

Производная функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬЮ

ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Определение производной

▶ Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале $(a; b)$.

▶ Аргументу x придадим некоторое приращение

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

▶ :Найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Определение производной

- ▶ Итак, по определению:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- ▶ Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется дифференцируемой в этом интервале; операция нахождения производной функции называется дифференцированием.

- ▶ Значение производно функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается одним из СИМВОЛОВ:

$$y'(x_0); \quad f'(x_0); \quad y' \Big|_{x_0}$$

- ▶ Если функция $y = f(x)$ описывает какой – либо физический процесс, то $f'(x)$ есть скорость протекания этого процесса – физический смысл производной.

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

▶ **Теорема**

▶ Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

▶ Доказательство:

▶ Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x , следовательно существует предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

▶ $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Производные основных элементарных функций

- ▶ По формуле бинома Ньютона имеем

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$

$$= (x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \square + \Delta x^n) - x^n$$

- ▶ Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \square + \Delta x^{n-1}$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \square + \Delta x^{n-1} \right) =$$

$$= nx^{n-1} \quad \Rightarrow \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

Производная сложной функции

- ▶ Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x .
- ▶ **ТЕОРЕМА**
- ▶ Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x а функция $y = f(u)$ имеет производную в соответствующей точке u , то сложная функция имеет производную, которая находится по формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать, а затем результат продифференцировать.

▶ Такую операцию называют логарифмическим дифференцированием.

$$y = \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5} \Rightarrow \ln y = \ln \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5}$$
$$(\ln y)' = \left[2 \ln x + \frac{3}{4} \ln(x-1) + x - 5 \ln(2x+5) \right]' \Rightarrow$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(x-1)'}{x-1} + 1 - 5 \frac{(2x+5)'}{2x+5} \Rightarrow$$
$$y' = \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{4x-4} + 1 - \frac{10}{2x+5} \right) \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(2x+5)^5}$$