

Производная сложной функции. Полная производная. Полный дифференциал сложной функции.

Лекция 12

Предположим, что в уравнении $z=F(u,v)$ (1) u,v - функции независимых переменных x,y :

$$u = \varphi(x, y); v = \psi(x, y) \quad (2)$$

В этом случае z есть сложная функция от аргументов x,y .

В общем случае z можно выразить через x,y непосредственно, а именно:

$$z = F(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \quad (3)$$

Пример 1 $z = u^3 v^3 + u + 1; u = x^2 + y^2; v = e^{x+y} + 1$.

Тогда $z = (x^2 + y^2)^3 (e^{x+y} + 1)^3 + (x^2 + y^2) + 1$

Предположим, что $F(u, v), \varphi(x, y), \psi(x, y)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

Задача. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ исходя из уравнений (1),(2), не пользуясь уравнением (3).

Даем аргументу x приращение Δx , оставляя y неизменной, тогда u, v получают приращения $\Delta_x u, \Delta_x v$. Но если u, v получают приращения $\Delta_x u, \Delta_x v$, то и функция $z=F(u,v)$ получит приращение Δz , определяемое следующей формулой:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v$$

Разделим обе части равенства на Δx :

Если $\Delta_x u \rightarrow 0, \Delta_x v \rightarrow 0$ (в силу непрерывности функций u, v), то $\gamma_1 \rightarrow 0, \gamma_2 \rightarrow 0$.
Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}; \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}; \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma_1 = 0; \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \gamma_2 = 0$ Следовательно:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4) \quad \text{аналогично} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4')$$

Пример 2 $z = \ln(u^2 + v)$; $u = e^{x+y^2}$; $v = x^2 + y$

Решение $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}$; $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v}$; $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}$; $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$

Используя формулы (4),(4') получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v} e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} 2x = \frac{2}{u^2 + v} (ue^{x+y^2} + x);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v} 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} = \frac{1}{u^2 + v} (4uye^{x+y^2} + 1);$$

В последнем выражении вместо u, v можно подставить их выражения.

Для случая большего числа переменных формулы (4),(4') обобщаются.

Например, для $w = F(z, u, v, s)$, которая является функцией 4-х переменных, и каждая из которых зависит от переменных x, y , то формула (4),(4') принимает вид:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \quad (5)$$

Если задана функция $z = F(x, y, u, v)$, где y, u, v - в свою очередь зависят от одного аргумента x

то по сути z - функция от одного аргумента. Тогда можно рассмотреть вопрос о нахождении

Эта производная вычисляется по первой из формул (5), то есть

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} .$$

Но так как y, u, v – функции только одного переменного x , то частные производные обращаются в обыкновенные, и кроме того $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, поэтому $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}$. Это формула для вычисления полной производной $\frac{dz}{dx}$ (в отличие от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$)

Пример 3 $z = x^2 + \sqrt{y}; y = \sin x; \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2x; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}; \frac{dy}{dx} = \cos x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

Найдем полный дифференциал сложной функции, определенной равенствами (1),(2).

Формула полного дифференциала $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ (6)

Подставляя выражения $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, определенные равенствами (4),(4') получим

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy$$

Выполнив преобразование в правой части, получим

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \quad (7) \quad \text{Но так как} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du \\ \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = dv \end{cases} \quad (8), \text{ то}$$

равенство (7) с учетом равенства (8) можно переписать так: $dz = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv$ (9)

или $dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$ (9')

Сравнивая (6) и (9'), можно сказать, что выражение полного дифференциала функции нескольких переменных (дифференциала первого порядка) имеет тот же вид, то есть форма дифференциала инвариантна, являются ли u, v независимыми переменными или функциями независимых переменных.

