Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Г.В. Аверкова
Курс «Высшая математика»

Тема 5 «Прямая на плоскости»

Вывод общего уравнения прямой на плоскости, его частные случаи, примеры построения прямой по ее общему уравнению. Переход от общего уравнения прямой к уравнению с угловым коэффициентом, геометрический смысл параметров этого уравнения. Уравнение прямой в отрезках. Составление уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Каноническое и параметрические уравнения. Взаимное расположение двух прямых: угол между прямыми, условие параллельности и перпендикулярности. Вывод формулы расстояния от точки до прямой. Пучок прямых.

Цели и задачи

- Цели:
  - Рассмотреть основные понятия по теме «Прямая на плоскости»
- Задачи:
  - Рассмотреть различные способы задания прямой на плоскости
  - Определить расстояние от точки до прямой
  - Рассмотреть взаимное расположение двух прямых

Теоретический материал

Прямая линия – алгебраическая линия первого порядка:
в декартовой системе координат прямая на плоскости задается уравнением первой степени.

1) Общее уравнение (полное) прямой

$$Ax + By + C = 0$$

$\overline{n} = \{A, B\}$ - нормальный вектор плоскости

Нормальным вектором прямой, или вектором нормали, называется ненулевой вектор, перпендикулярный прямой.

Теоретический материал

Общее уравнение прямой в векторной форме

$$\bar{r} \cdot \bar{n} + C = 0$$

$\bar{r}$ - радиус-вектор точки $M(x, y)$

Направляющие косинусы нормального вектора $\bar{n} = \{A, B\}$ определяются формулами:

$$\cos\alpha \doteq \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Теоретический материал

2) Нормальное уравнение прямой

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

Нормальное уравнение прямой в векторной форме:

$$\bar{r}\cdot\bar{n}^{\circ} - p = 0$$

$\bar{n}^{\circ} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ - единичный вектор нормали

p – расстояние от начала координат до прямой

Нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Теоретический материал

3) Уравнение прямой, проходящей через заданную точку

$$M_0(x_0, y_0)$$

перпендикулярно вектору $\bar{n} = \{A, B\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

4) Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ - отрезки, отсекаемые прямой на осях *Ox* и *Oy*

Теоретический материал

5) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b$$

$k = tg\varphi = -\dfrac{b}{a}$ - угловой коэффициент прямой

φ - угол наклона прямой к оси *Ox*, отсчитываемый в направлении, противоположном часовой стрелке

6) Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$\bar{s} = \{m,n\}$

Теоретический материал

7) Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

$\bar{s} = \{m, n\}$ - направляющий вектор прямой

Направляющим вектором прямой называется ненулевой вектор, параллельный прямой

8) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Теоретический материал

9) Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

Параметрические уравнения прямой в векторной форме:

$$\bar{r} = \bar{r}^{\circ} + \bar{s}t = 0$$

$\bar{r}$ - радиус-вектор точки $M(x, y)$

$\bar{r}^{\circ}$ - радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$

Теоретический материал

Расстояние от точки до прямой

Если прямая задана нормальным уравнением

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$, то

$$d = d(M_0, l) = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p \right|$$

Если прямая задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0$$, то

$$d = d(M_0, l) = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Теоретический материал

Угол между двумя прямыми

Если прямые заданы общими уравнениями

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то

$$\cos(l_1 \hat{,} l_2) = \cos(\overline{n}_1 \hat{,} \overline{n}_2) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Если прямые задаются уравнениями с угловыми коэффициентами

$y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то

$$tg(l_1 \hat{,} l_2) = \pm \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

Теоретический материал

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

1) Перпендикулярность	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$	$k_1k_2 = -1$
2) Параллельность	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$	$k_1 = k_2$
3) Совпадение	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$	$\begin{cases} k_1 = \lambda \cdot k_2 \\ b_1 = \lambda \cdot b_2 \end{cases}$
4) Пересечение	$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$	$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$

Ключевые понятия

- Прямая
- Нормальный вектор
- Направляющий вектор
- Угловой коэффициент
- Расстояние от точки до прямой
- Нормирующий множитель
- Угол между прямыми
- Параллельность и перпендикулярность

Контрольные вопросы

- Общее уравнение прямой
- Уравнение прямой с угловым коэффициентом
- Уравнение прямой по двум точкам
- Каноническое уравнение прямой
- Параметрические уравнения прямой
- Уравнение прямой в отрезках
- Нормальное уравнение прямой
- Нормирующий множитель
- Расстояние от точки до прямой
- Косинус угла между двумя прямыми
- Параллельность и перпендикулярность прямых

Дополнительная литература