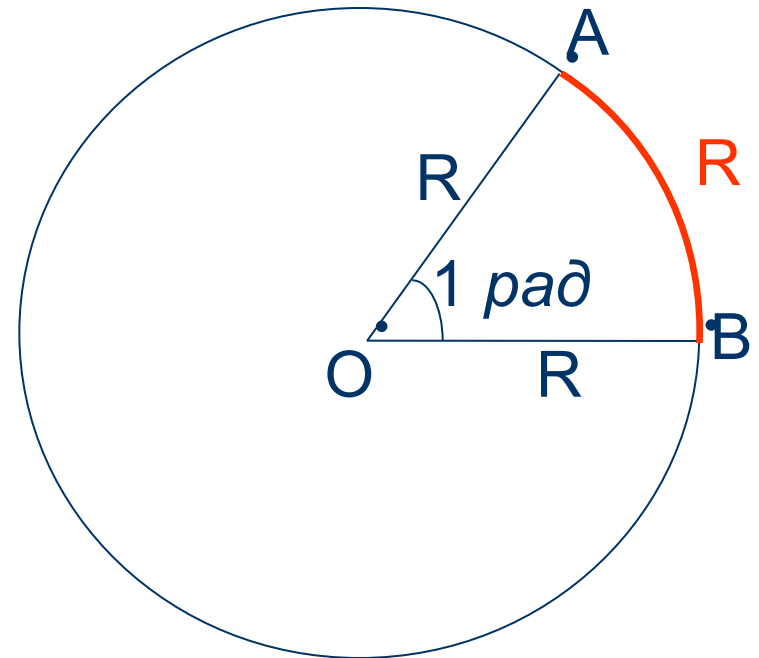
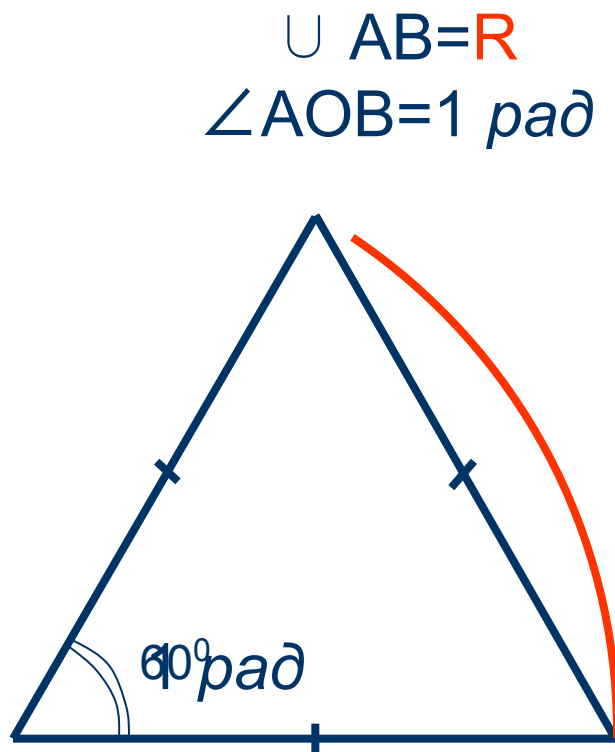


