

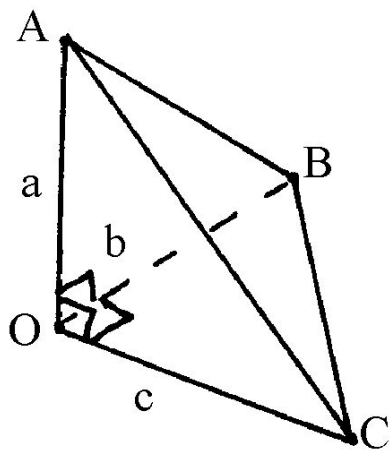




# Пространственная теорема Пифагора

- 
- Все плоские углы тетраэдра  $OABC$  при вершине  $O$  — прямые. Докажите, что квадрат площади треугольника  $ABC$  равен сумме квадратов площадей остальных граней (пространственная теорема Пифагора).
- 



Пусть  $OA=a$ ;  $OC=c$ ;  $OB=b$ . Площадь трех верхних граней равна:  $\frac{1}{2}(cb + ba + ac)$ , а сумма квадратов

этих площадей:  $\frac{1}{4}(c^2b^2 + b^2a^2 + a^2c^2)$ .

$$AC^2=a^2+c^2; \quad AB^2=a^2+b^2; \quad CB^2=c^2+b^2.$$

По теореме косинусов:

$$a^2+c^2=a^2+b^2+c^2+b^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+b^2)}\cos ABC;$$

$$\cos ABC = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+b^2)}}.$$

$$S = \frac{1}{4} AB^2 \cdot BC^2 \cdot \sin^2 ABC = \frac{1}{4} (a^2+b^2)(c^2+b^2) \left( 1 - \frac{b^4}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} \right) =$$

$$= ((a^2+b^2)(c^2+b^2) - b^4) \frac{1}{4} = (a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + b^4 - b^4) \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2),$$

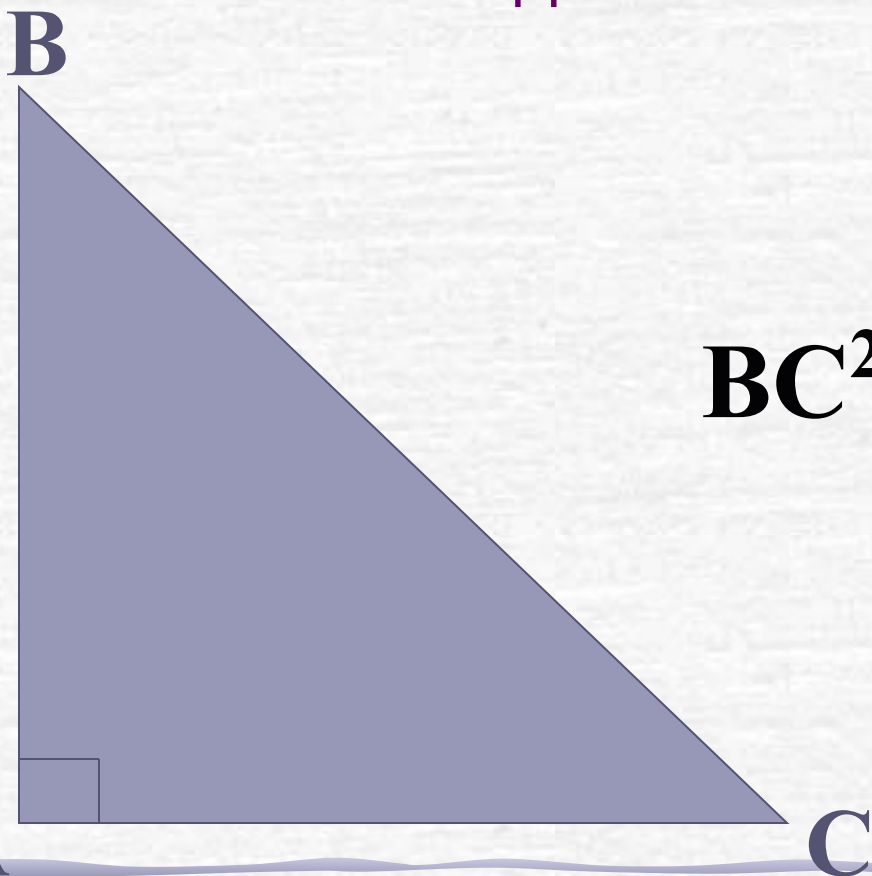
# Три формулировки теоремы Пифагора:



- *В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов;*
- *Квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов длин двух его взаимно перпендикулярных сторон;*
- *Квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на любые две взаимно перпендикулярные прямые.*



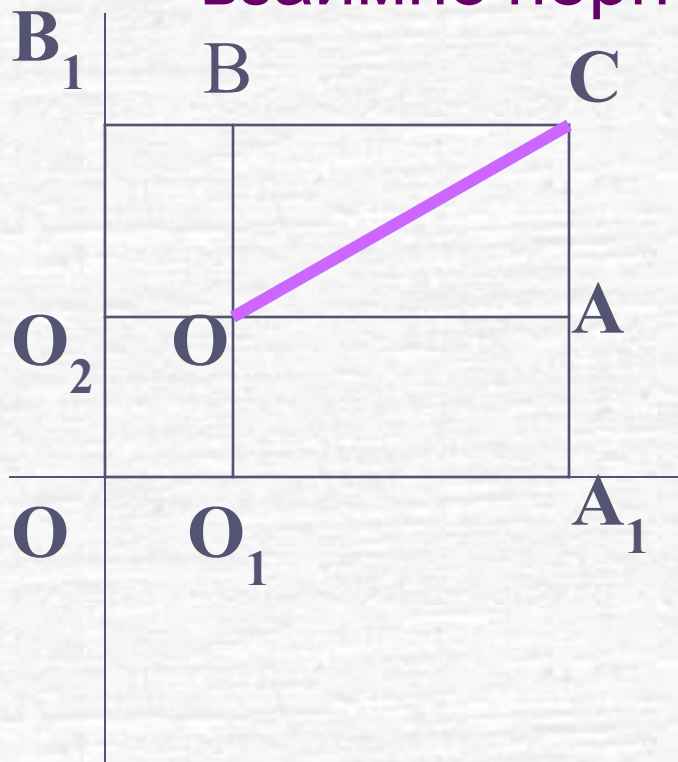
1. В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$



2. Квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов длин двух его взаимно перпендикулярных сторон



$$OC^2 = OA^2 + OB^2$$

$$OA = O_1A_1$$

$$OB = O_2B_1$$

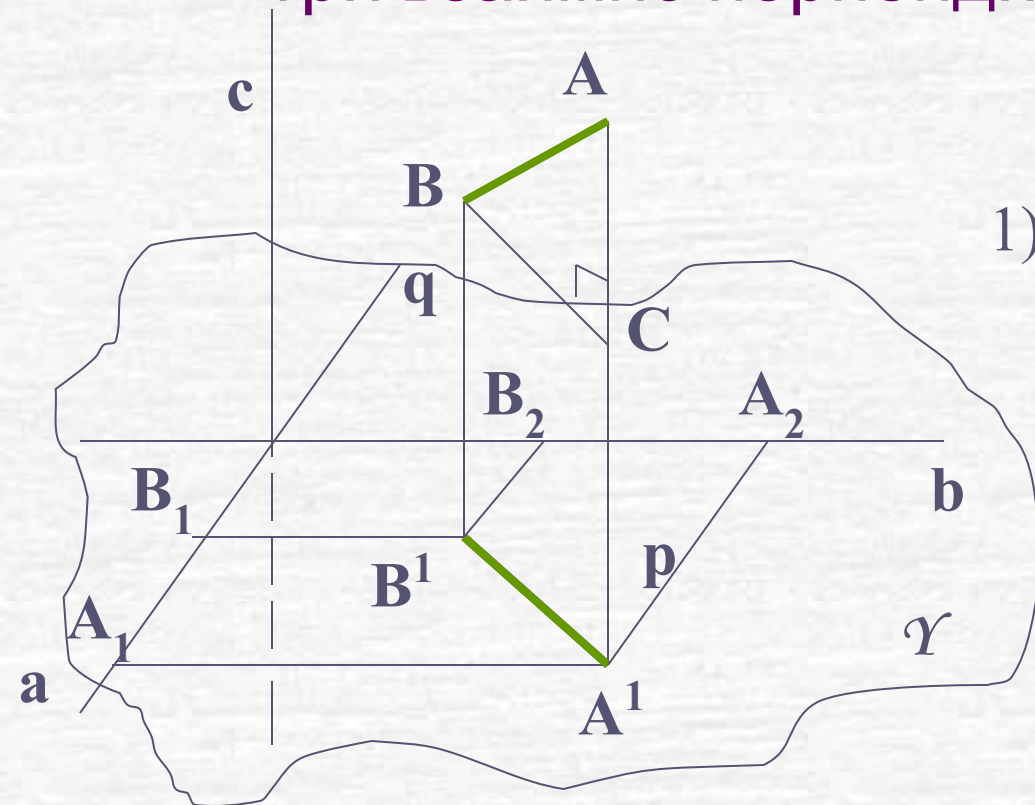


3. Квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на любые три взаимно перпендикулярные прямые

