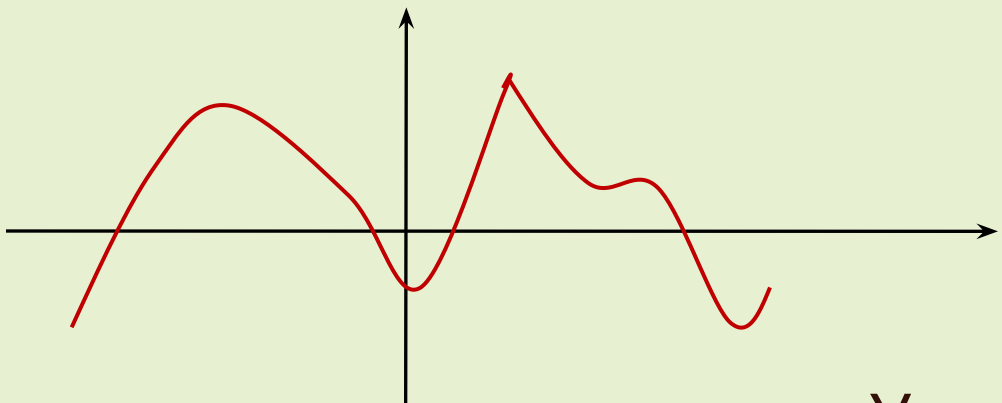
Применение производной к исследованию функций

Производная и экстремумы. Исследование функций на монотонность.



Урок в 10-3 классе.

Учитель – Ирина Геннадьевна Рубцова
МОУ лицей №18 г. Калининграда

Кое-что о свойствах функций.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ РАЗМИНКА

1.Закончите формулировки утверждений:

А) *функцию $y=f(x)$ называют возрастающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1<x_2$,……….*

Б) если в некоторой точке графика функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция …………………

В) если к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ выражает ……………………

Г) если касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ образует с положительным направлением оси X острый угол, то производная в этой точке……………………..

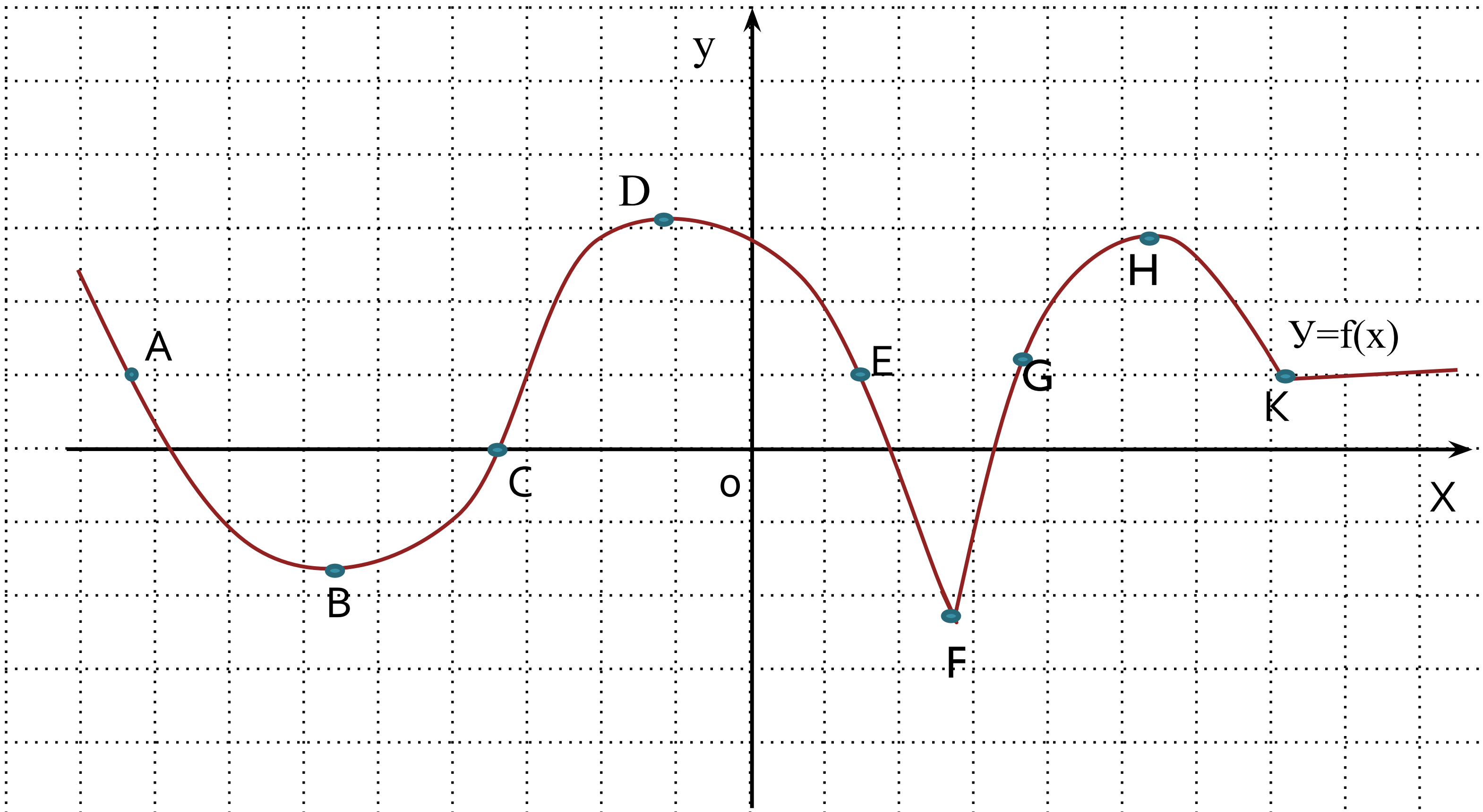
2.Выберите верное утверждение:

А) Точку x_0 называют точкой **максимума** функции $y=f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$.

Б) Точку x_0 называют точкой **максимума** функции $y=f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

В) Точку x_0 называют точкой **максимума** функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой, таких, что $x \neq x_0$, выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$.

3. Определите знаки производной функции y=f(x) в отмеченных точках.



1.Ответы:

А) *функцию y=f(x)* называют возрастающей на множестве X⊂ D(f), если для любых двух точек x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$, **выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.**

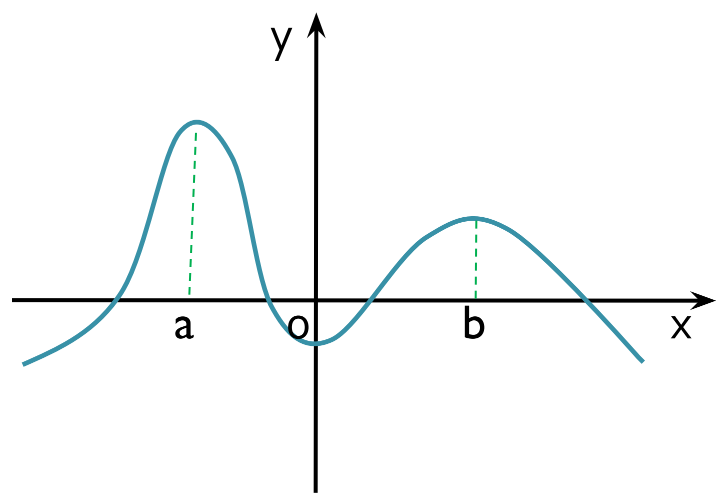
Б) если в некоторой точке графика функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция **дифференцируема.**

В) если к графику функции *y=f(x)* в точке с абсциссой x=a можно провести касательную, непараллельную оси *y*, то *f '(a)* выражает **угловой коэффициент касательной.**

