

«Производная и ее  
применение в алгебре,  
геометрии».



# Цель работы:

- Закрепление изученного материала по теме «Производная» и ознакомление с её прикладной частью.



## План работы:

1. Исследование функции на монотонность
2. Касательная к графику.
3. Наибольшие, наименьшие значения функций.
4. Нахождение дифференциала для приближенных вычислений.
5. Доказательство неравенств.



# Определение производной

Производной данной функции в точке  $x$  называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента в точке  $x$ , когда приращение аргумента стремится к нулю.





## 1. Исследование функции на монотонность

Будем считать, что рассматриваемая функция  $y=f(x)$  определена и дифференцируема в каждой точке отрезка  $a \leq x \leq b$ .

*функция  $f(x)$  возрастает (или убывает) в промежутке  $a < x < b$ , если:*

*производная  $f'(x)$  не отрицательна (или не положительна) в промежутке  $a < x < b$ ,*

$$f'(x) \geq 0 \text{ (или } f'(x) \leq 0)$$

Пример. Определить промежутки возрастания и убывания функции:  $y = x^3 - x^2 - 8x + 2$ .



Решение: Чтобы применить признаки возрастания и убывания функции, найдем производную данной функции и определим значения  $x$ , при которых она положительна или отрицательна:

$$y' = 3x^2 - 2x - 8.$$

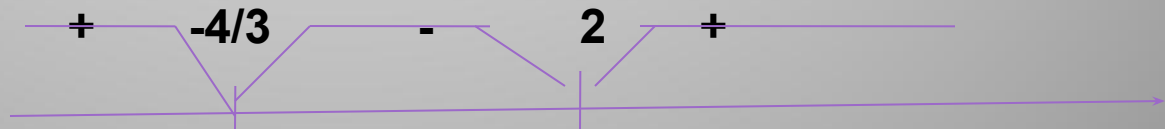
Корни трехчлена:  $x_1 = -4/3$ ,  $x_2 = 2$ .

Отсюда:

$$y' = 3(x + 4/3)(x - 2).$$

возрастает  
возрастает

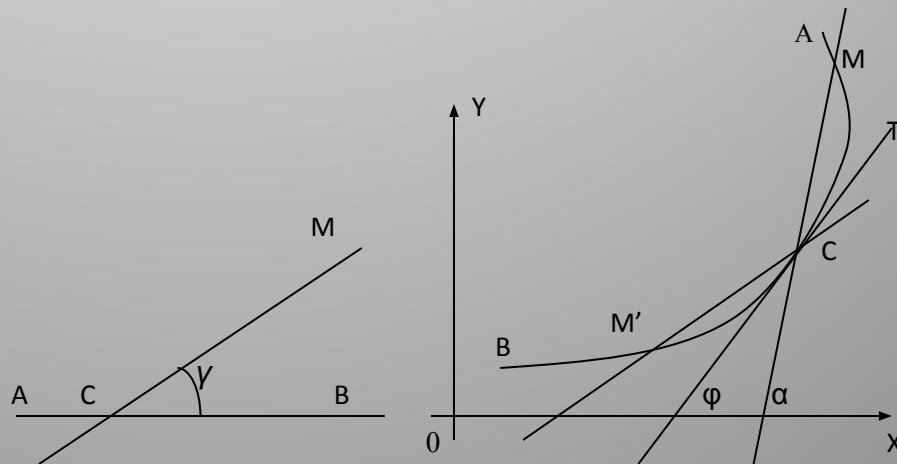
убывает



Ответ: функция возрастает в промежутках  $-\infty < x < -4/3$  и  $2 < x < +\infty$  и убывает в промежутке  $-4/3 < x < 2$ .

## 2. Касательная к графику

- Вообразим, что на кривой  $AB$  точка  $M$  неограниченно приближается к неподвижной точке  $C$ , секущая  $CM$  при этом вращается вокруг точки  $C$ . Может случиться, что, независимо от того, будет ли точка  $M$  приближаться к  $C$  в направлении от  $A$  к  $C$  или от  $B$  к  $C$  (на черт точка  $M'$ ), существует одна и та же прямая  $CT$  — предельное положение секущей  $CM$ .





