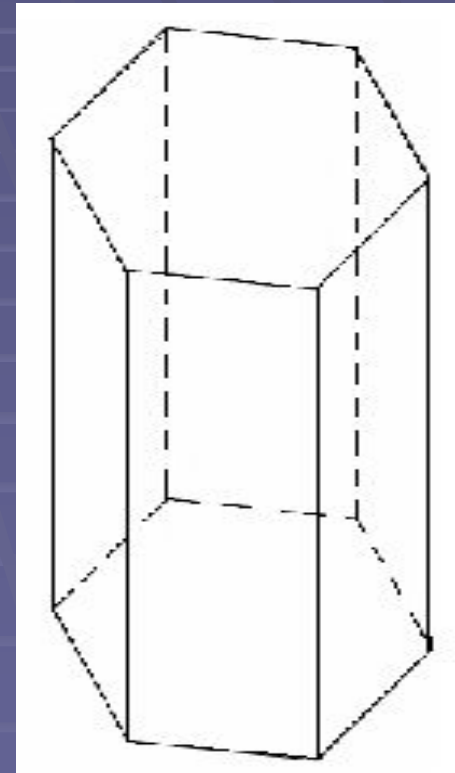
Историческая справка

В XVIII в. Тейлор дал такое определение призмы: это многогранник, у которого все грани, кроме двух, параллельны одной прямой.

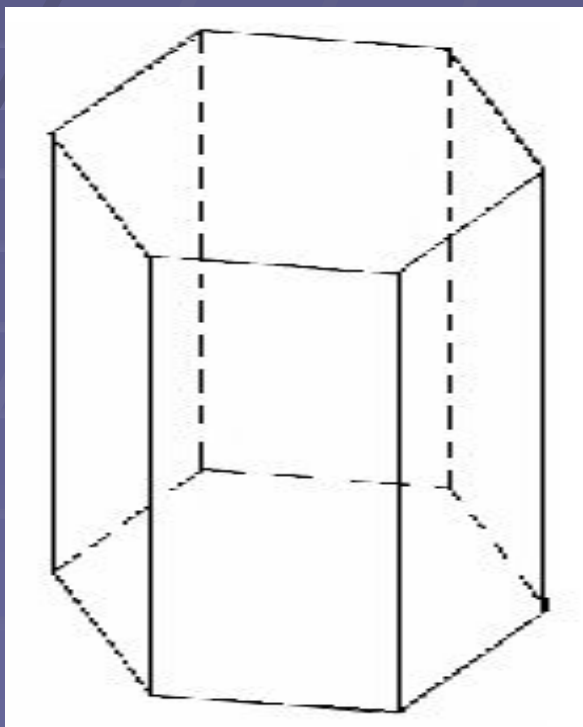
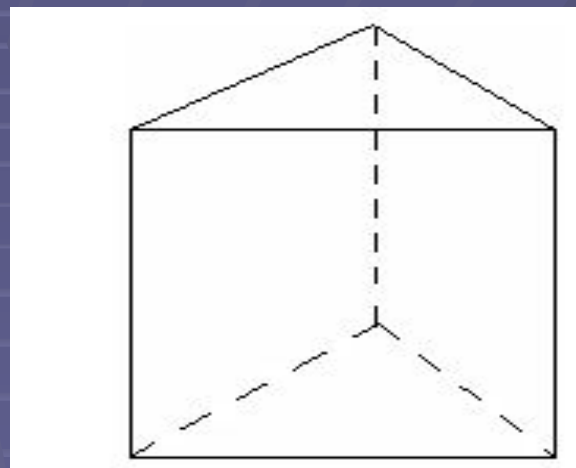


Историческая справка

В настоящее время геометрия тесно переплетается со многими другими разделами математики. Одним из источников развития и образования новых понятий в геометрии, как и в других областях математики, являются современные задачи естествознания, физики и техники.