**Доказательство:**

- 1) Отрезки  $A^1B^1$  и  $AC$  – это проекции отрезка  $AB$  на две взаимно перпендикулярные прямые к плоскости  $\gamma$ . По теореме Пифагора (3 формул.)

$$AB^2 = A^1B^1{}^2 + AC^2;$$



2) Спроектируем отрезок  $A^1B^1$  на прямую  $a$  в отрезок  $A_1V_1$  и на прямую  $b$  в отрезок  $A_2V_2$ . По теореме Пифагора

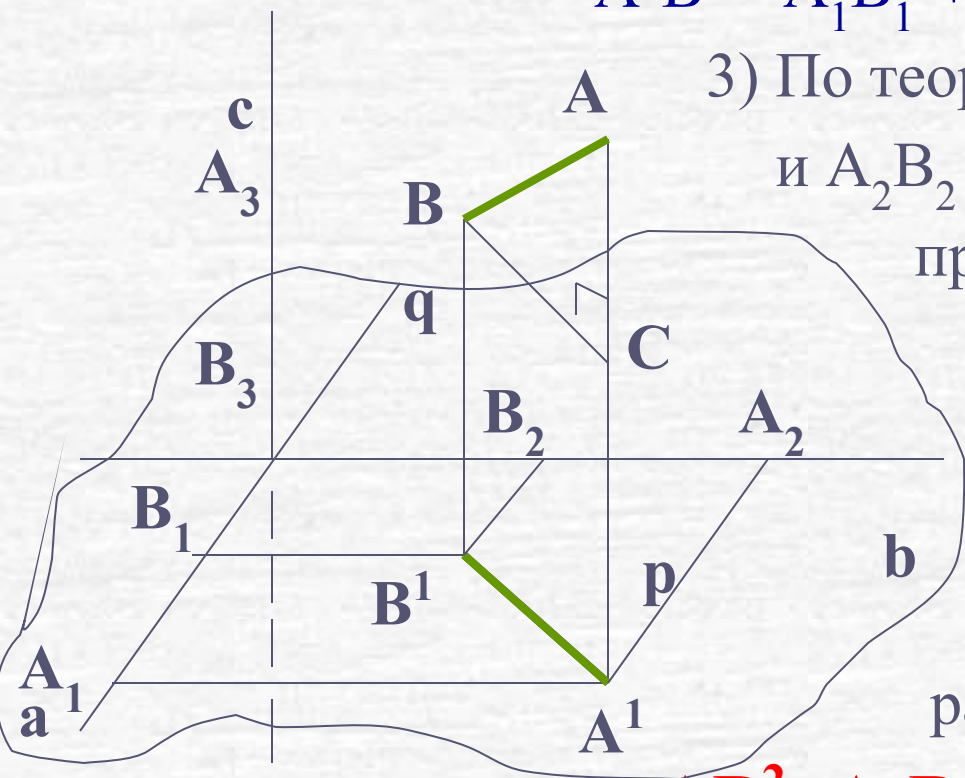
$$A^1B^{12} = A_1V_1^2 + A_2V_2^2;$$

3) По теореме о проекциях отрезки  $A_1V_1$  и  $A_2V_2$  – это проекции отрезка  $AB$  на прямые  $a$  и  $b$ .  $A_3V_3 \parallel AC$ .

$$A_3V_3 = AC;$$

4) Заменяя длины  $AC$  и  $A^1B^1$  длинами проекций  $A_1V_1$ ,  $A_2V_2$ ,  $A_3V_3$ , получаем равенство:

$$\underline{AB^2 = A_1V_1^2 + A_2V_2^2 + A_3V_3^2}$$







***Всегда хочется  
быть выше  
перед страхом  
казаться  
неумелым...***

***Будь уверен в  
себе***

***все  
получится!!!***