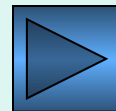
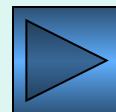
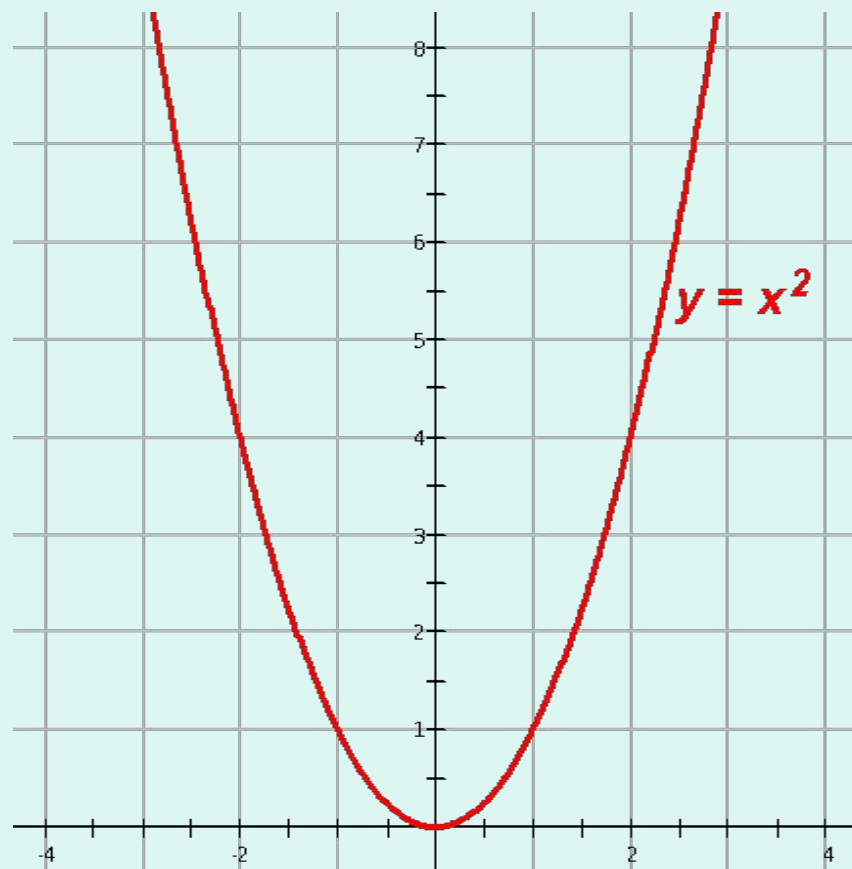


***Простейшие  
преобразования  
графиков  
функций***



Зная вид графика некоторой функции, можно при помощи геометрических преобразований построить график более сложной функции.

Рассмотрим график функции  $y=x^2$  и выясним, как можно построить, используя сдвиги вдоль координатных осей, графики функций вида  $y=(x-m)^2$  и  $y=x^2+n$ .



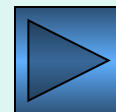
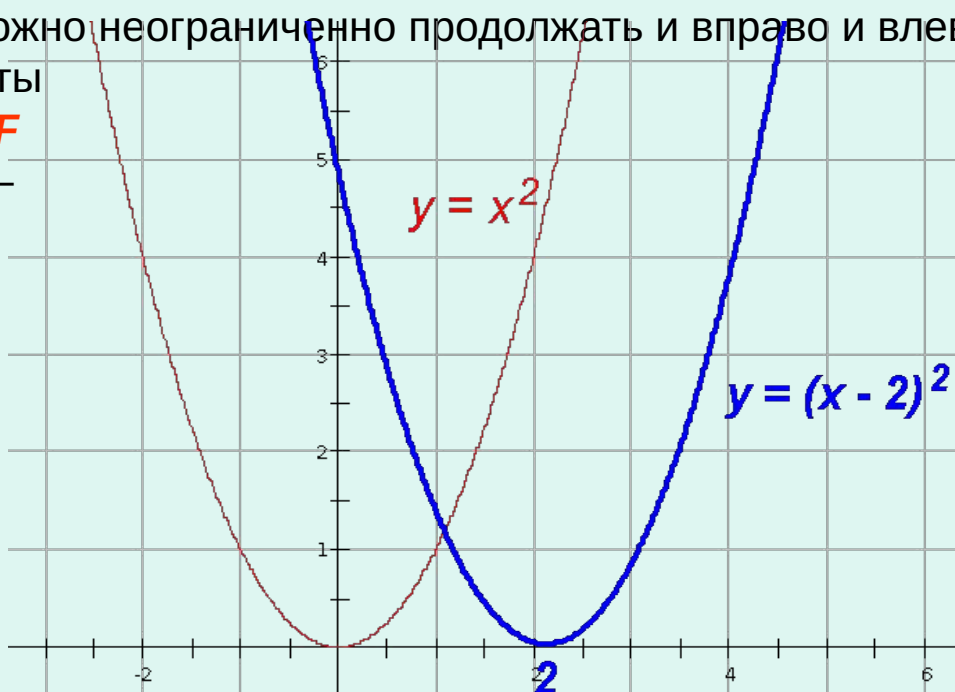
## Пример 1.