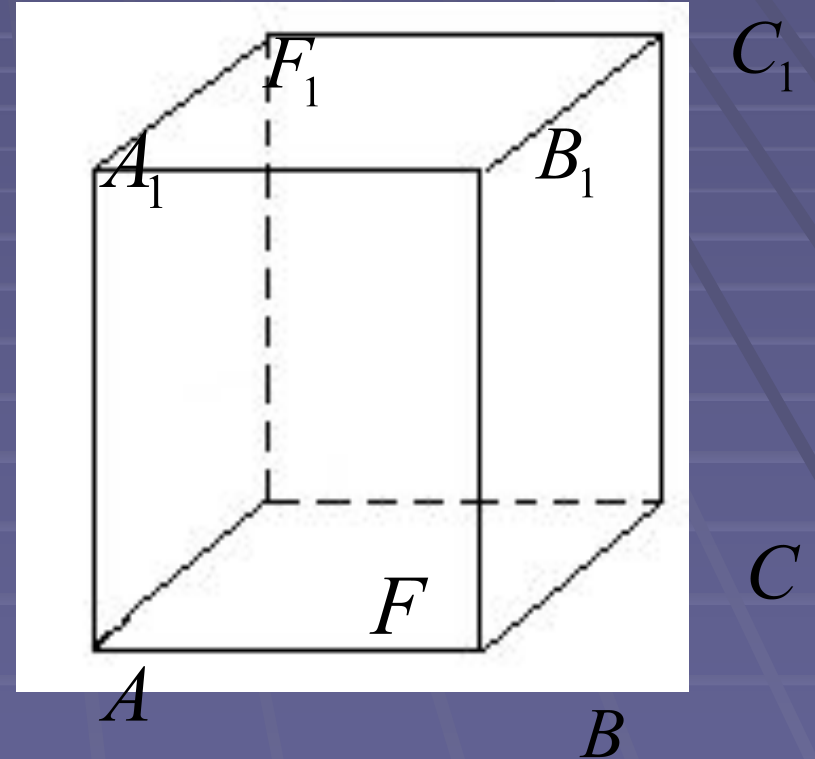
Призма



Термин "призма"
греческого
происхождения и
буквально означает
"отпиленное"

Призма

- Призма – это тело, ограниченное многогранной поверхностью, две грани которой n – угольники, а остальные n – параллелограммы.



Призма

Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2\dots A_n$

и $B_1B_2\dots B_n$,

расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки

A_1B_1 , A_2B_2 , ..., A_nB_n соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны (рис. 1).