**Определение.** Прямая СТ, предельное положение секущей SM, называется касательной к кривой в точке С.

Точка С называется *точкой прикосновения* или *касания*.

**Если к линии  $y=f(x)$  в точке  $x$  имеется касательная, непараллельная Оу, то угловой коэффициент касательной равен значению производной  $f'(x)$ , в точке  $x$ .**

**Если функция  $y=f(x)$  имеет определенную производную в точке  $x$ , то:**

- 1) в этой точке имеется касательная к графику функции,**
- 2) угловой коэффициент ее равен значению производной  $f'(x)$  в точке  $x$ .**



**Задача .** Найдите площадь треугольника  $AMB$ , если  $A$  и  $B$  — точки пересечения с осью  $OX$  касательных, проведенных к графику  $y = (9-x^2)/6$  из точки  $M(4;3)$ .

**Решение.**

$y_{кас} = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0); y'(x_0) = 1/6 \cdot (-2x) = -x/3$ ; т.к.  $y_{кас}$  проходит через  $M(4;3)$ , то

$$3 = (9 - x_0^2) - (4 - x_0) \cdot x_0/3$$

$$x_0^2 - 8x_0 - 9 = 0;$$

$$D/4 = 16 + 9 = 25; x_0 = 9; x_0 = -1$$

$$y_{кас1} = -12 - 3 \cdot (x - 9) = -3x + 15$$

$$y_{кас2} = 4/3 + 1/3 \cdot (x + 1) = 1/3x + 5/3$$

$$A(5;0); B(-5;0);$$

$$AM = 2\sqrt{5} \text{ (ед.)};$$

$$AB = 10 \text{ (ед.)};$$

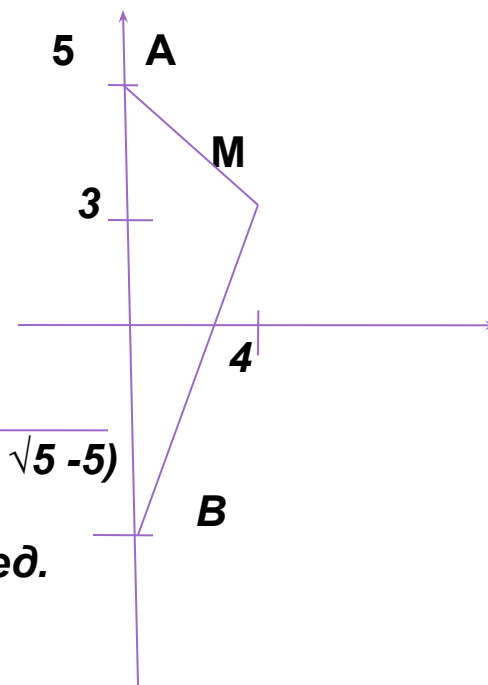
$$BM = 4\sqrt{5} \text{ (ед.)};$$

$$p/2 = 3\sqrt{5} + 5$$

$$S = \sqrt{(3\sqrt{5} + 5) \cdot (\sqrt{5} + 5) \cdot (5 - \sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{5} - 5)}$$