Построим график функции  $y=(x-2)^2$ , опираясь на график функции  $y=x^2$  (щелчок мышкой). График функции  $y=x^2$  есть некоторое множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение  $y=x^2$  в верное числовое равенство. Обозначим это множество точек, то есть график функции  $y=x^2$ , буквой  $F$ , а неизвестный нам пока график функции  $y=(x-2)^2$  обозначим буквой  $G$ . Сравним координаты тех точек графиков  $F$  и  $G$ , у которых одинаковые ординаты. Для этого составим таблицу:

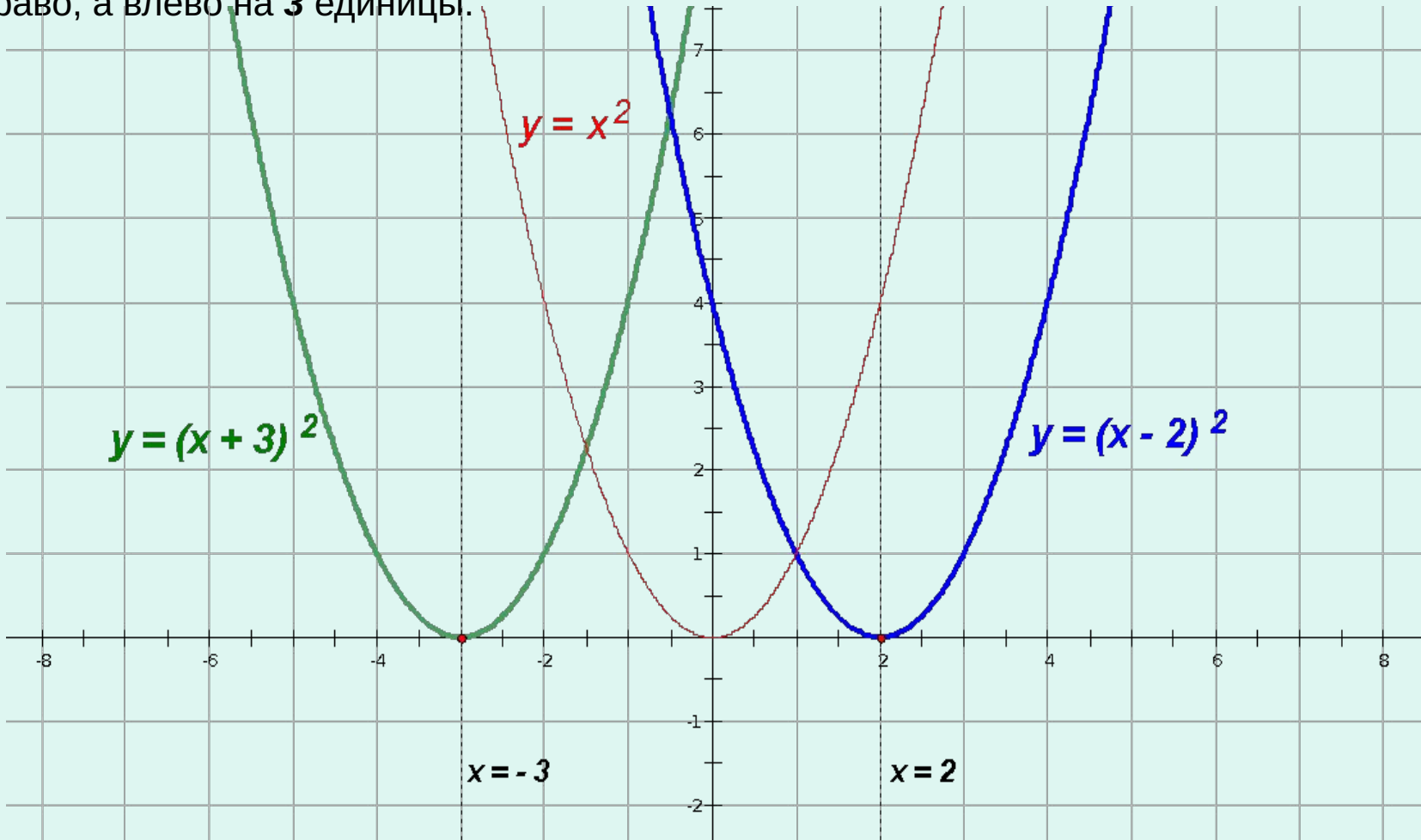
$x$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x^2$	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$(x-2)^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Рассматривая таблицу (которую можно неограниченно продолжать и вправо и влево), замечаем, что одинаковые ординаты имеют точки вида  $(x_0; y_0)$  графика  $F$  и  $(x_0 + 2; y_0)$  графика  $G$ , где  $x_0, y_0$  — некоторые вполне определенные числа.

