

# Аналитическая геометрия

Лекции 8,9

# Прямая на плоскости

*Определение.* Уравнением линии на плоскости  $Oxy$  называется уравнение, которому удовлетворяют координаты  $x$  и  $y$  любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

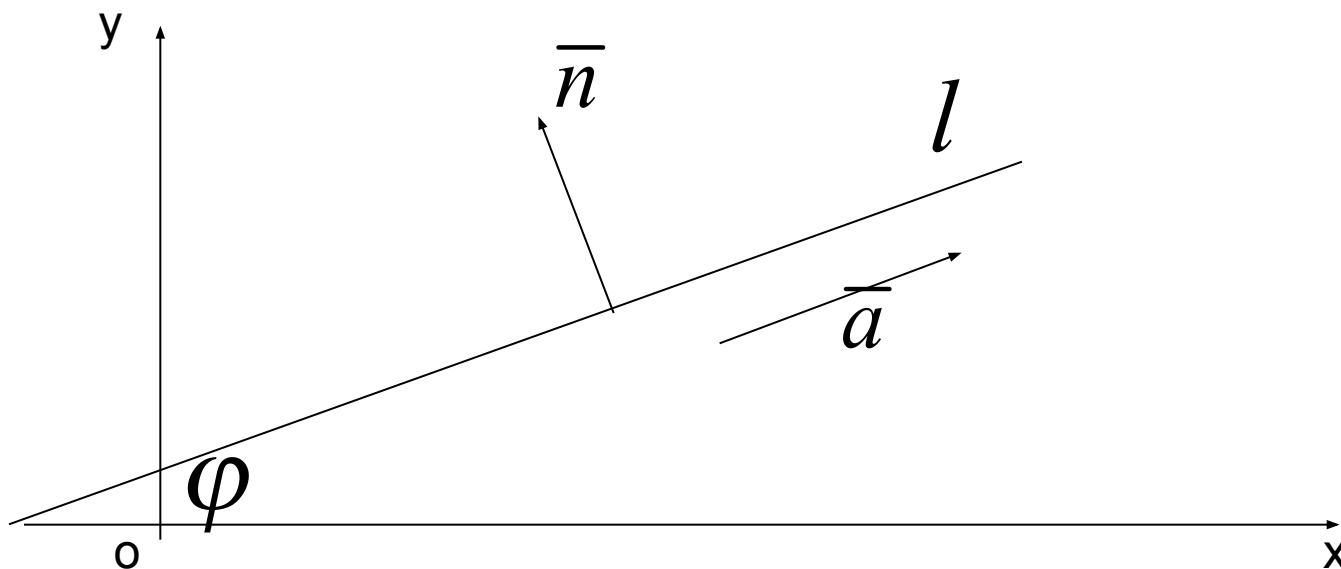
*Теорема.* Всякое уравнение первой степени  $Ax + By + C = 0$ ,  
где  $A$  и  $B$  не обращаются в нуль одновременно, представляет собой уравнение некоторой прямой линии на плоскости  $Oxy$ .

# Уравнение прямой, проходящей через точку перпендикулярно вектору

Введем следующие понятия. Вектор, перпендикулярный прямой  $l$ , будем называть нормалью прямой и обозначать  $\bar{n}$ . Итак,  $\bar{n} \perp l$ .

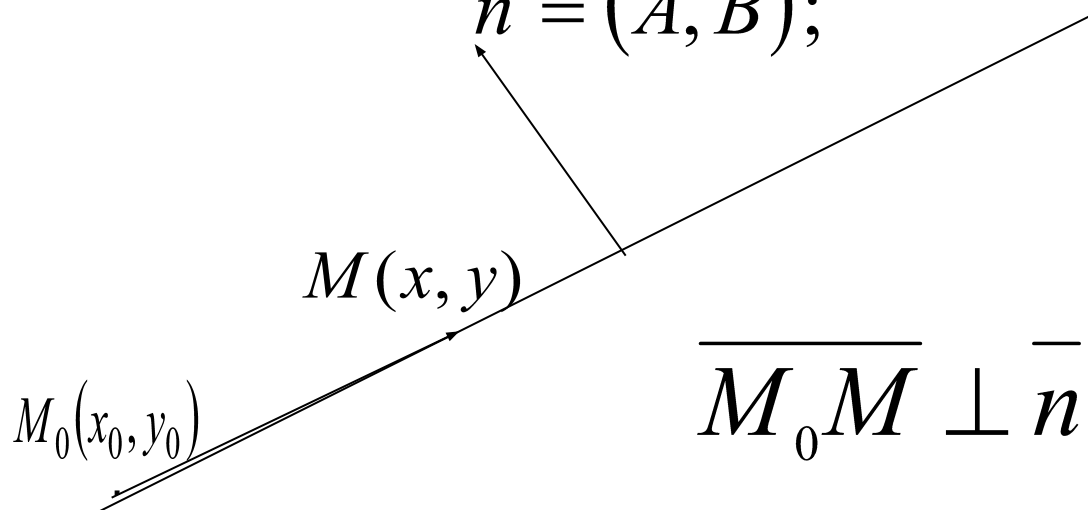
Вектор, параллельный прямой, будем называть направляющим вектором этой прямой. Обозначим его  $\bar{a} = (m, p)$ .

