ПРОИЗВОДНЫЕ

Механический, физический, геометрический
и экономический смысл производных.

- **Произво́дная** (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Задание. Найти производную функции $y=\sin(\operatorname{tg}(\sqrt{x}))$

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$y'=(\sin(\operatorname{tg}(\sqrt{x})))'=\cos(\operatorname{tg}(\sqrt{x}))\cdot(\operatorname{tg}(\sqrt{x}))'$$

В свою очередь производная $(\operatorname{tg}(\sqrt{x}))'$ также берется по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y'=\cos(\operatorname{tg}\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})'$$

$$y'=\cos(\operatorname{tg}\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y'=\frac{\cos(\operatorname{tg}\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$$

Ответ. $y'=\dfrac{\cos(\operatorname{tg}\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

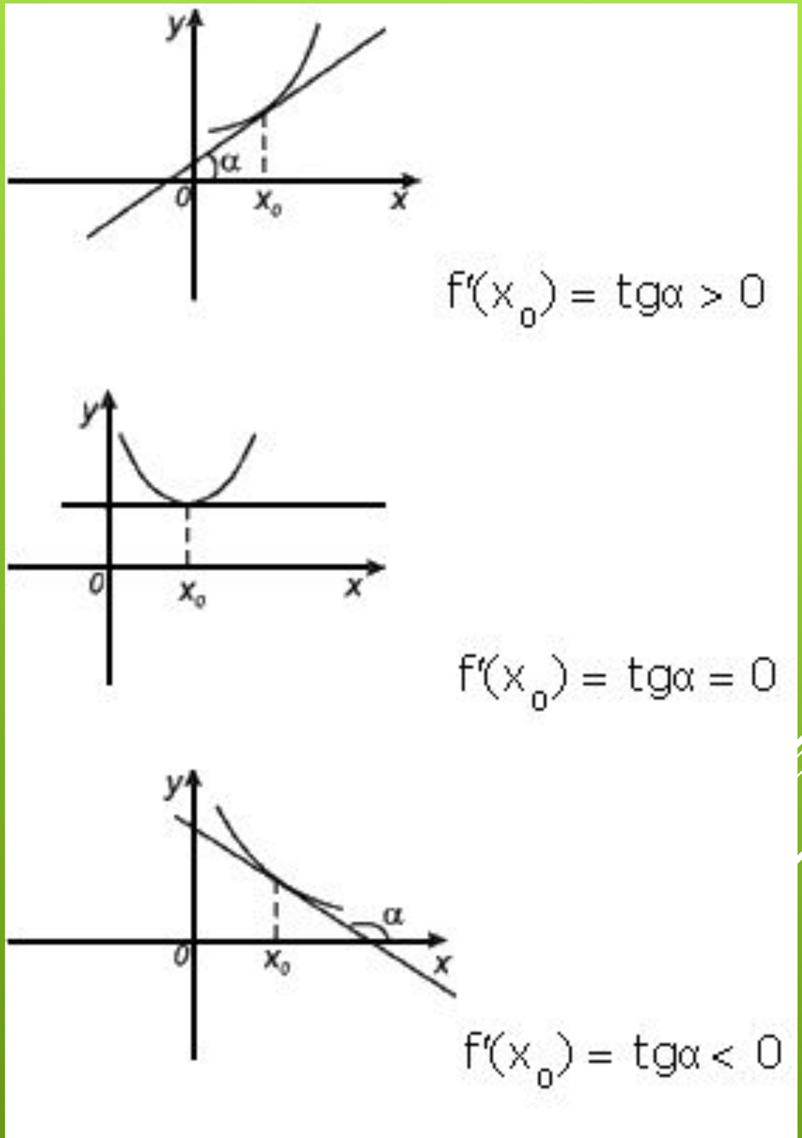
- **Производной** функции y = f(x) в точке X называется предел, если он существует, отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю. 2. геометрически – как угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

- Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в этой точке
- **Уравнение касательной** к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_a) + f'(x_a)(x - x_a)$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ



ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ.

- Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону x(t), то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = x'(t)$$

- Производительность труда есть <u>производная</u> объема продукции по времени.

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Экономический смысл производной

Производительность труда есть производная объема продукции по времени. Рассмотрим некоторые понятия, иллюстрирующие экономический смысл производной.

Пусть y(x) — функция, характеризующая, например, издержки производства, где x — количество выпускаемой продукции. Тогда отношение $\frac{y(x)}{x}$ описывает средние издержки, приходящиеся на одно изделие. Средняя величина обозначается Ay или Af (от английского «average».) Среднее приращение, средний прирост, средняя скорость изменения определяется отношением $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает предельные (маргинальные от английского «marginal») издержки производства. Величину Mf(x) = y' называют мгновенным приростом или мгновенной скоростью изменения y. Аналогично можно определить предельную выручку, предельный доход, предельную полезность и другие предельные величины.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

Рассмотрим движение материальной точки вдоль координатной оси, причём задан закон движения функцией $x(t)$ времени t. В течение интервала времени от t_0 до $t_0+\Delta t$ материальная точка перемещается на расстояние $\Delta x = x(t_0+\Delta t) - x(t_0)$, а её средняя скорость равна

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

При $\Delta t \to 0$ значение средней скорости стремится к определенной величине, которая называется мгновенной скоростью $v(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

А по определению производной, величина, стоящая в правой части, равна $x'(t_0)$, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Итак, **механический смысл производной:** скорость – это производная координаты по времени:

$$v(t) = x'(t)$$

МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