На основании этого наблюдения можем сделать вывод, что график функции  $y=(x-2)^2$  можно получить из графика функции  $y=x^2$  путем сдвига всех его точек вправо на 2 единицы (щелчок мышкой).

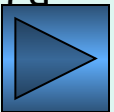


Таким образом, график функции  $y=(x - 2)^2$  может быть получен из графика функции  $y=x^2$  сдвигом вправо на **2** единицы. Рассуждая аналогично, можно доказать, что график функции  $y=(x + 3)^2$  также может быть получен из графика функции  $y=x^2$ , но сдвигом не вправо, а влево на **3** единицы.



Хорошо видно, что осями симметрии графиков функций  $y=(x - 2)^2$  и  $y=(x - 3)^2$  являются соответственно прямые  $x = 2$  и  $x = - 3$ .

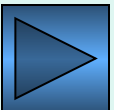
Чтобы увидеть графики, щелкни мышкой



Если вместо графика  $y=(x - 2)^2$  или  $y=(x + 3)^2$  рассмотреть график функции  $y=(x - m)^2$ , где  $m$  – произвольное число, то в проведенном ранее рассуждении ничего принципиально не изменится.

Таким образом, из графика функции  $y = x^2$  можно получить график функции  $y=(x - m)^2$  с помощью сдвига **вправо** на  $m$  единиц в направлении оси  $Ox$ , если  $m > 0$ , или **влево**, если  $m < 0$ . График функции  $y=(x - m)^2$  является параболой с вершиной в точке  $(m; 0)$ .

Этот вывод допускает еще **большее обобщение**:  
*график функции  $y=f(x - m)$  можно получить из графика функции  $y=f(x)$  путем сдвига графика функции  $y=f(x)$  **вправо** на  $m$  единиц в направлении оси  $Ox$ , если  $m > 0$ , или **влево**, если  $m < 0$ .*