Пример. Найти полный дифференциал сложной функции $z = u^2 + v^3; u = x^2 \sin y; v = x^3 e^y$

Решение По формуле (9')

имеем

$$dz = 2uv^3 du + 3u^2 v^2 dv = 2uv^3 (2x \sin y dx + x^2 \cos y dy) + 3u^2 v^2 (3x^2 e^y dx + x^3 e^y dy)$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$dz = (2uv^3 2x \sin y dx + 3u^2 v^2) dx + (2uv^3 x^2 \cos y + 3u^2 v^2 x^3 e^y) dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Производная от функции заданной неявно

Начнем рассмотрение этого вопроса с неявной функции одного переменного. Пусть некоторая функция определена уравнением

$$F(x,y)=0$$

Теорема. Пусть непрерывная функция y от x задана уравнением (1), где $F(x,y), F'_x(x,y), F'_y(x,y)$ - непрерывные функции в некоторой области D , содержащей точку (x,y) , координаты которой удовлетворяют уравнению (1); кроме того, в этой точке $F'_y(x,y) \neq 0$. Тогда функция y от x имеет производную

$$y'_x = - \frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \quad (2)$$

Доказательство

Пусть некоторому значению x соответствует значение функции y при этом $F(x,y)=0$

Для $x \Rightarrow \Delta x, y \Rightarrow \Delta y; x + \Delta x \Rightarrow y + \Delta y;$

В силу $F(x,y)=0 \Rightarrow F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0 \Rightarrow F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = 0$. Это можно записать в виде

Так как левая часть равенства равна 0, то $\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0$. Делим на Δx и вычисляем

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0 \quad \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma_1 \rightarrow 0, \gamma_2 \rightarrow 0$$

При $\frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}$, то в пределе получим $y'_x = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ (2')

Доказано существование от функции, заданной неявно, нашли формулу для ее вычисления.

$$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma_1 \rightarrow 0, \gamma_2 \rightarrow 0 \quad y'_x = - \frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \quad F'_y(x,y) \neq 0$$

Пример 1 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ - неявная функция.

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Пример 2 $e^y - e^x + xy = 0$

$$F(x, y) = e^y - e^x + xy \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y; \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x; \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}$$

Рассмотрим уравнение вида $F(x, y, z) = 0$ (3)

Если каждой паре x и y из некоторой области соответствует одно или несколько значений z , удовлетворяющих уравнению (3), то это уравнение неявно определяет одну или несколько однозначных функций z от x, y .

Например $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \Rightarrow z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}; z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Для z'_x, z'_y имеют место формулы $z'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ и $z'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$. Предполагается, что

Аналогичным образом определяются неявные функции любого числа переменных и находятся их частные производные.

Пример 3 $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$

Дифференцируя эту функцию как явную (после разрешения уравнения относительно z) получили бы тот же результат

Пример 4 $e^z + x^2 y + z + 5 = 0$

$$F(x, y, z) = e^z + x^2 y + z + 5; \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy; \frac{\partial F}{\partial y} = x^2; \frac{\partial F}{\partial z} = e^z + 1; \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{e^z + 1}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{e^z + 1}$$

Частные производные различных порядков

Рассмотрим функцию $z=f(x,y)$. $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$ - функции переменных x,y , от которых можно снова находить частные производные. Частных производных второго порядка от функций двух переменных четыре, так как каждую из функций $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)$ можно дифференцировать как по x , так и по y .

Обозначение

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$ - последовательное дифференцирование по x .

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$ - последовательное дифференцирование по x , затем по y .

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y)$ - последовательное дифференцирование по y , затем по x .

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y)$ - последовательное дифференцирование по y .

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x , так и по y . Получаем частные производные третьего порядка. Их будет восемь

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, ..., $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$. В общем случае частная производная n -го порядка есть первая производная от производной $(n-1)$ порядка.

Формула $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ - соответствует производной n -го порядка. Функция z сначала p раз дифференцируется по x , затем $n-p$ раз по y .

Для функции любого числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

Пример 1 $z = x^2y + y^3$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Решение $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2$; $\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$

Пример 2 $z = y^2e^x + x^2y^3 + 1$. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$

Решение $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2e^x + 2xy^3$; $\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2e^x + 2y^3$; $\Rightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^x + 6y^2$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2y^2$; $\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2ye^x + 6xy^2$; $\Rightarrow \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 2ye^x + 6y^2$

Пример 3 $u = z^2e^{x+y^2}$. Найти $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$

Решение

$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2e^{x+y^2}$; $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z^2e^{x+y^2}$; $\Rightarrow \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 2yz^2e^{x+y^2}$; $\Rightarrow \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = 4yze^{x+y^2}$

Производная по направлению.

