Презентация для учебника
Козлова С. А., Рубин А. Г.
«Математика, 6 класс. Ч. 1»

ГЛАВА IV ПРОПОРЦИИ

4.4 Прямая и обратная пропорциональные зависимости

Школа 2100
school2100.ru

Прямо пропорциональные величины

Если нам известно,
что скорость автомобиля составляет 60 км/ч,
то мы можем рассчитать пройденное
им расстояние за любой отрезок времени:

Время (ч)	1	2	3	4	5	6
Расстояние (км)	60	120	180	240	300	360

Данные этой таблицы подчиняются зависимости:

если время увеличить (уменьшить) в некоторое число раз, то и расстояние увеличится (уменьшится) в это же число раз.

Прямо пропорциональные величины

Время (ч)	1	2	3	4	5	6
Расстояние (км)	60	120	180	240	300	360

Связь между **значениями времени** и **значениями расстояния** можно записать в виде **пропорции**:

$$\frac{2}{3} = \frac{120}{180}; \quad \frac{3}{4} = \frac{180}{240} \text{ и т.д.}$$

Определение прямо пропорциональных величин

Если **две величины связаны между собой** так,

что **с увеличением** (**уменьшением**) **одной в несколько раз**

вторая увеличивается (**уменьшается**) **во столько же раз**,

то такие величины называются **прямо пропорциональными**.

Прямо пропорциональные величины

Если две величины прямо пропорциональны, то отношение любых двух значений первой величины равно отношению соответствующих значений второй величины.

Примеры

$\frac{t_1}{t_2} = \frac{S_1}{S_2}$ – при постоянной скорости

$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_1}{S_2}$ – при постоянном времени

Прямо пропорциональные величины

Примеры прямо пропорциональных величин:

количество товара и его стоимость при постоянной цене

длина прямоугольника и его площадь при постоянной ширине

объём параллелепипеда и площадь его основания при постоянной высоте

величина дроби и её числитель при постоянном знаменателе

объём выполненной работы и затраченное на неё время при постоянной производительности труда

производительность труда и объём выполненной работы при постоянном времени

длина пути, проходимого равномерно движущимся телом, и время его движения

скорость и длина пути при постоянном времени

Прямо пропорциональные величины

Пример

За 2 часа машина прошла 120 км. Требуется узнать, какое расстояние она пройдёт за 6 ч, если скорость останется неизменной.

Метод 1

Сначала узнаем, во сколько раз увеличится время движения:

6 : 2 = 3 раза.

Следовательно, путь так же увеличится в три раза:

120 · 3 = 360 (км).

Прямо пропорциональные величины

Пример

За 2 часа машина прошла 120 км. Требуется узнать, какое расстояние она пройдёт за 6 ч, если скорость останется неизменной.

Метод 2

Условие этой задачи можно записать так:

$$\begin{aligned} &\downarrow\; 120 \text{ км} - 2 \text{ ч} \;\downarrow \\ &\quad\;\; x \text{ км} - 6 \text{ ч} \end{aligned}$$

Одинаково направленные стрелки показывают, что величины прямо пропорциональны, то есть отношение значений расстояния 120 : x равно отношению соответствующих значений времени 2 : 6.

Прямо пропорциональные величины

Пример

За 2 часа машина прошла 120 км. Требуется узнать, какое расстояние она пройдёт за 6 ч, если скорость останется неизменной.

Метод 2

$$\downarrow \begin{array}{r} 120 \text{ км} - 2 \text{ ч} \\ x \text{ км} - 6 \text{ ч} \end{array} \downarrow$$

Составим пропорцию: $\dfrac{120}{x} = \dfrac{2}{6}$.

Теперь решим её:

$x = \dfrac{120 \cdot 6}{2}$, т.е. $x = 120 \cdot 3$ (км); $x = 360$ км.

Прямо пропорциональные величины

Часто вместо
«прямо пропорциональные величины»
говорят короче:
«пропорциональные величины».

Характеристическое свойство прямо пропорциональных величин

Если две величины прямо пропорциональны, то их частное – величина постоянная,

и наоборот,

если частное двух величин постоянно, то эти величины прямо пропорциональны.

Характеристическое свойство прямо пропорциональных величин

Пример 1

Мы знаем, что скорость v и путь S при постоянном времени – прямо пропорциональные величины.

Рассмотрим частное этих величин: $\frac{S}{v}$.

По известной нам формуле $\frac{S}{v} = t$,

а по условию t – величина постоянная.

Характеристическое свойство прямо пропорциональных величин

Пример 2

Рассмотрим все возможные прямоугольники с одной и той же длиной ***a*** и убедимся, что у таких прямоугольников площадь ***S*** и ширина ***b*** – прямо пропорциональные величины.

Возьмём отношение этих величин, а именно ***S*** к ***b***.

Поскольку $\frac{S}{b} = a$,

а длина ***a*** – величина постоянная, ***S*** и ***b*** – прямо пропорциональны.