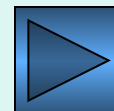
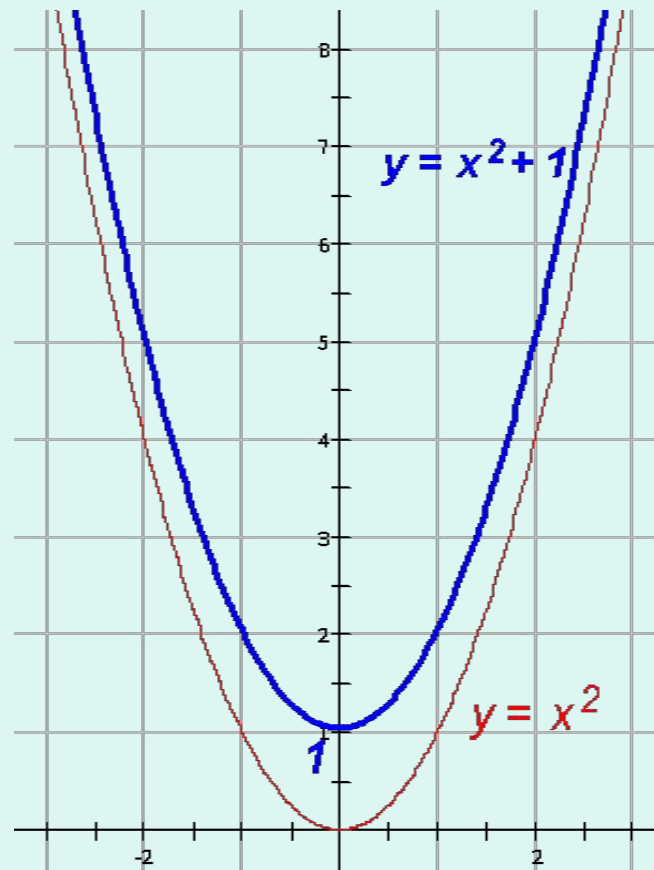
## Пример 2.

Построим график функции  $y = x^2 + 1$ , опираясь на график функции  $y = x^2$  (щелчок мышкой). Сравним координаты точек этих графиков, у которых одинаковые абсциссы. Для этого составим таблицу:

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$x^2 + 1$	10	5	2	1	2	5	10

Рассматривая таблицу, замечаем, что одинаковые абсциссы имеют точки вида  $(x_0; y_0)$  для графика функции  $y = x^2$  и  $(x_0; y_0 + 1)$  для графика функции  $y = x^2 + 1$ .

На основании этого наблюдения можем сделать вывод, что график функции  $y = x^2 + 1$  можно получить из графика функции  $y = x^2$  путем сдвига всех его точек вверх (вдоль оси  $Oy$ ) на **1** единицу (щелчок мышкой).

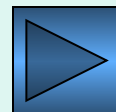


Итак, зная график функции  $y=x^2$ , можно построить график функции  $y=x^2 + p$  с помощью сдвига первого графика вверх на  $p$  единиц, если  $p>0$ , или вниз на  $|p|$  единиц, если  $p<0$ . Графиком функции  $y=x^2 + p$  является парабола с вершиной в точке  $(0; p)$ .

### Обобщение:

график функции  $y=f(x) + p$  можно получить из графика функции  $y=f(x)$  путем сдвига графика функции  $y=f(x)$  *вверх* на  $p$  единиц в направлении оси  $Oy$ , если  $p > 0$ , или *вниз*, если  $p < 0$ .

**Вывод:** график функции  $y=f(x - m) + p$  может быть получен из графика функции  $y=f(x)$  с помощью последовательно выполненных двух параллельных переносов: сдвига вдоль оси  $Ox$  на  $m$  единиц и сдвига графика  $y=f(x - m)$  вдоль оси  $Oy$  на  $p$  единиц.



Из выше сказанного следует, что графиком функции  $y=(x - m)^2 + n$  является парабола с вершиной в точке  $(m; n)$ . Ее можно получить из параболы  $y=x^2$  с помощью двух последовательных сдвигов.

