Производные

Механический, физический, геометрический и экономический смысл производных.

- **Произво́дная** (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Задание. Найти производную функции $y=\sin\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)$

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$y'=\left(\sin\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)\right)'=\cos\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)'$$

В свою очередь производная $\left(\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}\right)\right)'$ также берется по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y'=\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$y'=\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'=\frac{\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$$

Ответ. $y'=\dfrac{\cos\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

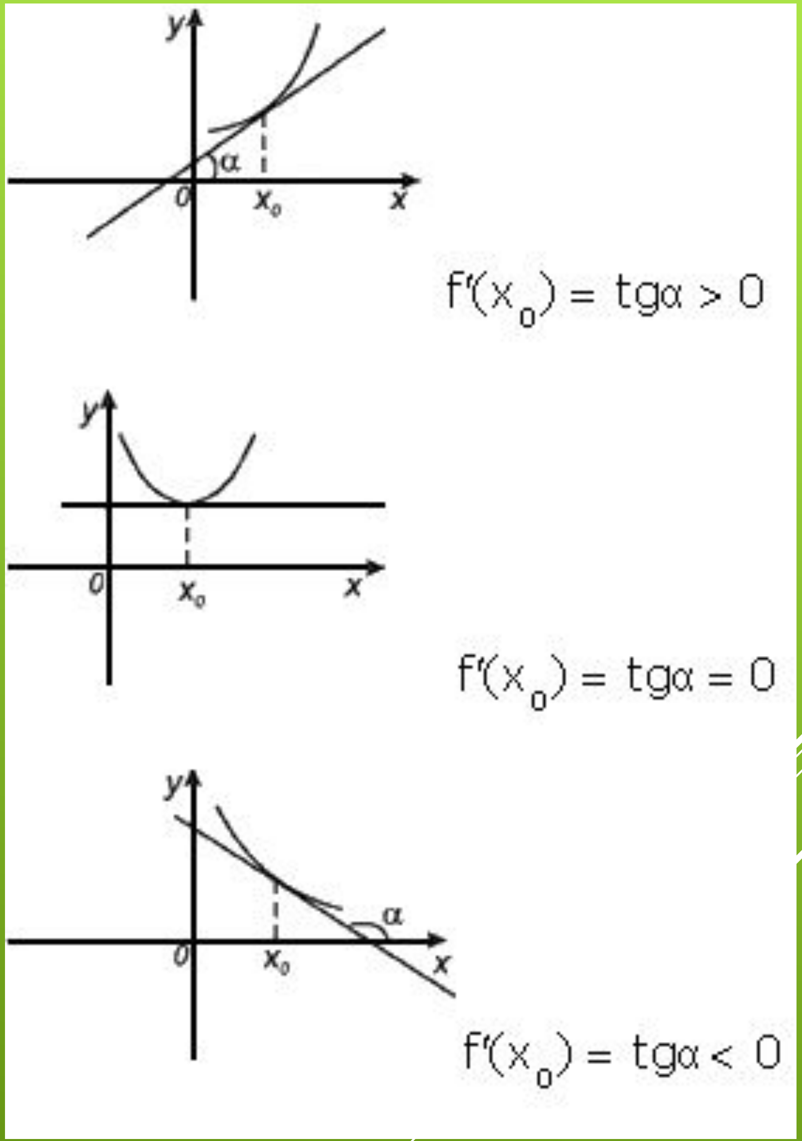
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

- **Производной** функции y = f(x) в точке X называется предел, если он существует, отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю. 2. геометрически – как угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

- Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в этой точке
- **Уравнение касательной** к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_a) + f'(x_a)(x - x_a)$$



ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

- Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону x(t), то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = x'(t)$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ.

- Производительность труда есть производная объема продукции по времени.

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Экономический смысл производной

Производительность труда есть производная объема продукции по времени. Рассмотрим некоторые понятия, иллюстрирующие экономический смысл производной.

Пусть y(x) — функция, характеризующая, например, издержки производства, где x — количество выпускаемой продукции. Тогда отношение $\frac{y(x)}{x}$ описывает средние издержки, приходящиеся на одно изделие. Средняя величина обозначается Ay или Af (от английского «average».) Среднее приращение, средний прирост, средняя скорость изменения определяется отношением $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Производная $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает предельные (маргинальные от английского «marginal») издержки производства. Величину Mf(x) = y' называют мгновенным приростом или мгновенной скоростью изменения y. Аналогично можно определить предельную выручку, предельный доход, предельную полезность и другие предельные величины.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

Рассмотрим движение материальной точки вдоль координатной оси, причём задан закон движения функцией $x(t)$ времени t. В течение интервала времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ материальная точка перемещается на расстояние $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, а её средняя скорость равна

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

При $\Delta t \to 0$ значение средней скорости стремится к определенной величине, которая называется мгновенной скоростью $v(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

А по определению производной, величина, стоящая в правой части, равна $x'(t_0)$, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Итак, **механический смысл производной:** скорость – это производная координаты по времени:

$$v(t) = x'(t)$$

МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