Прямая и двойственная задачи и их решение симплекс-методом

Лекции 8, 9

Решение симплекс-методом экономической задачи.

Для изготовления различных изделий А, В и С предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода, цена и общее количество сырья даны в таблице.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	А	В	С	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Цена одного изделия в д.е.	9	10	16	

Изделия могут производиться в любых соотношениях(сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным сырьем.

Составить план производства, при котором общая стоимость всей произведенной продукции является максимальной.

Решение

Составим ЦФ и ограничения.

Найти максимум функции

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$$

ï ðè î ãðàí è÷åí èÿõ

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0.$$

Запишем задачу в форме основной задачи линейного программирования. Введем дополнительные переменные по числу ограничений

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.$$

Теперь запишем задачу в векторной форме.

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Так как есть три единичных вектора , то можно сразу записать опорный план

$X=(0,0,0,360,192,180)$.

Составим нулевую симплекс-таблицу

Таблица 0.

i	Базис	Сб	c_j	9	10	16	0	0	0	Q
			P_0 (план)	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	Q
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0	30
2	P_5	0	192	6	4	**8**	0	1	0	24
3	P_6	0	180	**5**	3	3	0	0	**1**	**60**
4			0	-9	-10	-16	0	0	0	

Полученный опорный план проверяем на оптимальность.

Вычисляем значение целевой функции и симплекс-разности.

$$F_0 = c \cdot P_0 = 0 \cdot 360 + 0 \cdot 192 + 0 \cdot 180 = 0,$$

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = c \cdot P_1 - c_1 = -9,$$

$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = cP_2 - c_2 = -10, \ldots$$

ВГУЭС

Как видно из 0-й таблицы отличными от нуля являются переменные x_4, x_5, x_6, а x_1, x_2, x_3 равны нулю, т.к. они небазисные, а свободные. Дополнительные же переменные x_4, x_5, x_6 принимают свои значения в соответствии с ограничениями.

Эти значения переменных отвечают такому «плану», при котором ничего не производится, сырье не используется и значение целевой функции равно нулю, т. е. стоимость произведенной продукции отсутствует.

Такой план, конечно, не является оптимальным. Это видно и из 4-й строки таблицы, в которой имеется три отрицательных оценки -9, -16 и -10.

Отрицательные числа не только свидетельствуют о возможности увеличения общей стоимости производимой продукции (в столбцах над отрицательными оценками стоят положительные числа), но и показывают, на сколько увеличится эта сумма при введении в план единицы того или иного вида продукции.

Так, число -9 означает, что при включении в план производства одного изделия А обеспечивается увеличение стоимости продукции на 9 д.е.

Если включить в план производства по одному изделию В и С, то общая стоимость изготовляемой продукции возрастет соответственно на 10 и 16 д.е. Поэтому с экономической точки зрения целесообразным является включение в план изделий С.

Это же необходимо сделать и с той точки зрения, что -16 является наименьшей отрицательной оценкой. Значит, в базис введем вектор P_3 .

Найдем число Q .

$$Q=\min\left\{\frac{360}{12};\frac{192}{8};\frac{180}{3}\right\}=\min\{30;24;60\}$$

Введем его в последний столбец таблицы. Число 24 соответствует вектору P_5 .

192/8=24 с экономической точки зрения означает, какое количество изделий С предприятие может изготовлять с учетом норм расхода и имеющихся объемов сырья каждого вида.

Так как сырья каждого вида имеется соответственно 360, 192 и 180 кг, а на одно изделие С требуется затратить сырья каждого вида 12, 8 и 3 кг, то максимальное число изделий С, которое может быть изготовлено предприятием равно min{360/12,192/8,180/3}=192/8=24, т.е. ограничивающим фактором для производства изделий С является имеющийся объем сырья 2-го вида. С учетом его предприятие может производить 24 изделия С.При этом сырье 2-го вида будет полностью использовано и , значит, вектор подлежит исключению из P_5 базиса.