$$S = 20 \text{ (кв.ед.)}.$$

**Ответ: 20 кв.ед.**



### . 3. Наибольшие, наименьшие значения функций

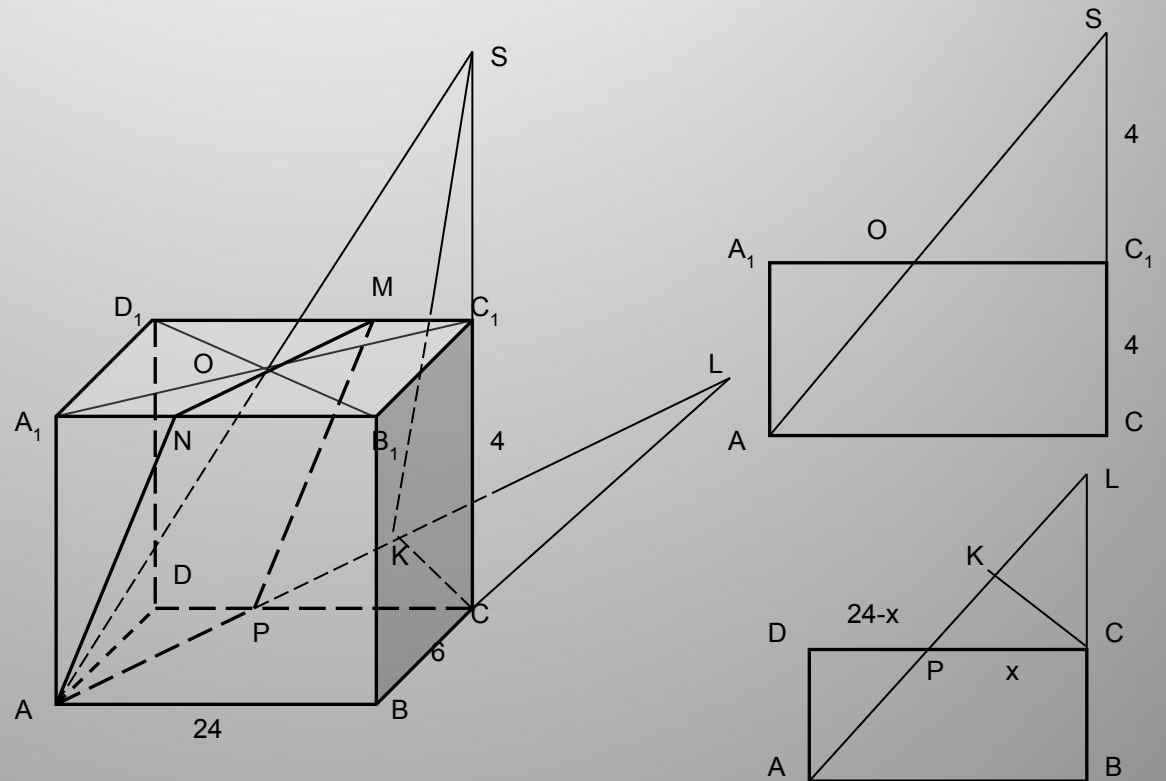
Задача . В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребрами  $CD = 24$ ,  $AD = 6$  и  $DD_1 = 4$  проведена плоскость через центр симметрии грани  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , вершину  $A$  и точку  $P$ , лежащую на ребре  $DC$ . Какую наименьшую площадь может иметь сечение параллелепипеда этой плоскостью? На какие части делит точка  $P$  ребро  $DC$  в этом случае?

Решение.

Проведем плоскость и построим сечение (рис.).  $AO \in AA_1 C_1 C$  - линия, принадлежащая данной плоскости. Продолжим  $AO$  до пересечения с  $CC_1$  в точке  $S$ . Тогда  $SP$  - линия пересечения грани  $DD_1 C_1 C$  и данной плоскости, а сечение  $ANMP$  - параллелограмм.  $S_{\text{сеч}} = S_{AMNP} = SK \cdot AP/2$   
 $SK/2$  — высота параллелограмма  $ANMP$ .



В  $\triangle ASC$   $OC_1$  - средняя линия (значит  $SC_1 = 4$ ), в  $\triangle PSC$  также средняя линия  $MC_1$ , а плоскость  $A_1B_1C_1D_1$  делит пополам любую линию между  $S$  и плоскостью  $ABCD$ , а значит и  $SK$ .