Тангенс угла наклона прямой к  
положительному направлению оси  $Ox$   
будем называть угловым  
коэффициентом этой прямой:  $tg\varphi = k$



Пусть точка  $M_0(x_0, y_0)$  лежит на прямой. Точка  $M(x, y)$  - произвольная точка прямой.

$$\vec{n} = (A, B);$$





Тогда скалярное произведение

$$\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Получили уравнение прямой,  
проходящей через заданную точку,  
перпендикулярно данному вектору:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

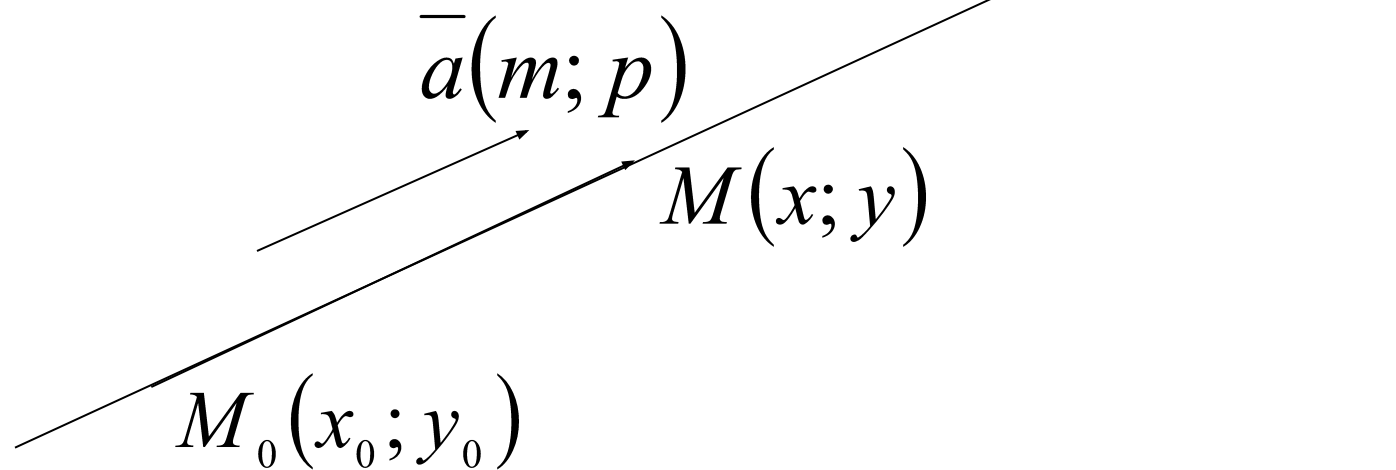
# Общее уравнение прямой

Из предыдущего уравнения легко получаем общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

# Каноническое уравнение прямой

Пусть  $M_0(x_0; y_0) \in l$  и  $\bar{a} \parallel l$



Тогда из условия коллинеарности векторов  $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$  и  $\bar{a} = (m, p)$ ; получаем каноническое, т. е. простейшее уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}$$

# Пример

Написать уравнения прямых,  
проходящих через точку  $M_0(2, -1)$   
параллельно и перпендикулярно  
вектору  $\overline{AB} = (3, -1)$ .

Первое уравнение  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1}$  и

второе  $3(x-2) - (y+1) = 0$  .