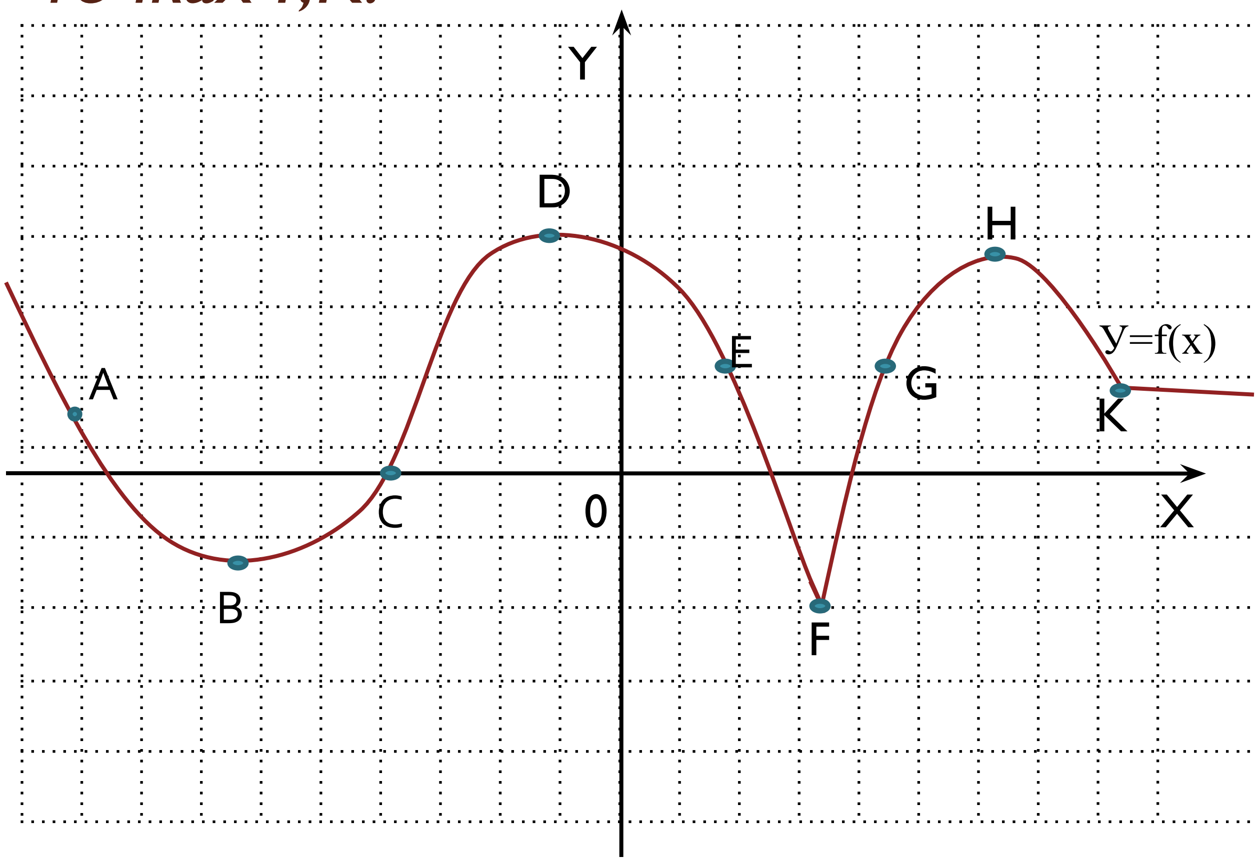
Г) если касательная к графику функции *y=f(x)* в точке x =a образует с положительным направлением оси X острый угол, то производная в этой точке **положительна.**

2. Верное утверждение:

- В) Точку x_0 называют точкой **максимума** функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой, таких, что $x \neq x_0$, выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$.



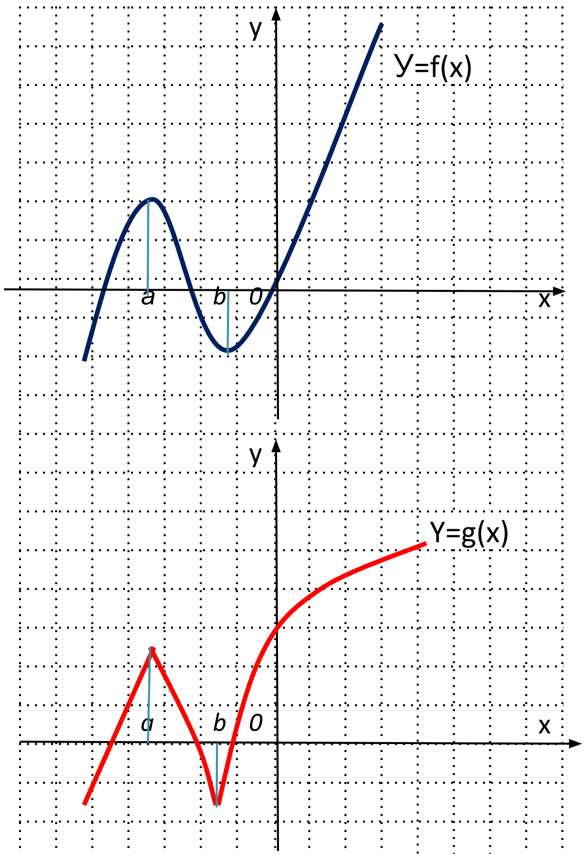
3. **Ответы :** *производная равна нулю в точках B, D, H; положительна в точках C, G; отрицательна в точках A, E и не существует в точках F,K.*



Определенно, существует тесная связь между свойствами функции и ее производной. Но какая – предстоит найти. Итак, …