Пусть  $PC = x$ ;  $\triangle CLP$  подобен  $\triangle DAP$

$$LC/AD = x/(24-x), LC = 6x/(24-x).$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle CLP: KC &= (6x \cdot x/(24-x))/(\sqrt{(36x^2/(24-x)^2)+x^2}) = \\ &= 6x/(\sqrt{36+(24-x)^2}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle SCK: SK &= \sqrt{SC^2+KC^2} = \sqrt{64+36x^2/(36+(24-x)^2)} = \\ &= 2\sqrt{16+9x^2/(36+(24-x)^2)}; \end{aligned}$$

$$\text{Из } \triangle ADP: AP = \sqrt{36+(24-x)^2};$$

$$\begin{aligned} S_{\text{сеч}} &= AP \cdot SK/2 = 0,5 \cdot (\sqrt{36+(24-x)^2}) \cdot 2\sqrt{16+9x^2/(36+(24-x)^2)} = \\ &= \sqrt{16(36+(24-x)^2)+9x^2}; \end{aligned}$$

Если  $S'(x) = 0$ , то  $18x+16 \cdot 2(24-x)(-1) = 0$ ;

$50x-768 = 0$ ,  $x = 384/25$  (это точка min);

$$S_{\text{сеч}} = 312;$$

$$DP = 24-384/25 = 216/25;$$

Ответ: 312 кв. ед.; DC- 384/25; 216/25.

#### 4. Нахождение дифференциала для приближенных вычислений.

**Определение.** Дифференциалом ( $dy$ ) функции  $y=f(x)$  называется произведение значения производной  $f'(x)$  на произвольное приращение  $\Delta x$  аргумента  $x$ , т. е.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

при достаточно малом  $\Delta x$

$$\Delta y \approx dy = f'(x) \Delta x$$

Это означает, что при малых изменениях аргумента (от начального значения  $x$ ) величину изменения функции  $y=f(x)$  можно приближенно считать пропорциональной величине изменения аргумента с коэффициентом пропорциональности, равным значению производной  $f'(x)$ ;

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

Пример:

Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

$$y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0,98 \quad \text{В нашем случае:} \quad x_0 = 1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \Delta x = 0,98 - 1 = -0,02$$

$$\text{Вычисляем:} \quad f(x_0) = f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} \quad f'(1) = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1,5$$

$$\text{Имеем:} \quad \sqrt{0,98^3} \approx 1 + 1,5 \cdot (-0,02) = 0,97$$



## 5. Доказательство неравенств.

- Если функция  $f$  имеет положительную (отрицательную) производную в каждой точке некоторого промежутка, то она возрастает (убывает) на этом промежутке. При нахождении промежутков монотонности нужно иметь в виду, что если функция возрастает (убывает) на интервале  $(a,b)$  и непрерывна в точках  $a$  и  $b$ , то она возрастает (убывает) на отрезке  $[a,b]$ .

Для отыскания наибольших и наименьших значений  $f$  на отрезке  $[a,b]$  достаточно сравнить между собой значения  $f$  в точках  $a$ ,  $b$  и в критических точках из отрезка  $[a,b]$ .

Эти результаты применимы при решении многих элементарных задач, связанных с неравенствами.



**Задача . Доказать что  $(e+x)^{e-x} > (e-x)^{e+x}$   
для  $0 < x < e$ .**

**Решение.**

**Данное неравенство равносильно следующему:**

$$(e - x) \cdot \ln(e + x) > (e + x) \cdot \ln(e - x).$$

Пусть  $f(x) = (e-x) \cdot \ln(e+x) - (e+x) \cdot \ln(e-x)$ ,

тогда  $f'(x) = -\ln(e+x) + (e-x)/(e+x) - \ln(e-x) + (e+x)/(e-x)$ .

Так как  $(e-x)/(e+x) + (e+x)/(e-x) = 2(e^2+x^2)/(e^2-x^2) > 2$ ,

$$\ln(e+x) + \ln(e-x) = \ln(e^2-x^2) < \ln e^2 = 2,$$

то  $f'(x) > 0$  при  $0 < x < e$ . Следовательно, функция  $f$  возрастает на интервале  $(0, e)$ . Функция  $f(0)$  - непрерывна. Поэтому эту точку можно включить в промежуток возрастания. Поскольку  $f(0) = 0$ , а  $f$  возрастает при  $0 < x < e$ , то  $f(x) > 0$  при  $0 < x < e$ . Отсюда получаем решение задачи.