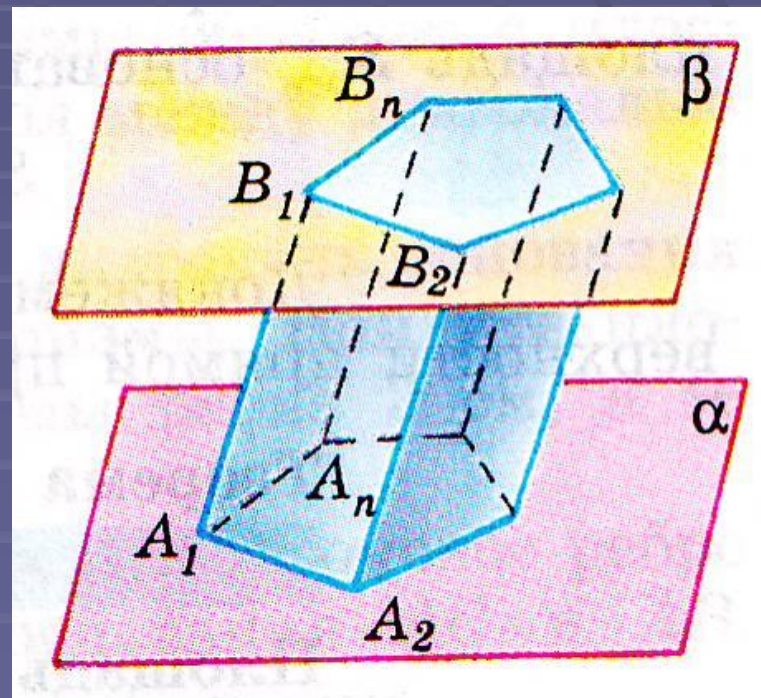


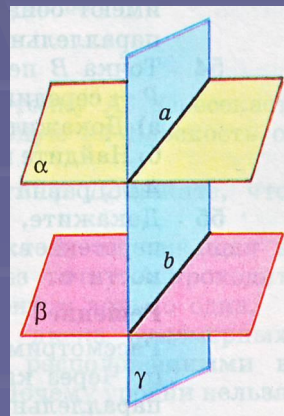
рис.1

ПРИЗМА

Каждый из n четырехугольников

$$A_1 A_2 B_2 B_1, A_2 A_3 B_3 B_2, \dots, A_n A_1 B_1 B_n$$

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырехугольнике $A_1 A_2 B_2 B_1$ стороны $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$ параллельны по условию, а стороны $B_1 B_2$ и $A_1 A_2$ - по свойству параллельных плоскостей, пересеченных третьей плоскостью (рис. 2).

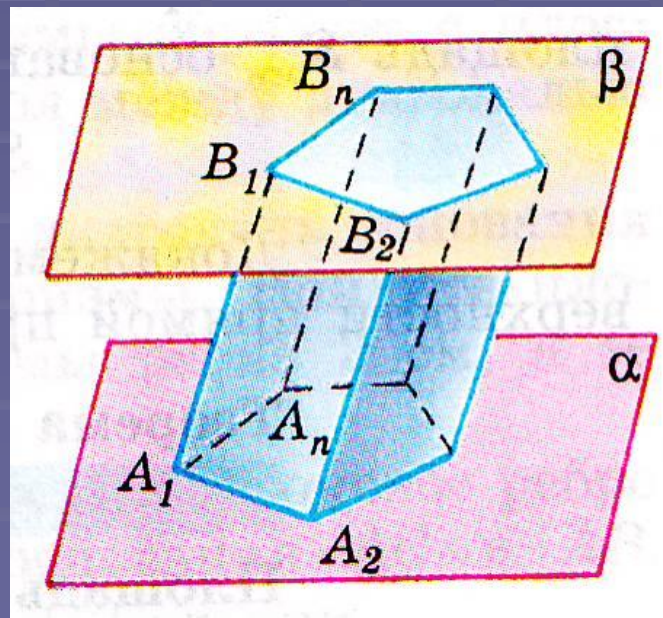


(рис. 2)

Призма

Многоугольники $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ называются основаниями, а параллелограммы – боковыми гранями. Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ называются боковыми ребрами призмы.

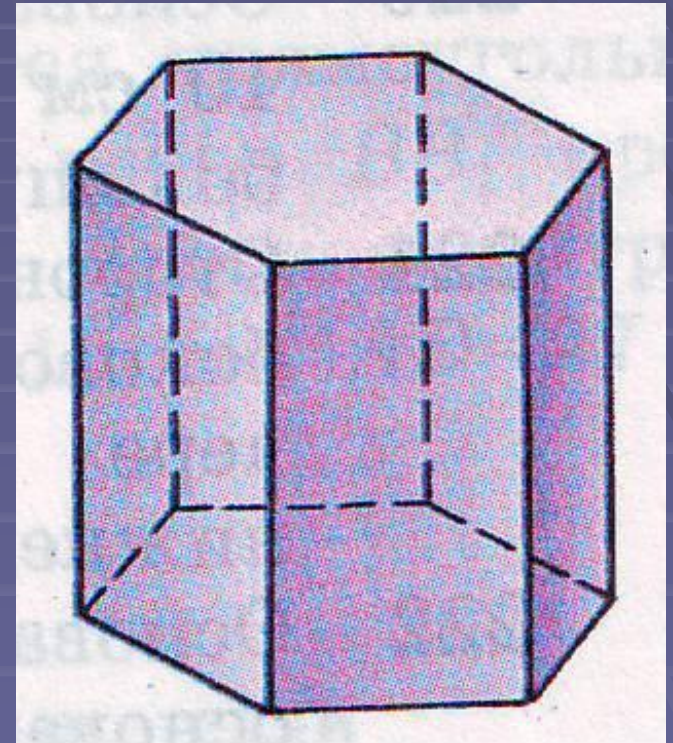
Призму с основаниями $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ называют n -угольной призмой.