Составляем следующую таблицу. В ней разрешающей является вторая строка, а разрешающим столбцом –третий. На их пересечении стоит элемент 8.

Разделим вторую строку на 8, а затем обнулим по методу Жордана- Гаусса или по формулам треугольника третий столбец.

Таблица 1.

i	Базис	Сб	P_0 (план) \ c_j	9	10	16	0	0	0	Q
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_4	0	72	9	**9**	0	1	-3/2	0	**8**
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0	48
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1	72
4			384	3	-2	0	0	2	0	

Здесь мы умножили 2-ю строку на (-12) и прибавили к 1-й, а затем умножили 2-ю строку на (-3) и прибавили к 3-й строке.

Получили новый опорный план X=(0,0,24,72,0,108) и значение целевой функции

$F_1 = cP_0 = 16 \cdot 24 + 0 \cdot 72 + 0 \cdot 108 = 384$.

Подсчитаем симплекс-разности и заполним 4-ю строку таблицы.

При данном плане производства изготовляется 24 изделия С и остается неиспользованным 72 кг сырья 1-го и 108 кг сырья 3-го вида. 2-й вид сырья использован полностью. Стоимость всей продукции при этом плане составляет 384 д.е. Указанные числа записаны в столбце План. Это опять параметры задачи, но они претерпели изменения. Изменились и данные других столбцов. Их экономическое содержание стало еще более сложным .

Имеется одна отрицательная оценка -2. План можно улучшить. Введем в базис вектор P_2. Вычислим

$$Q = \min\left\{\frac{72}{9}; \frac{24}{1/2}; \frac{108}{3/2}\right\} = \min\{8; 48; 72\} = 8.$$

Выводим из базиса P_4 .

Разрешающими будут 1-я строка и 2-й столбец. Разрешающий элемент 9. Разделим на 9 1-ю строку , заполним 1-ю строку новой таблицы, затем обнулим 2-й столбец. Для этого умножим 1-ю строку на (-1/2) и прибавим ко 2-й, а затем умножим 1-ю строку на (-3/2) и прибавим к 3-й строке. Заполним таблицу 2.

Таблица 2.

i	Базис	Сб	P_0 (план) \ c_j	9	10	16	0	0	0	Q
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_2	10	8	1	**1**	0	1/9	-1/6	0	
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0	
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1	
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0	

Получен новый опорный план X=(0,8,20,0,0,96) и новое значение ЦФ

$F_2 = cP_0 = 10 \cdot 8 + 16 \cdot 20 = 400.$

Все оценки теперь неотрицательны.

В этом мы убеждаемся ,
вычисляя симплекс-разности

$$\Delta_1 = cP_1 - c_1 = 10 \cdot 1 + 16 \cdot 0.25 - 9 = 5,$$

$$\Delta_2 = cP_2 - c_2 = 10 \cdot 1 + 16 \cdot 0 - 10 = 0,$$

$$\Delta_3 = cP_3 - c_3 = 10 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 16 = 0,$$

$$\Delta_4 = cP_4 - c_4 = 10 \cdot 1/9 - 16 \cdot 1/8 + 0 \cdot (-1/6) = 2/9,$$

$$\Delta_5 = cP_5 \text{-} c_5 = 10 \cdot (\text{-}1/6) + 16 \cdot 5/24 + 0(\text{-}1/2) = 5/3,$$

$$\Delta_6 = 0.$$

Оптимальным планом производства не предусмотрен выпуск изделий А. Введение в план выпуска продукции вида А привело бы к уменьшению указанной общей стоимости . Это видно из 4-й строки столбца , где число 5 показывает, что при данном плане включение в него выпуска единицы изделия А приводит лишь к уменьшению общей величины стоимости на 5 д.е.

Итак, план предусматривает выпуск 8 изделий В и 20 изделий С. Сырье видов 1 и 2 используется целиком, а вида 3- неиспользованным остается 96 кг.