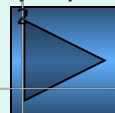
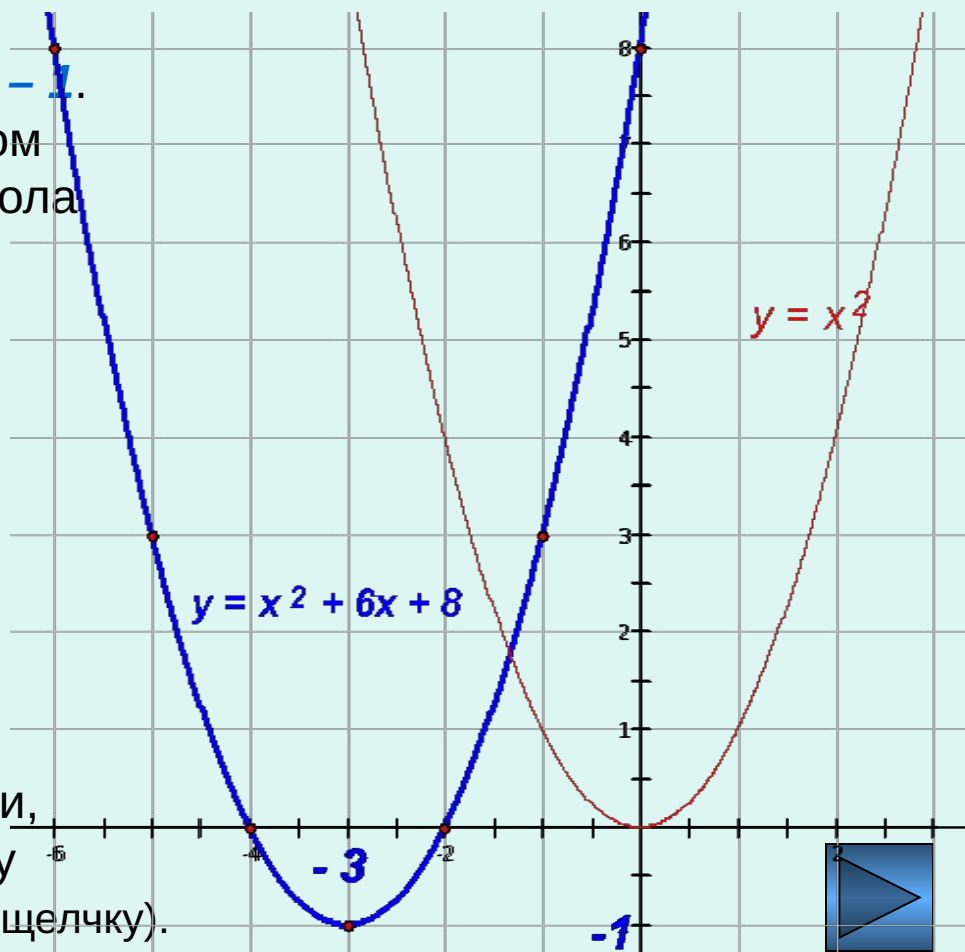
### Пример 3.

Докажем, что графиком функции  $y = x^2 + 6x + 8$  является парабола, и построим график.

**Решение.** Представим трехчлен  $x^2 + 6x + 8$  в виде  $(x - m)^2 + n$ . Имеем  $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 1 = (x + 3)^2 - 1$ . Отсюда  $y = (x + 3)^2 - 1$ . Значит, графиком функции  $y = x^2 + 6x + 8$  является парабола с вершиной в точке  $(-3; -1)$ . Учитывая, что ось симметрии параболы – прямая  $x = -3$ , при составлении таблицы значения аргумента функции следует брать симметрично относительно прямой  $x = -3$ :

$x$	-6	-5	-4	<b>-3</b>	-2	-1	0
$y$	8	3	0	-1	0	3	8

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых занесены в таблицу (щелчок мышкой), проводим параболу (по щелчку).





## Постройте самостоятельно графики функций:

- 1)  $y = x^2 + 2;$
- 2)  $y = x^2 - 3;$
- 3)  $y = (x - 1)^2;$
- 4)  $y = (x + 2)^2;$
- 5)  $y = (x + 1)^2 - 2;$
- 6)  $y = (x - 2)^2 + 1;$
- 7)  $y = (x + 3)(x - 3);$
- 8)  $y = x^2 + 4x - 4;$
- 9)  $y = x^2 - 6x + 11.$

шаблон  
параболы

$$y = x^2$$

При построении графика функции вида  $y = (x - m)^2 + n$  удобно пользоваться заранее заготовленным шаблоном параболы  $y = x^2$ .

Далее можно сверить свои результаты с тем, что должно быть в действительности