(рис. 3)

Определение призмы

Призма называется правильной, если ее основания – правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани – равные прямоугольники. На рисунке 4 изображена правильная шестиугольная призма.



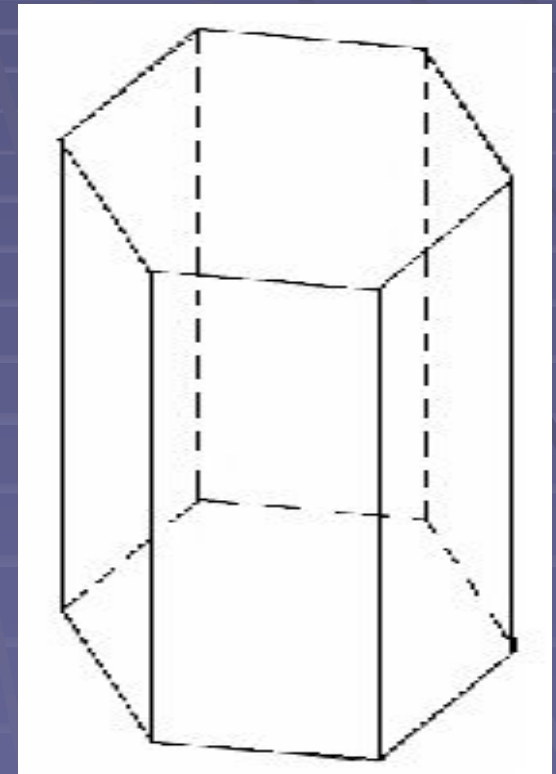
(рис. 4)

Призма

Поверхность призмы, таким образом, состоит из двух равных многоугольников (оснований) и параллелограммов (боковых граней). Различают призмы треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т.д., в зависимости от числа вершин основания.

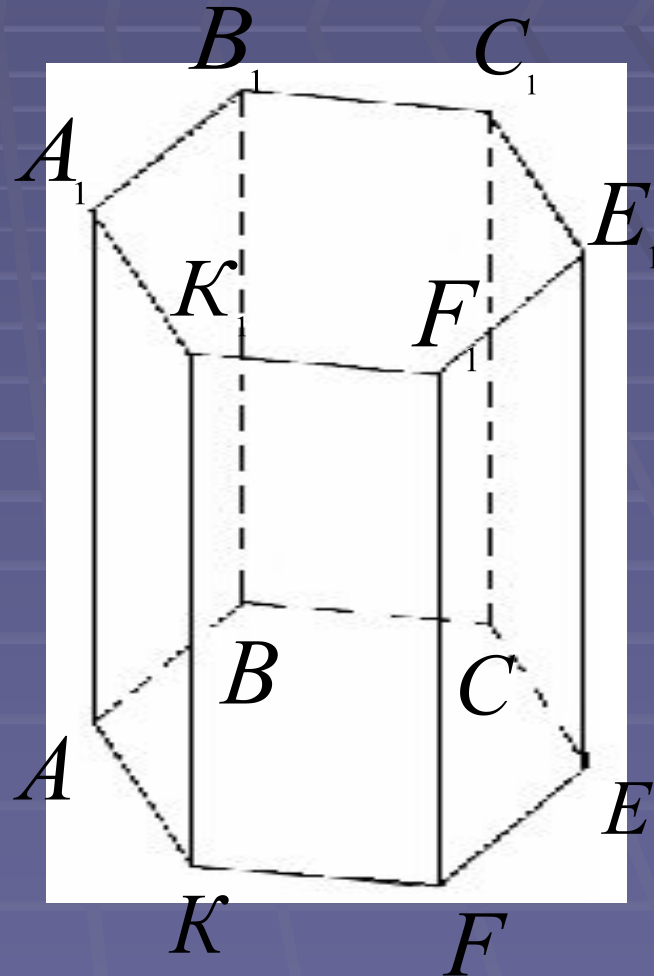
Площадь поверхности призмы

Поверхность многогранника состоит из конечного числа многоугольников. Площадь поверхности многогранника есть сумма площадей всех его граней. Площадь поверхности призм (S_{np}) равна сумме площадей ее боковых граней (площади боковой поверхности) ($S_{бок}$) и площадей двух оснований ($2S_{осн}$) - равных многоугольников:

$$S_{np} = S_{бок} + 2S_{осн}$$


Площадь поверхности призмы

- Теорема. Площадь поверхности призмы равна удвоенной площади основания, сложенной с произведением длины бокового ребра на периметр перпендикулярного сечения этой призмы.



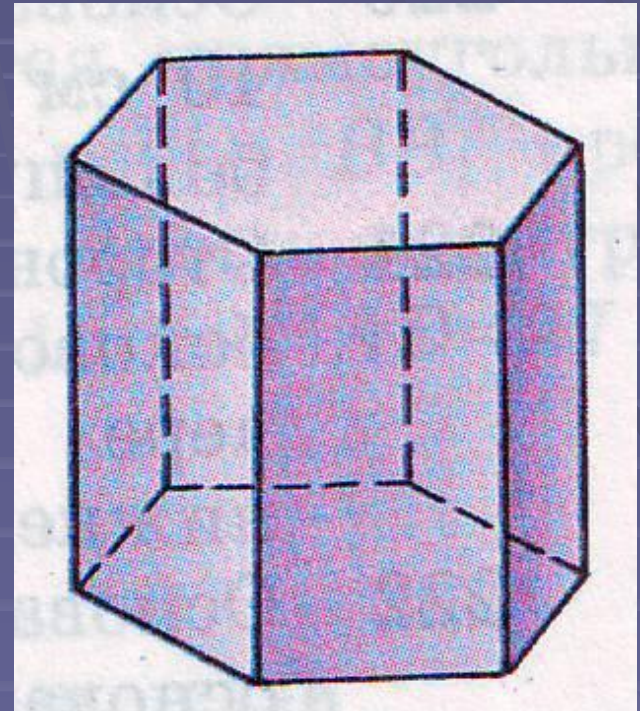
Доказательство

Боковые грани прямой призмы - прямоугольники, основания которых - стороны призмы, а высоты равны высоте h призмы.

Площадь боковой поверхности призмы равна сумме произведений сторон основания на высоту h . Вынося множитель h за скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т.е. его периметр P .

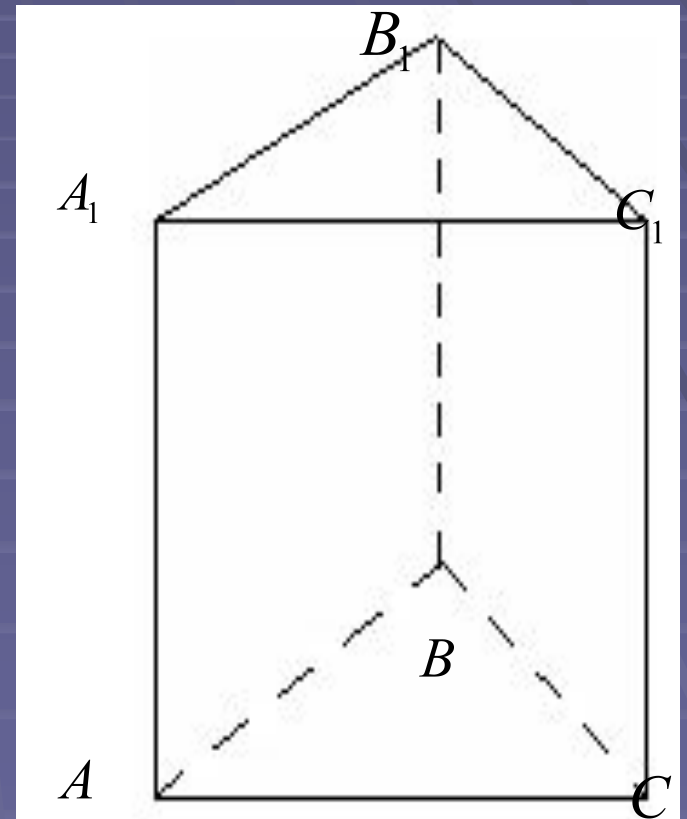
Итак, $S_{бок} = Ph$.