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Каждой ЗЛП можно поставить в соответствие задачу, называемую двойственной к исходной задаче.

Рассмотрим задачу об использовании ресурсов. Предположим, что предприятие А производит n видов продукции, величина выпуска которых определяется переменными

$$x_1,\ x_2,\ \dots,x_n \qquad .$$

В производстве используются m различных видов ресурсов, объем которых ограничен величинами $b_1,\ b_2,\ \dots,b_n$.

Известны нормы затрат каждого ресурса на единицу каждого вида продукции, образующие матрицу ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

а также стоимость единицы продукции каждого вида

$$c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$$

Требуется организовать производство так, чтобы предприятию А была обеспечена максимальная прибыль.

Задача сводится к нахождению неотрицательных переменных

$$x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n \quad ,$$

при которых расход ресурсов не превышает заданного их количества, а стоимость всей продукции достигнет максимума.

В математической форме задача записывается следующем виде:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \max$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}.$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}.$$

По этим же исходным данным может быть сформулирована другая задача.

Предположим, что предприятие В решило закупить все ресурсы, которыми располагает предприятие А. В этом случае предприятию В необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы, исходя из следующих условий:

- общая стоимость ресурсов для предприятия В должна быть минимальной;
- за каждый вид ресурса предприятию А надо уплатить не менее той суммы, которую это предприятие может получить при переработке данного вида ресурса в готовую продукцию.

Если обозначить через $y_1, y_2, ..., y_n$ цены, по которым предприятие В покупает ресурсы у предприятия А, то задача сводится к следующему: найти такие значения переменных $y_1, y_2, ..., y_n$, при которых стоимость ресурсов, расходуемых на единицу любого вида продукции не меньше прибыли (цены) за эту единицу продукции, а общая стоимость ресурсов достигает минимума, т.е.какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов $y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n$, чтобы при заданных объемах имеющихся ресурсов b_i, при заданных стоимостях $c_j \quad (j = \overline{1,n})$ единицы продукции и нормах расходов a_{ij} минимизировать общую оценку затрат на всю продукцию.

Мат. модель двойственной задачи

В математической форме задача записывается в виде:

$$F^* = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \geq c_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \geq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \geq c_n, \\ y_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Экономический смысл переменных двойственной задачи

Переменные y_i двойственной задачи в литературе могут иметь различные названия :учетные, неявные, теневые, объективно обусловленные оценки, двойственные оценки или «цены» ресурсов.

Эти две задачи образуют пару взаимно двойственных задач, любая из которых может рассматриваться как исходная. Решение одной задачи дает оптимальный план производства продукции, а решение другой – оптимальную систему оценок сырья, используемого для производства этой продукции.

Двойственные задачи линейного программирования называют симметричными, если они удовлетворяют следующим свойствам:

- число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений исходной задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу равно числу переменных в исходной;
- в одной задаче ищется максимум целевой функции, в другой – минимум;
- коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи;

ВГУЭС

- в каждой задаче система ограничений задается в виде неравенств, причем, в задаче на отыскание максимума, все неравенства вида «≤», а в задаче на отыскание минимума, все неравенства вида «≥»;
- матрица коэффициентов системы ограничений получается одна из другой путем транспонирования;
- каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой задачи, номер переменной совпадает с номером ограничения;
- условия не отрицательности переменных сохраняются в обеих задачах;

Решение симметричных двойственных задач

Первая теорема двойственности.

Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то оптимальное решение имеет и другая задача, при этом значения целевых функций задач равны между собой.

Если целевая функция одной из задач не ограничена, то другая задача вообще не имеет решения

Экономическое содержание первой теоремы двойственности

Если задача определения оптимального плана , максимизирующего выпуск продукции, разрешима, то разрешима и задача определения оценок ресурсов. Причем цена продукта, полученного в результате реализации оптимального плана , совпадает с суммарной оценкой ресурсов.

Совпадения значений целевых функций для соответствующих решений пары двойственных задач достаточно для того, чтобы эти решения были оптимальными.