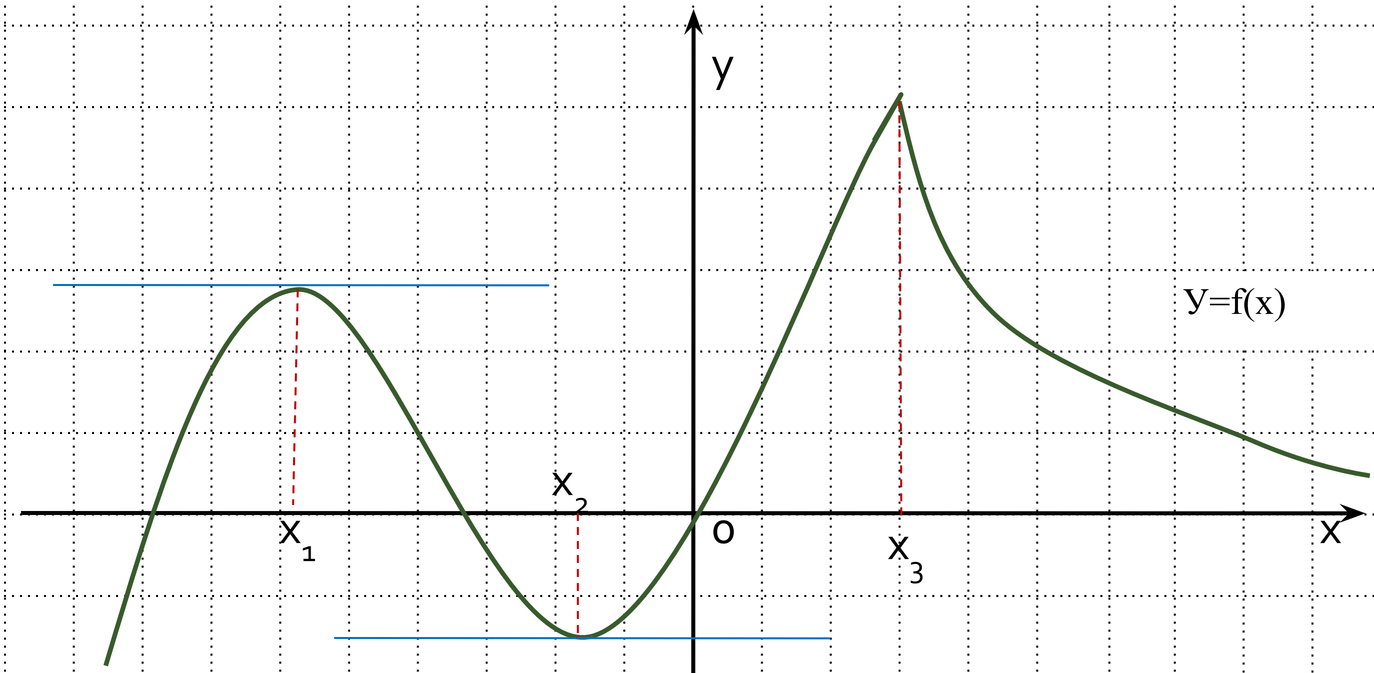
ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ.

Задание 1.



- Опишите характер ***монотонности*** *функций в окрестностях точек x = a и x = b.*
- *Являются ли точки с абсциссами a и b* ***экстремумами*** *данных функций?*
- *Как ведут себя* ***касательные*** *к графикам этих функций в указанных точках?*
- *Найдите, если возможно, значения* ***производных*** *этих функций в данных точках.*
- *Сделайте вывод о* ***необходимом условии существования экстремума функции в точке.***

Теорема. *Если функция y=f(x) имеет экстремум в точке $x=x_0$, то в этой точке производная функции* ***либо равна нулю, либо не существует.***



Особые точки :

X_1, x_2 – **стационарные** точки, X_3- **критическая** точка.	X_1, x_3 –точки **максимума**, X_2- точка **минимума**.

Новые термины:

- **Стационарная точка** – *внутренняя точка области определения функции, в которых производная равна нулю.*

- **Критическая точка** – *внутренняя точка области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует.*

Задание 2.

- Найдите точки, в которых функция $y = x^3 - 3x + 1$ **может** иметь экстремумы.

