Производная

Определение. Правила и формулы дифференцирования. 10 класс.

Помни слова великого ученого:
«Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит.»
М.В.Ломоносов.

Историческая страничка

1. Выражение вида Δf появилось уже в конце 17 в. и означает «приращение».
2. Термин производная ввел в 1797г. Ж. Лагранж

1736-1813гг.

1643-1727гг.

3.И. Ньютон называл производную функцию флюксией , а саму функцию – флюентой.

4.Раздел математики, в котором изучаются производные и их применения к исследованию функций , называется дифференциальным исчислением.

5.Дифференциальное исчисление создано Ньютоном и Лейбницем в конце 17 столетия.

1646-1716гг.

Приращение аргумента, приращение функции.

Пусть x – произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0. Разность x-x_0 называется приращением независимой переменной

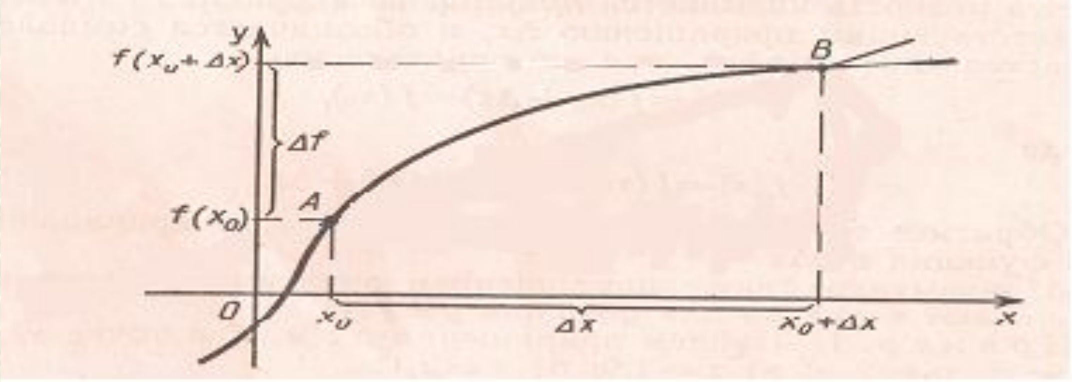
(или приращением аргумента) в точке x_0 и обозначается Δx.

$\Delta x = x - x_0$ – *приращение независимой переменной*

Приращением функции f в точке x_0 называется разность между значениями функции в произвольной точке и значением функции в фиксированной точке.

$f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ – *приращение функции f*

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$



Определение производной.

Отношение приращения функции к приращению аргумента называется разностным отношением $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Производной функции f в точке x_0 называется число к которому стремиться разностное отношение: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Задача. Найти производную функции $f(x)=x^2$, используя определение.

Решение. 1) $f(x_0)=x_0^2$ - значение функции в фиксированной точке.

$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2$-значение функции в произвольной точке.

2) Найдём приращение функции:

$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2 =x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-x_0^2=2x_0\Delta x+\Delta x^2$.

3)Найдем разностное отношение: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

4)При $\Delta x \to 0$ $2x_0+\Delta x \to 2x_0$, значит $(x_0^2)'=2x_0$.

5)Для любого x: $(x^2)'=2x$.

Основные формулы дифференцирования.

1) $(x^n)'=nx^{n-1}$ – производная степенной функции

Частные случаи: $a)\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; b)\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; c)(x)' = 1$

2)$(kx+b)'=k$-производная линейной функции

3)$c'=0$-производная постоянной

4)Производные тригонометрических функций:

a)$(\sin x)'=\cos x$ b)$(\cos x)'=-\sin x$

c)$(\operatorname{tg} x)'=1/\cos^2 x$ d)$(\operatorname{ctg} x)'=-1/\sin^2 x$

Основные правила дифференцирования

Если функции **u** и **v** дифференцируемы в точке $x_{0,}$ то справедливы следующие правила:

1)(u+v)'=u'+v'

2)(uv)'=u'v+uv'

3)(cu)'=cu'