Теорема доказана.



Задача на нахождение $S_{\text{полн}}$ призмы.

- Вычислить площадь полной поверхности, если высота равна 12см, сторон основания равна 7см.
- Дано: $ABCA_1B_1C_1$ - правильная треугольная призма; высота; $H=12\text{см}$;
- $AC=7\text{см}$
- Найти: $S_{\text{полн.}}$



Решение:

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{ос}} + S_{\text{бок}} \quad S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} H$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad S = \frac{1 \sqrt{3}}{4 \cdot 4} = 5,9 \quad (\text{см}^2)$$

$$S_{\text{бок}} = 168 \text{ (см}^2\text{)} \quad S_{\text{полн}} = 11,9 + 168 = 179,9 \text{ (см}^2\text{)}$$

М

Ответ: $S_{\text{полн}} = 11,9 + 168 = 179,9 \text{ (см}^2\text{)}$

Решение задач

Дано: $ABC A_1 B_1 C_1$ правильная
призма, $AA_1 = 8$ см,
 $AB = 6$ см

Найти: $S_{A_1 B_1 C}$ — ?

Решение: 1) Т.к. призма

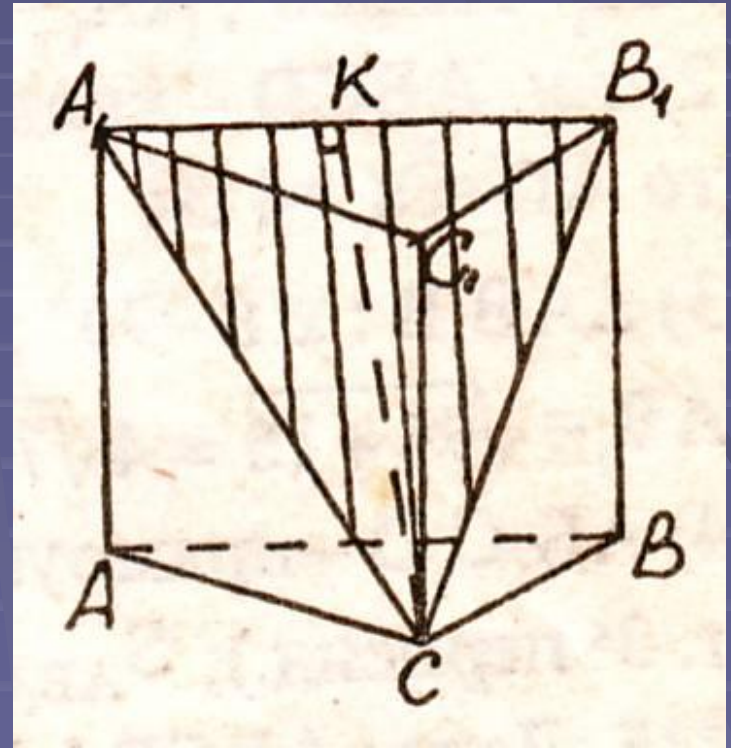
правильная, то $A_1 C = B_1 C$

$$A_1 C = \sqrt{A_1 A^2 + AC^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ см}$$

$$2) S_{A_1 B_1 C} = \frac{1}{2} A_1 B_1 \cdot CK$$

$$CK = \sqrt{A_1 C^2 - A_1 K^2} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \text{ см} \quad (\text{рис. 5})$$

$$\text{Отсюда: } S_{A_1 B_1 C} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{21} \text{ см}^2$$