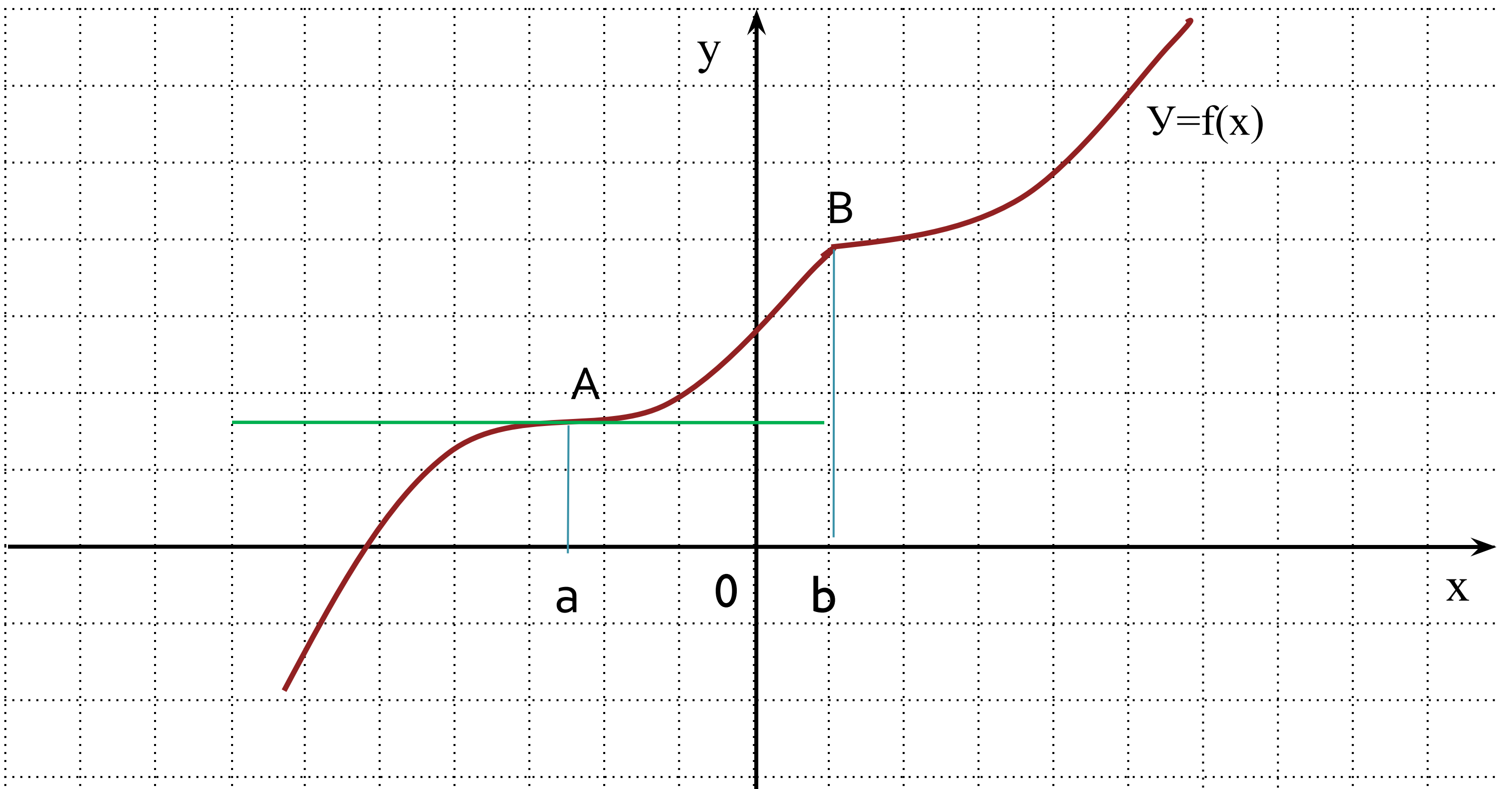
- Решение:

$f\,'(x)=3x^2 - 3.$

$f\,'(x)$ существует при всех значениях аргумента.

$f\,'(x)=0$ при $x=1$ и $x=-1$. Эти точки **могут** быть точками экстремума.

Сравните данный чертеж с предыдущим и подумайте: *является ли указанное условие* ***достаточным*** *для существования экстремума в данной точке?*



a- стационарная точка

b – критическая точка

Вывод: *при переходе через точку экстремума характер монотонности функции* ***меняется***

- Вопрос: *как связаны* ***монотонность*** *функции и* ***производная****?*

Рассмотрите рисунки и постарайтесь установить зависимость между знаком производной и характером монотонности функции на промежутке [a;b]. Сформулируйте выводы.