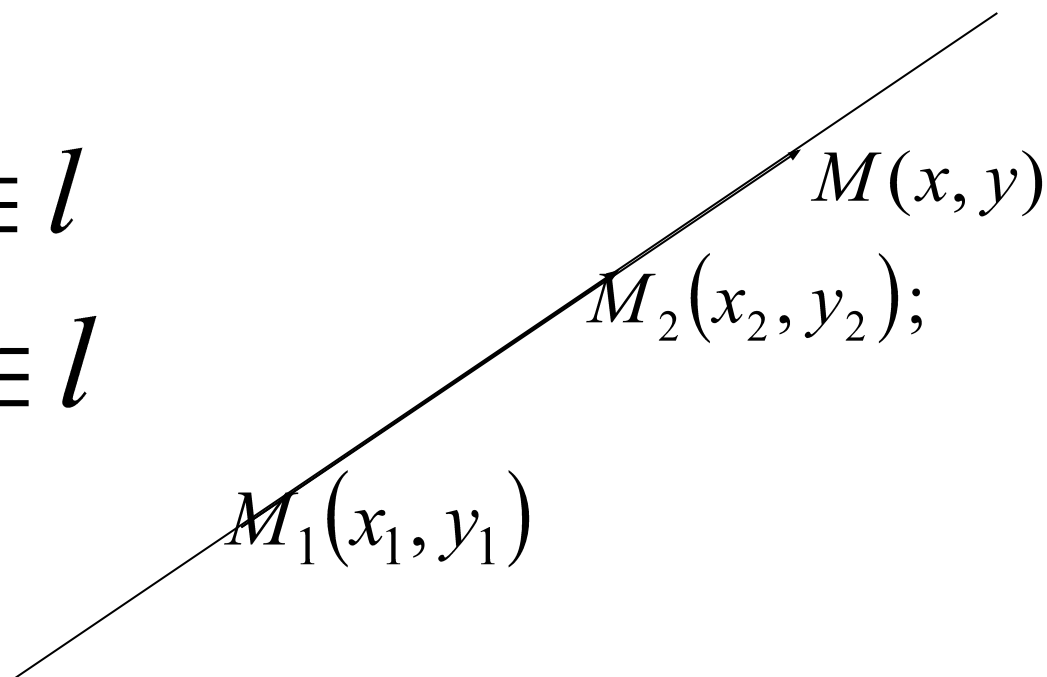
# Уравнение прямой, проходящей через две точки



Пусть

$$M_1(x_1; y_1) \in l$$

$$M_2(x_2; y_2) \in l$$



$$\overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2}$$

Координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Получили уравнение прямой, проходящей через две точки.

# Параметрические уравнения прямой

Приравняем обе части соотношения

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

к  $t$ . Получим параметрические уравнения  
прямой

$$x = mt + x_0$$

$$y = pt + y_0$$

# Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Преобразуем уравнение  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