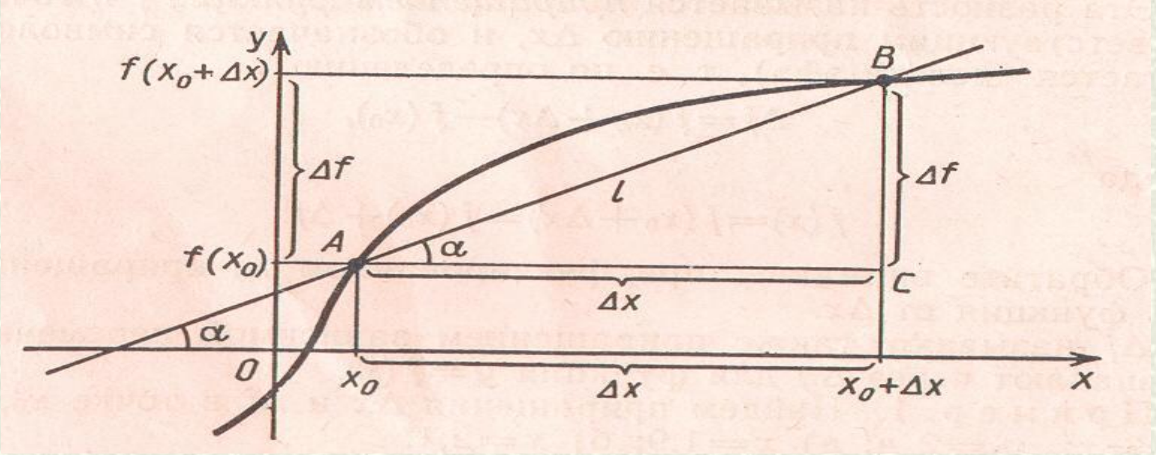
4)(u/v)'=u'v-uv'/v^2,v не равно нул'ю

5) h' (x_0)=g' (f(x_0))f '(x_0)

Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной со-
стоит в том, что производная в точке x_0
равна угловому коэффициенту касательной
в точке x_0 и тангенсу угла наклона касатель-
ной

$k = tg\alpha = \Delta y / \Delta x$



Механический смысл производной

Механический смысл производной состоит в том, что производная пути по времени равна мгновенной скорости в момент времени t_0:

$S'(t_0)=V(t_0)$.

Образцы решения задач.

$1.\left(x^{10}\right)' = 10x^{9}$

$2.(2x+3)' = 2$ $\qquad 5' = 0$

$3.\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$4.(2Sinx)' = 2Cosx$

$5.Cos(3x-4)' = (Cos(3x-4))'(3x-4)' = -3Sin(3x-4)$

$6.(xSinx)' = x'Sinx + x(Sinx)' = Sinx + xCosx$

Решая примеры, проговаривай вслух.

Помни: «Мысль рождается с собственной речи!»

Проверь свои знания!

- Продифференцируй функцию:

  1)$f(x)=4/(9+7x)^5$ 2)$g(x)=x^2\sin 2x$

  3)$y=1/\cos 2x$ 4)$u(x)=x^2/x^3-1$

- Найди угловой коэффициент касательной к графику функции $y=15x+\cos x$ в точке с абсциссой $x_0=-\pi$.

- Найди точки, в которых $f'(x)=0$, $f(x)'>0$,если $f(x)=2x+\cos(4x-\pi)$.

- Задай формулой хотя бы одну функцию, производная которой равна:

  а) $4x+5$

  б) $6x^2-\sin x$

Подготовься к ЕГЭ.

- Найди производную функций:

  $y=(7x+3)^3$ $y=x^2/x+3$

  $y=3x^4+\sin x+5$ $y= \operatorname{tg}x+3\sin 2x$
- Найди тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции $y=-4/x$ в точке с абсциссой равной -3.
- Найди значение производной функции $y=x\cos x$

  в точке $x_0=\pi$.
- Решить уравнение $f'(x)=0$,если $f(x)=x^3-2x^2$

Желаем успехов

в изучении математики!

Авторы: Костышева В.В. – учитель математики ЮСШ№2

Белова О.В. - учитель информатики

учащиеся 10-б класса.

г.Юхнов. 2005г.