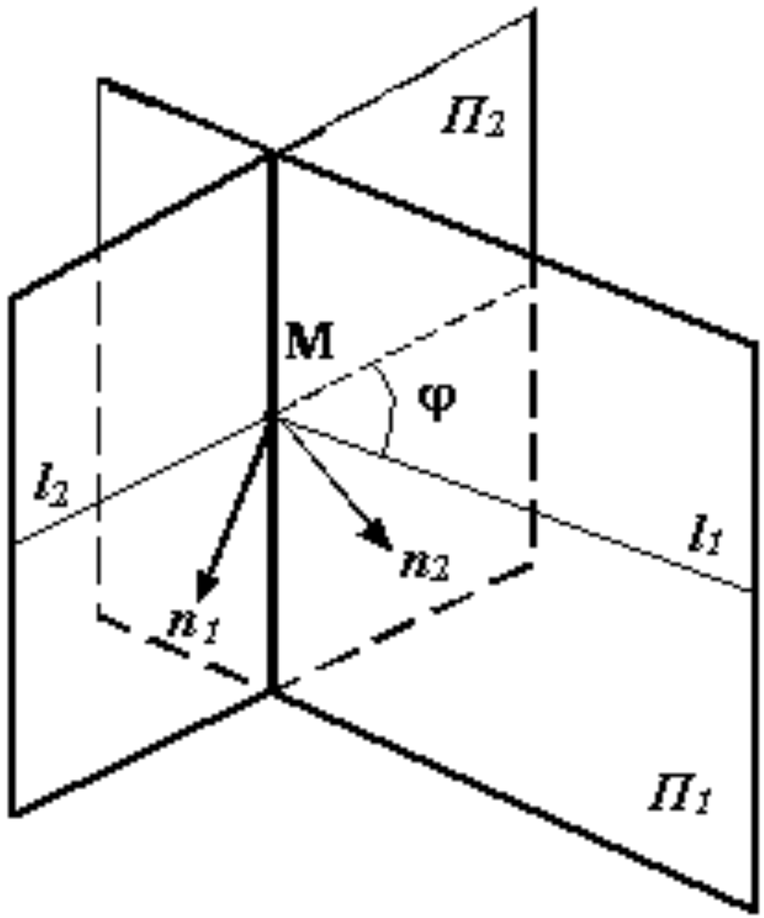
Прямая в пространстве

Общее уравнение прямой

Прямая линия в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей



$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

$$\overline{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \quad \overline{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

Канонические уравнения прямой

- Уравнение прямой, проходящей через заданную точку параллельно заданному вектору

$$\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{p} = \frac{z - z_o}{q}$$

Параметрические уравнения

$$x = mt + x_o,$$

$$y = pt + y_o,$$

$$z = qt + z_o$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Угол между прямыми

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a_1} \cdot \overline{a_2}}{\left|\overline{a_1}\right| \cdot \left|\overline{a_2}\right|} =$$

$$= \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}.$$

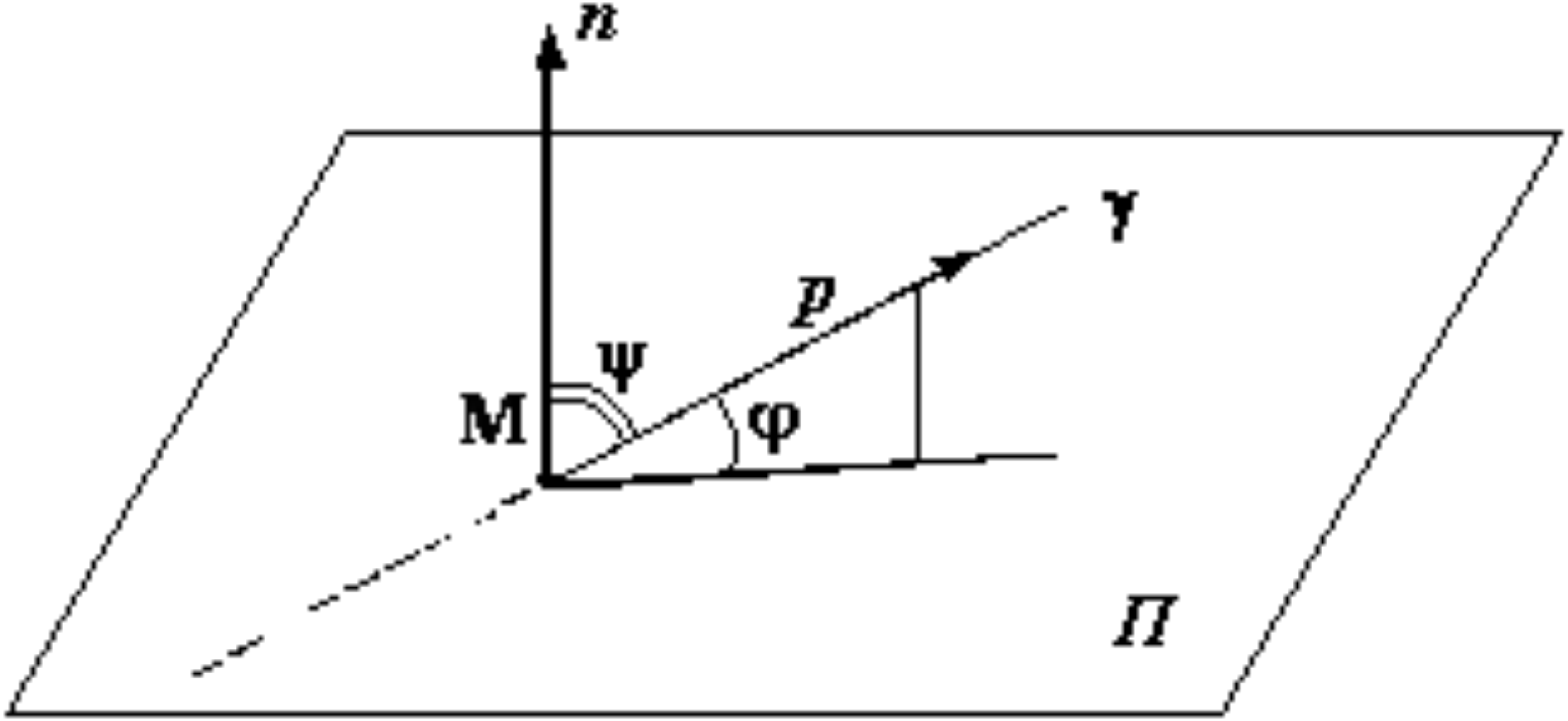
Параллельность прямых

Если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $\quad \overline{a_1} \parallel \overline{a_2} \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{q_1}{q_2}.$

Перпендикулярность прямых

Если $l_1 \perp l_2$ то $\overline{a_1} \perp \overline{a_2} \Rightarrow \overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0$

Угол между прямой и плоскостью


n
γ
p
ψ
M
φ
П

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость

$$\sin\varphi = \frac{\left|\bar{n}\cdot\bar{a}\right|}{\left|\bar{n}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|} = \frac{\left|Am+Bp+Cq\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+p^2+q^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

Если $\square \parallel \Pi$, то $Am + Bp + Cq = 0$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Если $\square \perp \Pi$, $\qquad \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{p} = \dfrac{C}{q}$