Решая ЗЛП симплекс-методом, мы одновременно решаем и исходную и двойственную задачи.

ВГУЭС

Метод одновременного решения пары двойственных задач

Исходная задача: **Двойственная задача:**

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n+m. \end{cases}$$

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m - y_{m+2} = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n, \\ y_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m+n. \end{cases}$$

Число переменных в задачах одинаково и равно m + n. В исходной задаче базисными переменными являются вспомогательные неотрицательные переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$,
а в двойственной задаче – вспомогательные неотрицательные переменные $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{n+m}$.
Базисным переменным одной задачи соответствуют свободные переменные другой задачи, и наоборот.

Переменные исходной задачи	
основные	дополнительные
$x_1 \quad x_2 \; \ldots \; x_n$	$x_{n+1} \quad x_{n+2} \; \ldots x_{n+m}$
$\updownarrow \quad \updownarrow \; \ldots \; \updownarrow$	$\updownarrow \quad \updownarrow \; \ldots \; \updownarrow$
$y_{m+1} \quad y_{m+2} \; \ldots \; y_{m+n}$	$y_1 \quad y_2 \; \ldots \; y_m$
дополнительные	основные
Переменные двойственной задачи	

При решении ЗЛП табличным симплекс-методом решение двойственной задачи содержится в последней строке таблицы.

Это Δ_j .

Причем основные переменные двойственной задачи содержатся в столбцах, соответствующих дополнительным переменным исходной задачи, а дополнительные переменные двойственной задачи содержатся в столбцах, соответствующих основным (первоначальным) переменным исходной задачи.

Пример.

Сформулируем модель задачи, двойственной к задаче из примера 2 (начало лекции):

Найти максимум функции

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$$

ï ðè î ãðàí è÷åí èÿõ

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0.$$

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Цена одного изделия в д.е.	9	10	16	

Матрица исходной задачи

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 15 & 12 \\ 6 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица двойственной задачи

$$A^T = \begin{pmatrix} 18 & 6 & 5 \\ 15 & 4 & 3 \\ 12 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Переменные исходной задачи x_1, x_2, x_3 - это количество изделий А,В и С. Введем переменные двойственной задачи $y_1, \; y_2, \; y_3$

Найти минимум функции

$$F^* = 360y_1 + 192y_2 + 180y_3 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 18y_1 + 6y_2 + 5y_3 \geq 9, \\ 15y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 10, \\ 12y_1 + 8y_2 + 3y_3 \geq 16, \end{cases}$$

$$y_1, \; y_2, \; y_3 \geq 0.$$

ВГУЭС

Рассмотрим последнюю таблицу исходной задачи

i	Базис	Сб	c_j	9	10	16	0	0	0	Q
			P_0 (план)	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_2	10	8	1	**1**	0	1/9	-1/6	0	
2	P_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0	
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1	
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0	

Из последней строки составим оптимальный план двойственной задачи.

Переменные исходной задачи	
основные	дополнительные
$x_1 \quad x_2 \quad x_3$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ $y_4 \quad y_5 \quad y_6$	$x_4 \quad x_5 \quad x_6$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ $y_1 \quad y_2 \quad y_3$
дополнительные	основные
Переменные двойственной задачи	

Значение y_1 в последней строке столбца P_4, т.е. $y_1 = \frac{2}{9}$;

значение $y_2 = \frac{5}{3}$ в последней строке столбца P_5,

значение $y_3 = 0$ в последней строке столбца P_6.

Остальные значения находим в столбцах 1,2,3.

$$Y = (\frac{2}{9}; \frac{5}{3}; 0; 5; 0; 0)$$

При этом

$$F^* = 360 \cdot \frac{2}{9} + 192 \cdot \frac{5}{3} + 180 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 400$$

-это минимальные затраты на всю продукцию.

2/9 и 5/3 –это теневые цены сырья 1-го и 2-го видов соответственно.