

По геометрическому смыслу производной, значение производной функции  $f(x) = e^x$  в точке  $x_0 = 0$  равно  $\text{tg}45^\circ = 1$ . Таким образом,  $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - e^0}{\Delta x} = 1$ .

План нахождения производной функции  $f(x) = e^x$ .

1. Найдём  $e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$ ; ие функции  $\Delta f$ :

$$\Delta f =$$

2. Вычислим отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow e^{x_0}$  и к

приращению аргумента  $\Delta x$   $= 1 =$  при

$\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда по определению производной

получаем:

$$(e^x)' = e^x$$

$$y' = e^x \text{ или}$$

любом при  $x$ .

$$e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1);$$

По основному логарифмическому тождеству  $x = e^{\ln x}$

при всех положительных  $x$ , т.е. в этом равенстве справа и слева стоит одна и та же функция, определенная на  $\mathbb{R}_+$ . Поэтому производные  $x$  и  $e^{\ln x}$  равны.

$x' = 1$ . Производную правой части вычисляем по правилу нахождения сложной функции

$$(e^{\ln x})' = e^{\ln x} (\ln x)' = x \cdot (\ln x)'. \text{ Имеем } 1 = x \cdot (\ln x)'$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

---

# Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a N} = N, \quad N > 0, a > 0, a \neq 1.$$

---

1. Найдите числовое значение:

$$a^{\log_a 2}$$

$$a^{3 \log_a 2}$$

$$e^{2 \ln x}$$

2. Представъте в виде степени с основанием **e**:

---

4

6

a

$4^x$

$6^x$

$a^x$

# Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a N} = N, \quad N > 0, a > 0, a \neq 1.$$

1. Найдите числовое значение:

$$a^{\log_a 2} = 2$$

$$a^{3 \log_a 2} = 8$$

$$e^{2 \ln x} = x^2$$

2. Представьте в виде степени с основанием  $e$ :

4

$$e^{\ln 4}$$

6

$$e^{\ln 6}$$

$a$

$$e^{\ln a}$$

$4^x$

$$e^{x \ln 4}$$

$6^x$

$$e^{x \ln 6}$$

$a^x$

$$a^{x \ln a}$$

Найдем производные полученных функций:

$$(e^{x \ln 4})' = e^{x \ln 4} \cdot \ln 4 = 4^x \ln 4$$

$$(e^{x \ln 6})' = e^{x \ln 6} \ln 6 = 6^x \ln 6$$

$$(a^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

$$(a^{x \ln a})' = a^x \cdot \ln a$$

---

Формула перехода от одного основания логарифма к другому

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Найти производную: а)  $(\log_2 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)' = \left(\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln 2}$  ;

б)  $(\log_3 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)' = \left(\frac{1}{\ln 3} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln 3}$  ;

в)  $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

---

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

# I уровень

| Задание                                                                                                                          | Ответы              |                   |   |                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|-------------------|---|-------------------|
|                                                                                                                                  | 1                   | 2                 | 3 | 4                 |
| 1. Найдите значение производной функции при $x = 0$ .<br>а) $y = 3^x$                                                            | 0                   | $\ln 3$           | 1 | -1                |
| б) $y = x \cdot 2^x$                                                                                                             | -2                  | -1                | 1 | 2                 |
| в) $y = \log_2(x + 1)$                                                                                                           | - $\frac{1}{\ln 2}$ | $\frac{1}{\ln 2}$ | 1 | -1                |
| 2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 2^x + \cos x$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$ . | $\ln 2$             | - $\ln 2$         | 1 | $\frac{1}{\ln 2}$ |



II уровень.

1. Найдите значение  $f'(e^2)$ , если  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

---

- 1)  $\frac{1}{4}$  ;    2)  $\frac{3}{4}$  ;    3)  $e^2$  ;    4)  $e^4$

2. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции  $y = 5 \operatorname{tg} x - \cos x$  в его точке с абсциссой  $x_0 = 0$ .

Ответ : \_\_\_\_\_

3. Докажите, что функция  $y = \log_3(1 - 3x)$

убывает на  $D(y)$ .

I  
уровень

1. Найдите значение производной функции при  $x = 0$ .

а)  $y = 3^x$ . Решение.  $(3^x)' = 3^x \ln 3$ .  $f'(0) = 3^0 \ln 3 = \ln 3$ . Ответ: 2.

б)  $y = x \cdot 2^x$ . Решение.  $(x \cdot 2^x)' = 2^x + (2^x)' \cdot x = 2^x + 2^x \ln 2 \cdot x$ .  
 $f'(0) = 2^0 + 0 \cdot 2^0 \ln 2 = 1$ . Ответ: 3.

в)  $y = \log_2(x + 1)$ . Решение.  $(\log_2(x + 1))' = \frac{1}{(x + 1) \ln 2}$ .

$f'(0) = \frac{1}{(0 + 1) \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$ . Ответ: 2.

2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции  $y = 2^x + \cos x$  в его точке с абсциссой  $x_0 = 0$ .

Решение. Так как угловой коэффициент касательной равен  $f'(x_0)$ . Найдем производную функции  $f'(x) = (2^x + \cos x)' = 2^x \ln 2 - \sin x$ .  $K = f'(0) = 2^0 \ln 2 - \sin 0 = \ln 2$ . Ответ: 1.

II уровень

1. Найдите значение  $f'(e^2)$ , если  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ .

Решение.  $f'(x) = \frac{x' \cdot \ln x - x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

$$f'(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{(\ln e^2)^2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 1.

2. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции  $y = 5 \operatorname{tg} x - \cos x$  в его точке с абсциссой  $x_0 = 0$ .

Решение. Так как тангенс угла наклона касательной равен  $f'(x_0)$ . Найдем производную функции:  $y' = (5 \operatorname{tg} x - \cos x)' = 5 \operatorname{tg} x - \cos x \ln 5 \cdot \left( \frac{1}{(\cos x)^2} + \sin x \right)$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = 5 \operatorname{tg} 0 - \cos 0 \ln 5 \cdot \left( \frac{1}{(\cos 0)^2} + \sin 0 \right) = 5^{-1} \ln 5 \cdot 1 = \frac{\ln 5}{5}.$$

Ответ:  $\frac{\ln 5}{5}$ .

3. Докажите, что функция  $y = \log_3(1 - 3x)$  убывает на  $D(y)$ .

Решение. Область определения данной функции промежуток  $-\infty; \frac{1}{3}$ );

$$y'(x) = \frac{-3}{(1-3x) \ln 3} < 0 \text{ на интервале } \left(-\infty; \frac{1}{3}\right), \text{ следовательно, функция}$$

$y = \log_3(1 - 3x)$  убывает на  $D(y)$ .