Характеристическое свойство прямо пропорциональных величин

Теперь ясно, почему при перечислении пар прямо пропорциональных величин обычно **упоминается условие постоянства некоторой третьей величины**.

Проанализировав пары известных прямо пропорциональных величин, **можно обнаружить третью величину (частное этих величин)** и убедиться, что она **постоянна**.

Проведём рассуждение, доказывающее в общем виде утверждение о постоянности частного прямо пропорциональных величин*.

Характеристическое свойство прямо пропорциональных величин

Предположим, что величины a и b – прямо пропорциональны.

Возьмём конкретное значение a_1 величины a и соответствующее ей значение b_1 величины b.

Если a_1 увеличить в k раз и получить

$$a_2 = k \cdot a_1,$$

то b_1 тоже увеличится в k раз и получится

$$b_2 = k \cdot b_1.$$

Характеристическое свойство прямо пропорциональных величин

Сравним между собой частные

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

и убедимся, что они равны.

Действительно:

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{k \cdot a_2}{k \cdot b_2} = \frac{a_1}{b_1}$$

И наоборот,

предположим, что частное величин a и b постоянно, скажем,

$$\frac{a}{b} = m$$

Характеристическое свойство прямо пропорциональных величин

Рассмотрим a_1 и a_2 – два значения величины a;

а так же b_1 и b_2 – соответствующие им значения величины b.

Убедимся, что если

$a_2 = k \cdot a_1$,

то и $b_2 = k \cdot b_1$.

Так как

$$\frac{a_1}{b_1} = m \quad \text{и} \quad \frac{a_2}{b_2} = m, \text{ то } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Поменяем местами a_1 и b_2, получим

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

Характеристическое свойство прямо пропорциональных величин

Но поскольку

$$\frac{a_2}{a_1} = k, \text{ то и } \frac{b_2}{b_1} = k$$

или $b_2 = k \cdot b_1$,

в чём и требовалось убедиться.

Можно утверждать следующее:

Если величины a и b прямо пропорциональны, то они связаны между собой формулой

$$\frac{a}{b} = m,$$

или $a = m \cdot b$,

где m – некоторая постоянная величина.

Обратно пропорциональные величины

Известно, что длина пути составляет 360 км. Зависимость скорости и времени движения на этом отрезке пути задана таблицей:

Время (ч)	3	4	9	12
Скорость (км/ч)	120	90	40	30

Данные таблицы подчиняются зависимости:

если скорость движения уменьшить (увеличить) в некоторое число раз, то время движения увеличится (уменьшится) во столько же раз.

Прямая и обратная пропорциональные зависимости

Обратно пропорциональные величины

Время (ч)	3	4	9	12
Скорость (км/ч)	120	90	40	30

Связь между **значениями скорости** и **значениями времени** можно записать в виде **пропорции**:

$$\frac{3}{4} = \frac{90}{120}; \ \frac{4}{9} = \frac{40}{90} \text{ и т.д.}$$

Определение обратно пропорциональных величин

Если **две величины связаны между собой** так,

что **с увеличением** (**уменьшением**) **одной в несколько раз**

вторая уменьшается (**увеличивается**) **во столько же раз**,

то такие величины называются **обратно пропорциональными**.

Обратно пропорциональные величины

Если две величины обратно пропорциональны, то отношение любых двух значений первой величины равно **обратному отношению** соответствующих значений второй величины.

Пример

$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1}$ – при неизменном расстоянии

Обратно пропорциональные величины

Примеры обратно пропорциональных величин:

количество товара и его цена
при одинаковой стоимости покупки

скорость и время движения равномерно движущегося объекта
при одинаковой длине пути

производительность труда и время работы
при одинаковом объёме работы

число рабочих и время выполнения ими заданной работы
при одинаковой производительности труда всех рабочих

величина дроби и её знаменатель при постоянном числителе

Обратно пропорциональные величины

Пример

Машина затратила 2 часа на движение по некоторому участку пути со скоростью 50 км/ч. Требуется узнать, за какое время она пройдёт этот же участок пути, если её скорость будет 100 км/ч.

Метод 1

Сначала узнаем, во сколько раз увеличится скорость движения:

100 : 50 = 2 раза.

Следовательно, время движения уменьшится в 2 раза и станет равным:

2 : 2 = 1 ч.

Обратно пропорциональные величины

Пример

Машина затратила 2 часа на движение по некоторому участку пути со скоростью 50 км/ч. Требуется узнать, за какое время она пройдёт этот же участок пути, если её скорость будет 100 км/ч.

Метод 2

Условие этой задачи можно записать так:

$$\downarrow \quad \begin{array}{r} 50 \text{ км/ч} - 2 \text{ ч} \\ 100 \text{ км/ч} - x \text{ ч} \end{array} \quad \uparrow$$

Противоположно направленные стрелки показывают, что величины обратно пропорциональны, то есть отношение значений скорости 50 : 100 равно обратному отношению соответствующих значений времени x : 2.