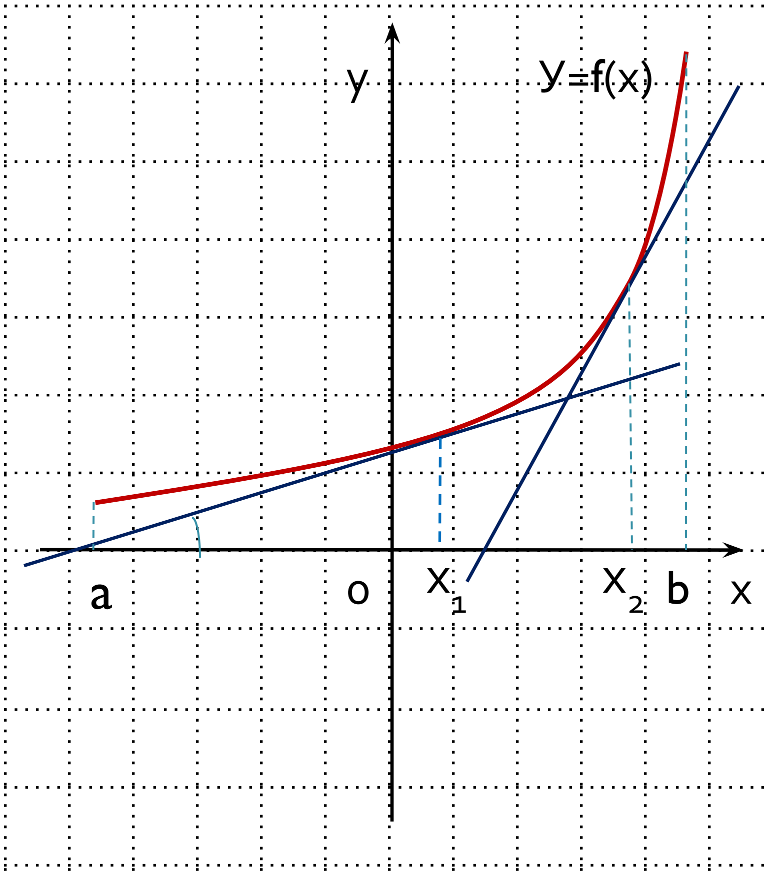


Рис.1

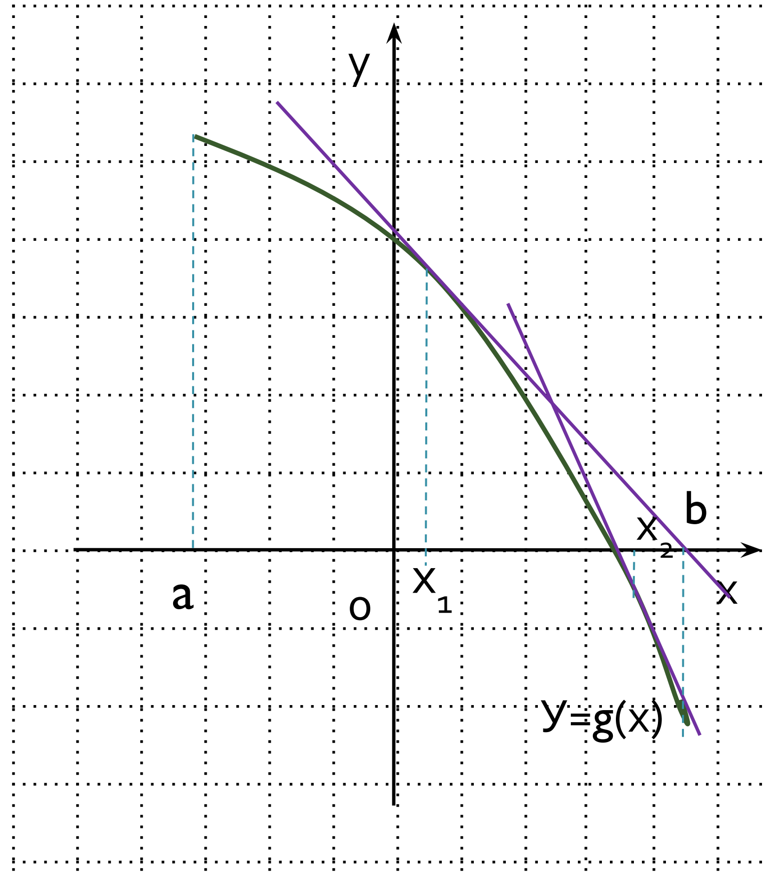


Рис. 2

Сравните свои выводы со следующим утверждением:

- **Теорема.** *Если функция y=f(x) непрерывна на промежутке X и ее производная* ***положительна*** *(соответственно* ***отрицательна****) во внутренних точках этого промежутка, то функция y=f(x)* ***возрастает*** *(соответственно* ***убывает****) на X.*

Сравните формулировки теорем:

Теорема.