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в некоторой области D и имеет в этой области непрерывные частные производные. Выберем в рассматриваемой области точку $M(x, y, z)$ и проведем из нее вектор S , направляющие косинусы которого $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. На векторе S на расстоянии Δs от его начала найдем точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, где

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Представим полное приращение функции f в виде:

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \delta \Delta x + \varepsilon \Delta y + \lambda \Delta z, \text{ где } \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \delta = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \lambda = 0.$$

После деления на Δs получаем:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta s} + \delta \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon \frac{\Delta y}{\Delta s} + \lambda \frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Поскольку $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$, предыдущее равенство можно переписать в виде:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos\gamma + \delta \cos\alpha + \varepsilon \cos\beta + \lambda \cos\gamma \quad (1)$$

Градиент.

Определение Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \rightarrow 0$ называется **производной от функции $u = f(x, y, z)$ по направлению вектора \mathbf{S}** и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$.

При этом из (1) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2)$$

Замечание 1. Частные производные являются частным случаем производной по направлению. Например, при $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}$ получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Замечание 2. Выше определялся геометрический смысл частных производных функции двух переменных как угловых коэффициентов касательных к линиям пересечения поверхности, являющейся графиком функции, с плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$. Аналогичным образом можно рассматривать производную этой функции по направлению l в точке $M(x_0, y_0)$ как угловой коэффициент линии пересечения данной поверхности и плоскости, проходящей через точку M параллельно оси Oz и прямой l .

Определение Вектор, координатами которого в каждой точке некоторой области являются частные производные функции $u = f(x, y, z)$ в этой точке, называется градиентом функции $u = f(x, y, z)$.

Обозначение: $\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}$
 Свойства градиента.

1. Производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора \mathbf{S} равняется проекции вектора $\text{grad } u$ на вектор \mathbf{S} .

Доказательство. Единичный вектор направления \mathbf{S} имеет вид $e_S = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, поэтому правая часть формулы (4.7) представляет собой скалярное произведение векторов $\text{grad } u$ и e_S , то есть указанную проекцию.

2. Производная в данной точке по направлению вектора S имеет наибольшее значение, равное $|\text{grad } u|$, если это направление совпадает с направлением градиента.

Доказательство. Обозначим угол между векторами S и $\text{grad } u$ через φ . Тогда из свойства 1 следует, что $\frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u| \cdot \cos\varphi$, (4.8)

следовательно, ее наибольшее значение достигается при $\varphi=0$ и равно $|\text{grad } u|$.

3. Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору $\text{grad } u$, равна нулю.

Доказательство. В этом случае в формуле (4.8) $\varphi = \frac{\pi}{2}, \cos \varphi = 0, \frac{\partial u}{\partial s} = 0$.

4. Если $z = f(x, y)$ – функция двух переменных, то $\text{grad } f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\}$ направлен перпендикулярно к линии уровня $f(x, y) = c$, проходящей через данную точку.

Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Нахождение наибольших и наименьших значений.

Определение 1. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой максимума** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всех точек (x, y) из некоторой окрестности точки M_0 .

Определение 2. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **точкой минимума** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всех точек (x, y) из некоторой окрестности точки M_0 .

Замечание 1. Точки максимума и минимума называются **точками экстремума** функции нескольких переменных.

Замечание 2. Аналогичным образом определяется точка экстремума для функции от любого количества переменных.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то в этой точке частные производные первого порядка данной функции равны нулю или не существуют.

Доказательство.

Зафиксируем значение переменной y , считая $y = y_0$. Тогда функция $f(x, y_0)$ будет функцией одной переменной x , для которой $x = x_0$ является точкой экстремума. Следовательно, по теореме Ферма $f'_x(x_0, y_0) = 0$ или не существует. Аналогично доказывается такое же утверждение для $f'_y(x_0, y_0)$.

Определение 3. Точки, принадлежащие области определения функции нескольких переменных, в которых частные производные функции равны нулю или не существуют, называются **стационарными точками** этой функции.

Замечание. Таким образом, экстремум может достигаться только в стационарных точках, но не обязательно он наблюдается в каждой из них.

Примеры.

1. Найдем стационарную точку функции $z = x^2 + y^2$. Для этого решим систему уравнений $z'_x = 2x = 0, z'_y = 2y = 0$, откуда $x_0 = y_0 = 0$. Очевидно, что в этой точке функция имеет минимум, так как при $x = y = 0$ $z = 0$, а при остальных значениях аргументов $z > 0$.