Обратно пропорциональные величины

Пример

Машина затратила 2 часа на движение по некоторому участку пути со скоростью 50 км/ч. Требуется узнать, за какое время она пройдёт этот же участок пути, если её скорость будет 100 км/ч.

Метод 2

$$\begin{array}{l} \downarrow \quad 50 \text{ км/ч} - 2 \text{ ч} \quad \uparrow \\ \downarrow \quad 100 \text{ км/ч} - x \text{ ч} \quad \uparrow \end{array}$$

Составим пропорцию: $\dfrac{50}{100} = \dfrac{x}{2}$.

Найдём неизвестный член пропорции:

$x = \dfrac{50 \cdot 2}{100}$, т.е. $x = 100 : 100$ (ч); $x = 1$ ч.

Прямая и обратная пропорциональные зависимости

Характеристическое свойство обратно пропорциональных величин

Если две величины обратно пропорциональны, то их произведение – величина постоянная,

и наоборот,

если произведение двух величин постоянно, то эти величины обратно пропорциональны.

Характеристическое свойство обратно пропорциональных величин

Пример 1

Скорость v и время движения t
при постоянном пути S –
обратно пропорциональные величины.

Рассмотрим произведение этих величин: $v \cdot t$.

По известной нам формуле $v \cdot t = S$,
а по условию S – величина постоянная.

Характеристическое свойство обратно пропорциональных величин

Пример 2

Рассмотрим все возможные прямоугольные треугольники с одной и той же площадью ***S*** и убедимся, что длины их катетов ***a*** и ***b*** – обратно пропорциональные величины.

Вспомним формулу площади прямоугольного треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab$$

отсюда ***a · b = 2S***, то есть произведение катетов есть величина постоянная, значит, они обратно пропорциональны.

Характеристическое свойство обратно пропорциональных величин

Теперь ясно, почему при перечислении пар обратно пропорциональных величин обычно **упоминается условие постоянства некоторой третьей величины**.

Проанализировав пары известных Обратно пропорциональных величин, **можно обнаружить третью величину (частное этих величин)** и убедиться, что она **постоянна**.

Проведём рассуждение, доказывающее в общем виде утверждение о постоянности произведения обратно пропорциональных величин*.

Характеристическое свойство обратно пропорциональных величин

Предположим, что величины a и b – Обратно пропорциональны.

Возьмём конкретное значение a_1 величины a и соответствующее ей значение b_1 величины b.

Если a_1 увеличить в k раз и получить

$$a_2 = k \cdot a_1,$$

то b_1 уменьшится в k раз и получится

$$b_2 = \frac{b_1}{k}$$

Характеристическое свойство обратно пропорциональных величин

Убедимся, что произведения

$a_1 \cdot b_1$ и $a_2 \cdot b_2$

равны.

Действительно:

$$a_2 \cdot b_2 = k \cdot a_1 \cdot \frac{b_1}{k} = \frac{k \cdot a_1 \cdot b_1}{k} = a_1 \cdot b_1$$

И наоборот,

предположим, что произведени величин a и b постоянно, скажем,

$a \cdot b = n$.

Характеристическое свойство обратно пропорциональных величин

Рассмотрим a_1 и a_2 – два значения величины a;

а так же b_1 и b_2 – соответствующие им значения величины b.

Убедимся, что если

$$a_2 = k \cdot a_1,$$

то $b_2 = \dfrac{b_1}{k}$.

Так как

$a_1 \cdot b_1 = n$ и $a_2 \cdot b_2 = n$, то $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2$.

Характеристическое свойство прямо пропорциональных величин

Тогда имеем:

$$b_2 = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b_1}{k \cdot a_1} = \frac{b_1}{k}$$

в чём и требовалось убедиться.

Можно утверждать следующее:

Если величины a и b – обратно пропорциональны, то они связаны между собой формулой

$$a \cdot b = n,$$

или $a = \dfrac{n}{b}$,

где n – некоторая постоянная величина.

Важное замечание

Обратите внимание:
если одна величина увеличивается,
когда увеличивается другая,
то это **не обязательно** означает,
что они прямо пропорциональны.
Нужно ещё, чтобы увеличение обеих величин
происходило **в одинаковое число раз**.

Пример

С увеличением одного из слагаемых
Увеличивается и сумма,
однако было бы ошибочно считать,
что сумма прямо пропорциональна этому слагаемому,
так как они увеличиваются не в одинаковое число раз.

ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ

Ответьте на следующие вопросы:

Какие величины называются прямо пропорциональными? Приведите примеры таких величин. Укажите их характеристическое свойство.

Какие величины называются обратно пропорциональными? Приведите примеры таких величин. Укажите их характеристическое свойство.

Верно ли, что если с уменьшением одной величины, друга величина увеличивается, то они обратно пропорциональные величины?

Человек проходил за минуту 30 метров, сколько метров он пройдет за 12 минут, если будет идти с той же скоростью?

Товар стоит 1000 рублей и на зарплату человек мог купить 12 единиц товара. Товар увеличился в цене до 3000 рублей. Сколько теперь единиц товара можно купить на туже зарплату?