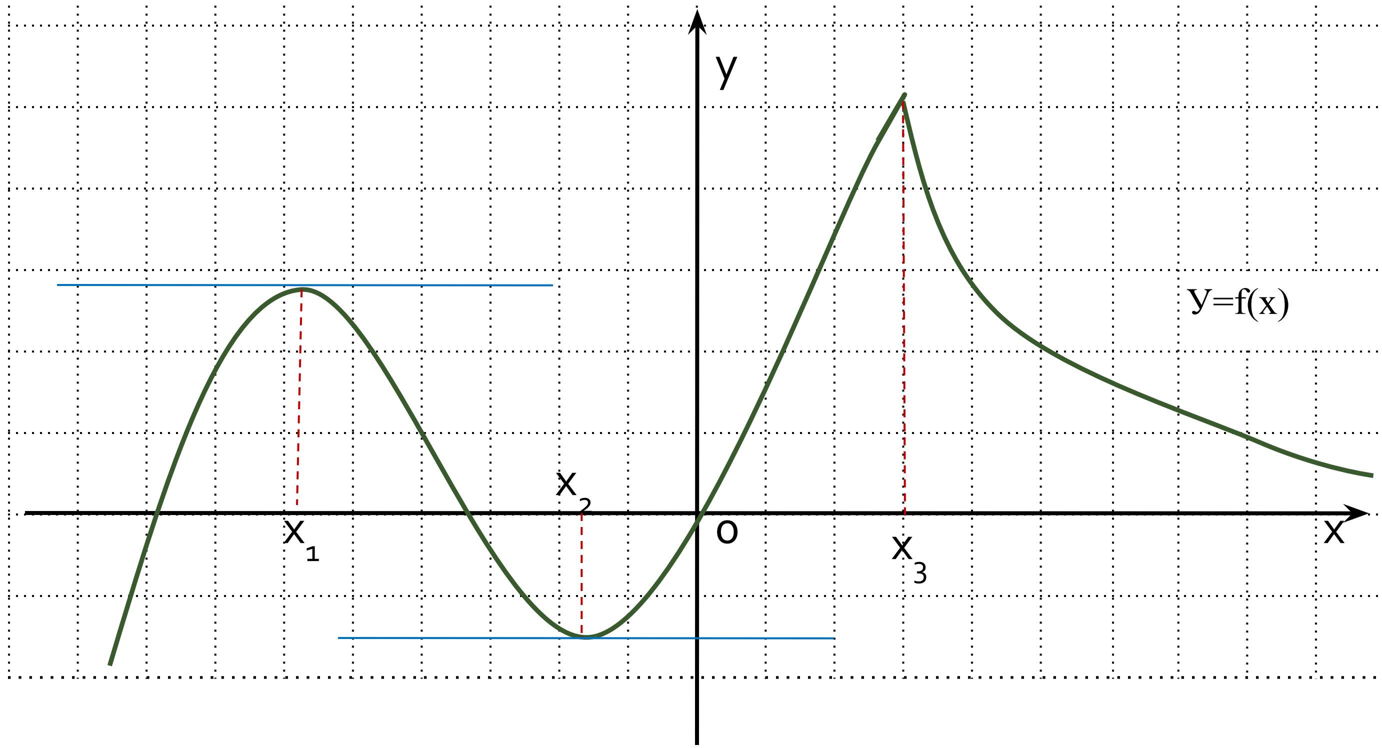
Если функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке X и ее производная ***положительна*** *(соответственно* ***отрицательна****) во внутренних точках этого промежутка, то функция $y=f(x)$* ***возрастает*** *(соответственно* ***убывает****) на X.*

Теорема.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке X и ее производная ***неотрицательна*** *(соответственно* ***неположительна****) во внутренних точках этого промежутка и равна нулю лишь в конечном множестве точек, то функция $y=f(x)$* ***возрастает*** *(соответственно* ***убывает****) на X.*

Чтобы точка x=x0 была точкой экстремума функции, достаточно, чтобы: ………(ваше мнение?)