К ВИДУ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

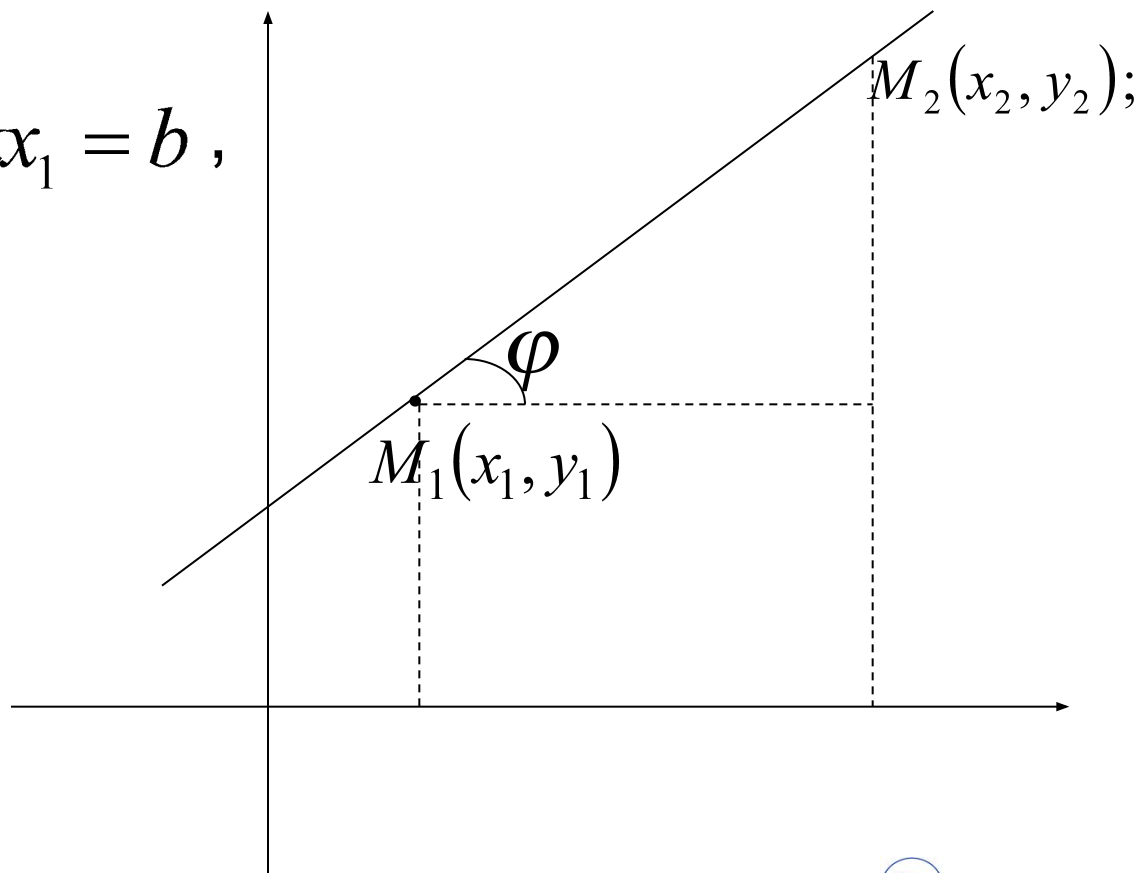
Обозначив

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k, \quad y_1 - kx_1 = b,$$

где  $k = \operatorname{tg}\varphi$ ,

получим

$$y = kx + b$$



# Уравнение прямой , проходящей через точку

Пусть точка  $M_0(x_0, y_0)$  лежит на  
прямой  $y = k \cdot x + b$  . Тогда  $y_0 = kx_0 + b$ .

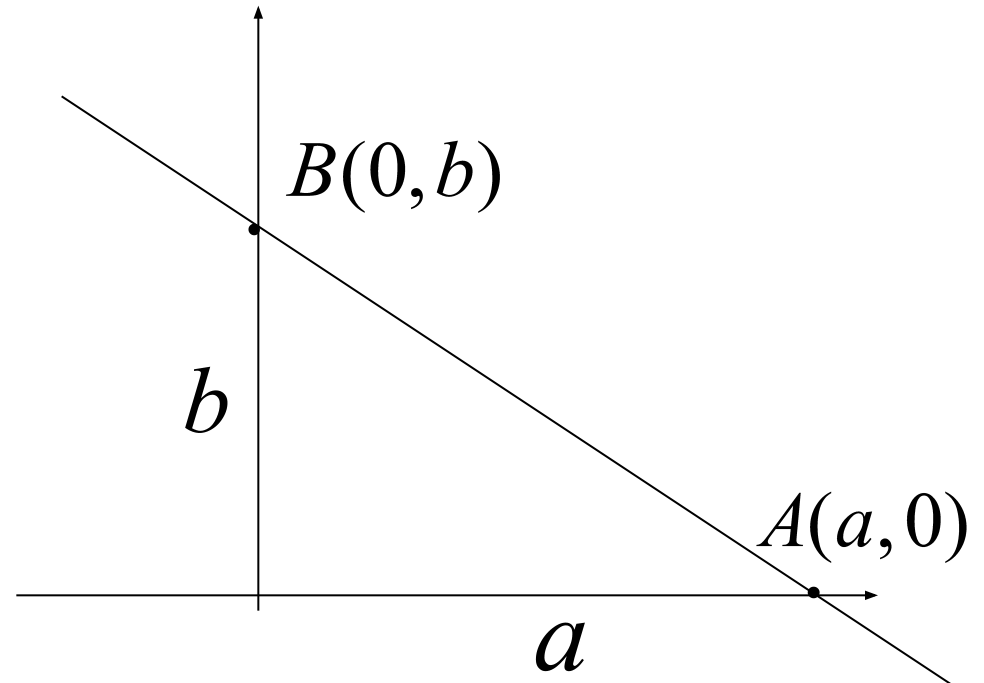
Вычтем из первого второе соотношение .

