Производная функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ
СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬЮ
ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ
ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ
ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ
ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Определение производной

- Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$.
- Аргументу x придадим некоторое приращение

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

- :Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Определение производной

- Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется дифференцируемой в этом интервале; операция нахождения производной функции называется дифференцированием.
- Значение производно функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается одним из символов:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y'\big|_{x_0}$$

- Если функция $y = f(x)$ описывает какой – либо физический процесс, то $f'(x)$ есть скорость протекания этого процесса – физический смысл производной.

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

- ***Теорема***
- Если функция f(x) дифференцируема в некоторой точке , то она непрерывна в ней.
- <u>Доказательство:</u>
- Пусть функция y = f(x) дифференцируема в некоторой точке x, следовательно существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

- Где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Производные основных элементарных функций

- По формуле бинома Ньютона имеем

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n =$$

$$= \left(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \square + \Delta x^n\right) - x^n$$

- Тогда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \square + \Delta x^{n-1}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \square + \Delta x^{n-1}\right) =$$

$$= nx^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

Производная сложной функции

- Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.
- ***ТЕОРЕМА***
- Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x а функция $y = f(u)$ имеет производную в соответствующей точке u , то сложная функция имеет производную , которая находится по формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать, а затем результат продифференцировать.

- Такую операцию называют логарифмическим дифференцированием.

$$y=\frac{x^2\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(2x+5)^5}\quad\Rightarrow\quad \ln y=\ln\frac{x^2\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(2x+5)^5}$$

$$\left(\ln y\right)'=\left(2\ln x+\frac{3}{4}\ln(x-1)+x-5\ln(2x+5)\right)'\quad\Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{3}{4}\cdot\frac{(x-1)'}{x-1}+1-5\frac{(2x+5)'}{2x+5}\quad\Rightarrow$$

$$y'=\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{4x-4}+1-\frac{10}{2x+5}\right)\cdot\frac{x^2\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(2x+5)^5}$$