Решение задач

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма

$\triangle ABC$ – правильный

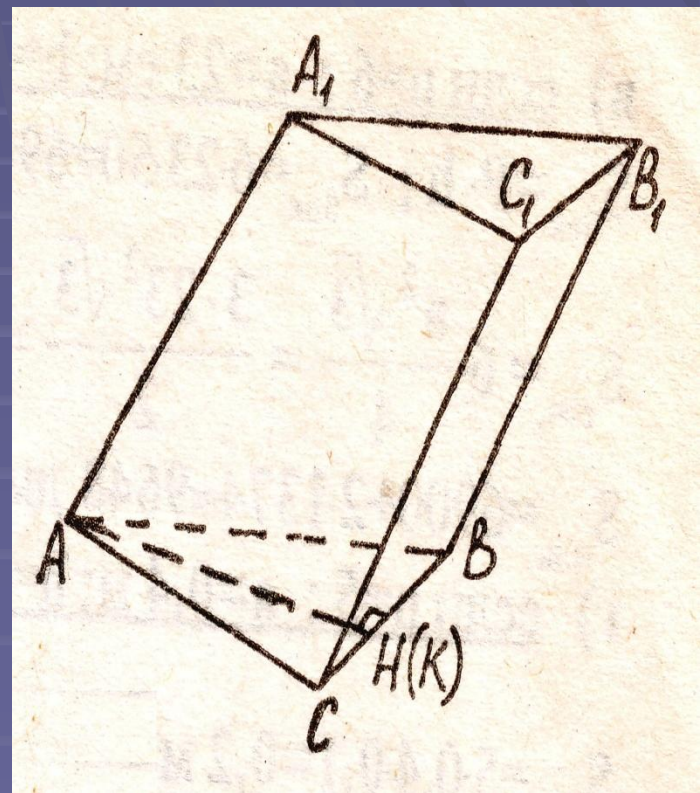
Доказать: а) $BC \perp AA_1$ CC_1B_1
 – прямоугольник B

Доказательство:

1) Т.к. $\angle A_1AA = \angle A_1AB$ –
 биссектриса $\angle CAB$ в

$\triangle ABC$ – равносторонний, значит по
 свойству биссектрисы $AA_1 \perp BC$

$AA_1 \perp BC$ H
 $AA_1 \perp C$
 B



(рис. 6)

Решение задач

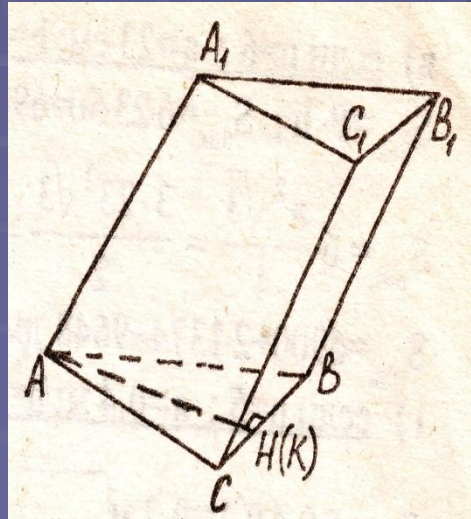
$A_1 | C_1 |$ (в определение призмы)

$A | C | B$

$A_1 \perp C \rightarrow C_1 \perp CB \quad B_1 \perp C_1,$

$A \quad B \quad C \quad B \quad B$

значит $C_1 B B_1$ - прямоугольник
 C



Задачи для самостоятельной работы

Докажите, что:

- а) у прямой призмы все боковые грани – прямоугольники;
- б) у правильной призмы все боковые грани – равные прямоугольники.

Сторона правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро равно 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через сторону верхнего основания и противолежащую вершину нижнего основания.

Задачи для самостоятельной работы

Основаниями прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 25 см и 9 см и высотой 8 см. Найдите двухгранные углы при боковых ребрах призмы.

Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол 30° . Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

Список используемой лит-ры

- Дадаян А. А. Математика: Учебник - М.: ИНФРА - М, 2006
- Геометрия 10 - 11; Учеб. Для общеобразовательных учреждений под ред. А. Н. Тихонова - М.: Просвещение, 2001
- **Internet ресурсы:**
- www.5ballov.ru
- www.4students.ru