Получим

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

# Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



# Взаимное расположение прямых



# Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые заданы общими уравнениями

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \overline{n_1}(A_1; B_1)$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad \overline{n_2}(A_2; B_2)$$

Тогда угол между этими прямыми равен углу между их нормальями, т. е.

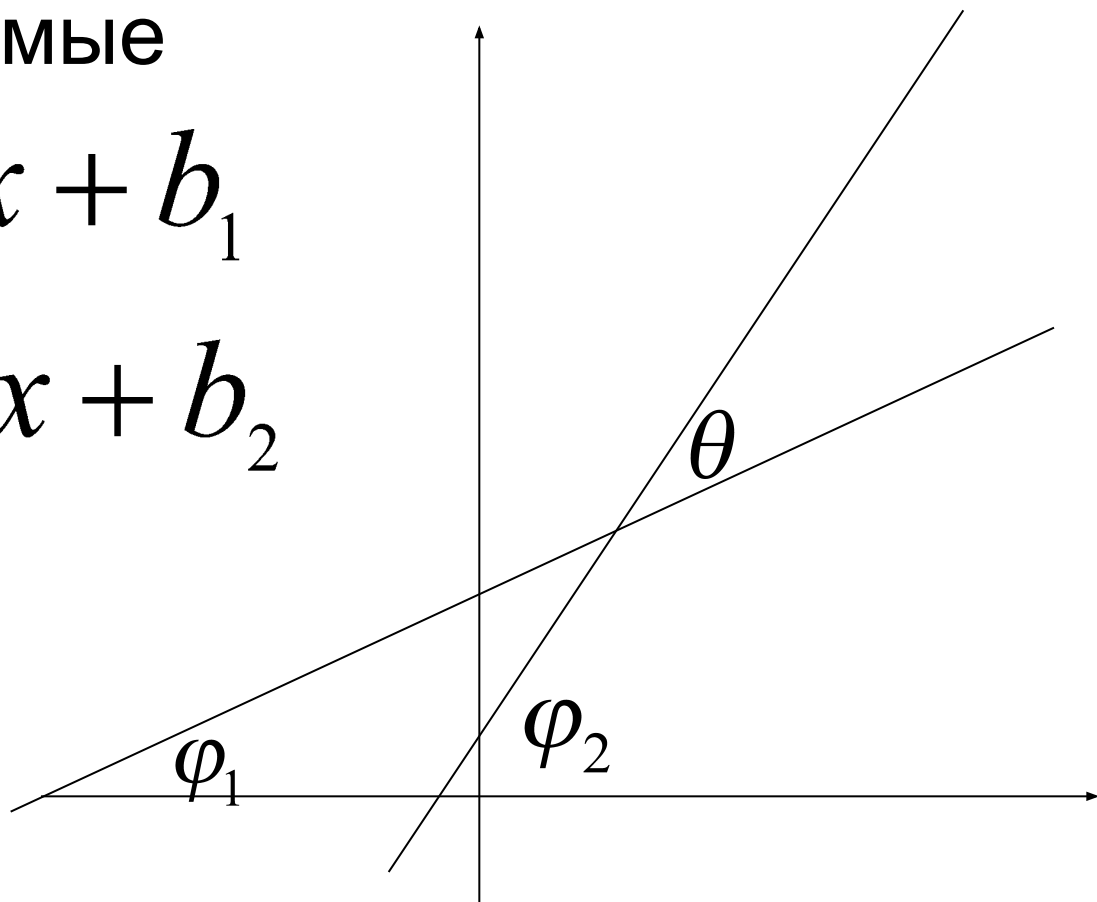
$$\cos \alpha = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Пусть даны прямые

$$l_1 : y = k_1 x + b_1$$

$$l_2 : y = k_2 x + b_2$$

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1$$



Тогда

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

# Условия параллельности

Прямые параллельны тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий ( в зависимости от вида уравнений прямых).

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

# Условие перпендикулярности

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

# Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки  $M_0(x_0, y_0)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$  находят по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

# Пример

Найти уравнение прямой, проходящей через точки  $A_1(5, -1)$  и  $A_2(2, 5)$  .