2. Для функции $z = xy$ стационарной точкой тоже является $(0, 0)$, но экстремум в этой точке не достигается ($z(0, 0) = 0$, а в окрестности стационарной точки функция принимает как положительные, так и отрицательные значения).

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, являющейся стационарной точкой функции $z = f(x, y)$, эта функция имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка включительно. Обозначим

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = A, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = B, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C$. Тогда:

- 1) $f(x, y)$ имеет в точке M_0 максимум, если $AC - B^2 > 0, A < 0$;
- 2) $f(x, y)$ имеет в точке M_0 минимум, если $AC - B^2 > 0, A > 0$;
- 3) экстремум в критической точке отсутствует, если $AC - B^2 < 0$;
- 4) если $AC - B^2 = 0$, необходимо дополнительное исследование.

Пример. Найдем точки экстремума функции $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$. Для поиска стационарных точек решим систему
$$\begin{cases} z'_x = 2x - 2y + 2 = 0 \\ z'_y = -2x + 4y = 0 \end{cases}$$
. Итак, стационарная точка $(-2, -1)$. При этом $A = 2, B = -2, C = 4$. Тогда $AC - B^2 = 4 > 0$, следовательно, в стационарной точке достигается экстремум, а именно минимум (так как $A > 0$).

Условный экстремум.

Определение 4. Если аргументы функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ связаны дополнительными условиями в виде m уравнений ($m < n$):

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (1)$$

где функции φ_i имеют непрерывные частные производные, то уравнения (1) называются **уравнениями связи**.

Определение 5. Экстремум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при выполнении условий (1) называется **условным экстремумом**.

Замечание. Можно предложить следующее геометрическое истолкование условного экстремума функции двух переменных: пусть аргументы функции $f(x, y)$ связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$, задающим некоторую кривую в плоскости Oxy . Восставив из каждой точки этой кривой перпендикуляры к плоскости Oxy до пересечения с поверхностью $z = f(x, y)$, получим пространственную кривую, лежащую на поверхности над кривой $\varphi(x, y) = 0$. Задача состоит в поиске точек экстремума полученной кривой, которые, разумеется, в общем случае не совпадают с точками безусловного экстремума функции $f(x, y)$.

Определим необходимые условия условного экстремума для функции двух переменных, введя предварительно следующее определение:

Определение 6. Функция $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, (2)

где λ_i – некоторые постоянные, называется **функцией Лагранжа**, а числа λ_i – **неопределенными множителями Лагранжа**.

Теорема (необходимые условия условного экстремума). Условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ может достигаться только в стационарных точках функции Лагранжа $L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$.

Доказательство. Уравнение связи задает неявную зависимость y от x , поэтому будем считать, что y есть функция от x : $y = y(x)$. Тогда z есть сложная функция от x , и ее критические точки определяются условием: (3)

Из уравнения связи следует, что (4) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$

Умножим равенство (4) на некоторое число λ и сложим с (3). Получим:

$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}\right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx}\right) = 0$, или $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \frac{dy}{dx} = 0$.
 Последнее равенство должно выполняться в стационарных точках, откуда следует:

$$\begin{cases} L'_x = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ L'_y = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Получена система трех уравнений относительно трех неизвестных: x , y и λ , причем первые два уравнения являются условиями стационарной точки функции Лагранжа. Исключая из системы (5) вспомогательное неизвестное λ , находим координаты точек, в которых исходная функция может иметь условный экстремум.

Замечание 1. Проверку наличия условного экстремума в найденной точке можно провести с помощью исследования частных производных второго порядка функции Лагранжа по аналогии с теоремой 2.

Замечание 2. Точки, в которых может достигаться условный экстремум функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при выполнении условий (1), можно определить как решения системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Пример. Найдем условный экстремум функции $z = xy$ при условии $x + y = 1$. Составим функцию Лагранжа $L(x, y) = xy + \lambda (x + y - 1)$. Система (6) при этом выглядит так:

$$\begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ откуда } -2\lambda = 1, \lambda = -0,5, x = y = -\lambda = 0,5. \text{ При этом } L(x, y) \text{ можно}$$

представить в виде $L(x, y) = -0,5(x - y)^2 + 0,5 \leq 0,5$, поэтому в найденной стационарной точке $L(x, y)$ имеет максимум, а $z = xy$ – условный максимум.