ОБОБЩАЕМ ИНФОРМАЦИЮ И ДЕЛАЕМ ВЫВОДЫ.


y
y=f(x)
x₁
x₂
o
x₃
x

Теорема (достаточные условия экстремума).

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

*а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x)<0$, а при $x>x_0$ - неравенство $f'(x)>0$, то $x=x_0$ – **точка минимума** функции $y=f(x)$;*

*б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x)>0$, а при $x>x_0$ - неравенство $f'(x)<0$, то $x=x_0$ – **точка максимума** функции $y=f(x)$;*

*в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней слева и справа от точки $x=x_0$ знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума **нет.***

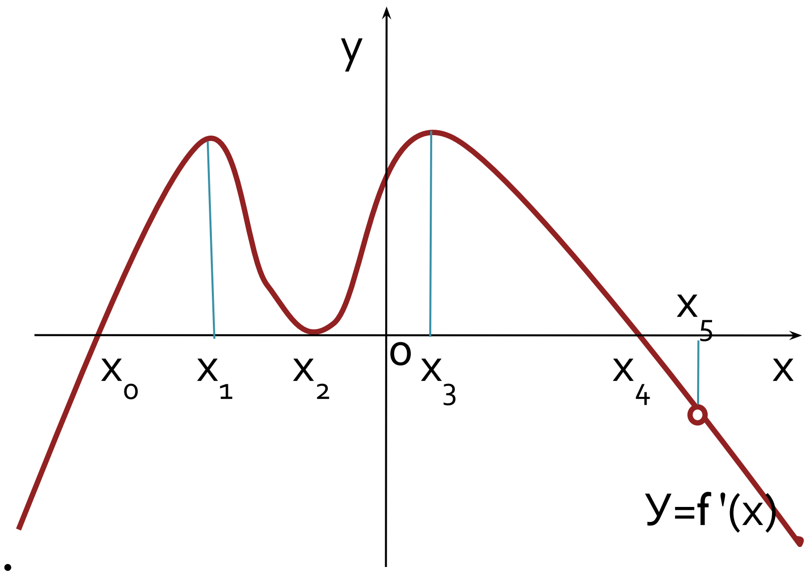
Продумайте формулировку «рабочего» правила!

Решите задачу:

На рисунке – эскиз графика функции

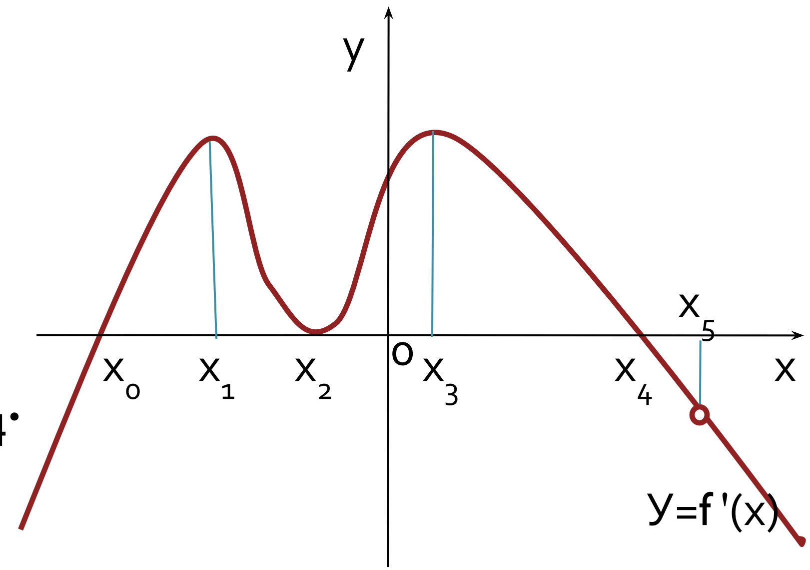
y=f '(x) (график **производной** функции y=f(x)). Укажите:

- Промежутки монотонности функции y=f(x);
- Точки, в которых касательная к графику функции y=f(x) параллельна оси абсцисс;
- Стационарные и критические точки;
- Точки минимума и максимума.



Ответы :

- Функция возрастает на промежутках $[x_0;x_2]$ и $[x_2;x_4]$
- Точки, в которых касательная к графику функции y=f(x) параллельна оси абсцисс: x_0, x_2, x_4.
- Стационарные точки: x_0, x_2, x_4. Критическая точка: x_5;
- Точка минимума- x_0, максимума – x_4.



Успехов!

- Спасибо за внимание!