Алгебра и начала анализа 10 класс

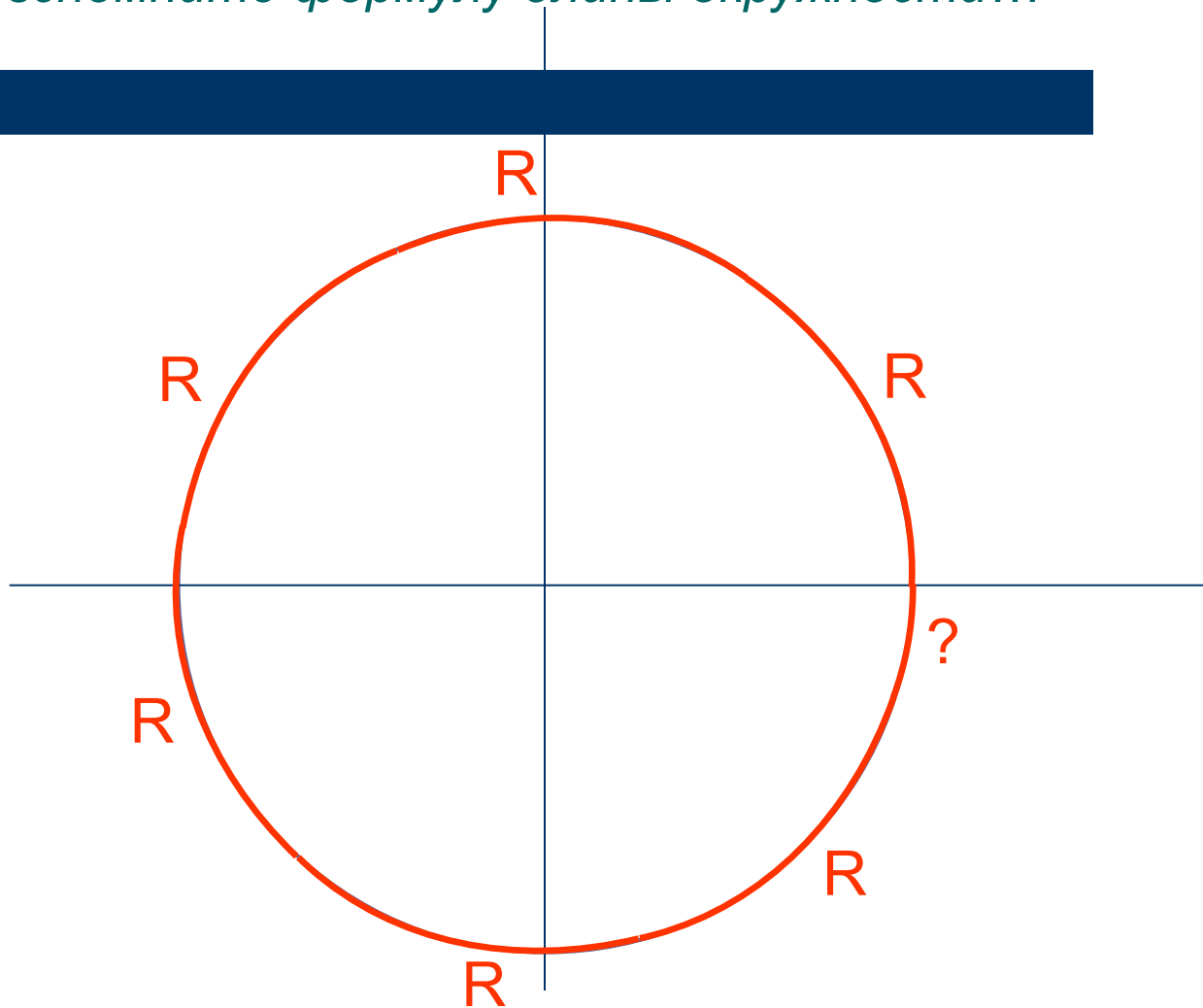
Радианная мера
углов и дуг

Радиа́ном называется величина центрального угла, который опирается на дугу окружности длиной в один радиус (обозначается 1 рад).



Из скольких дуг, длиной R , состоит окружность?

Подсказка: вспомните формулу длины окружности...



$$360^{\circ} - 2\pi \text{ рад}$$

$$1^{\circ} - x \text{ рад}$$

$$360^{\circ} - 2\pi \text{ рад}$$

$$x^{\circ} - 1 \text{ рад}$$

- **Задание 1.** Вывести правила перевода из радианной меры в градусную и наоборот.

Ответ: $\alpha^{\circ} = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}} \text{ рад}$ – правило перевода из градусной меры в радианную;

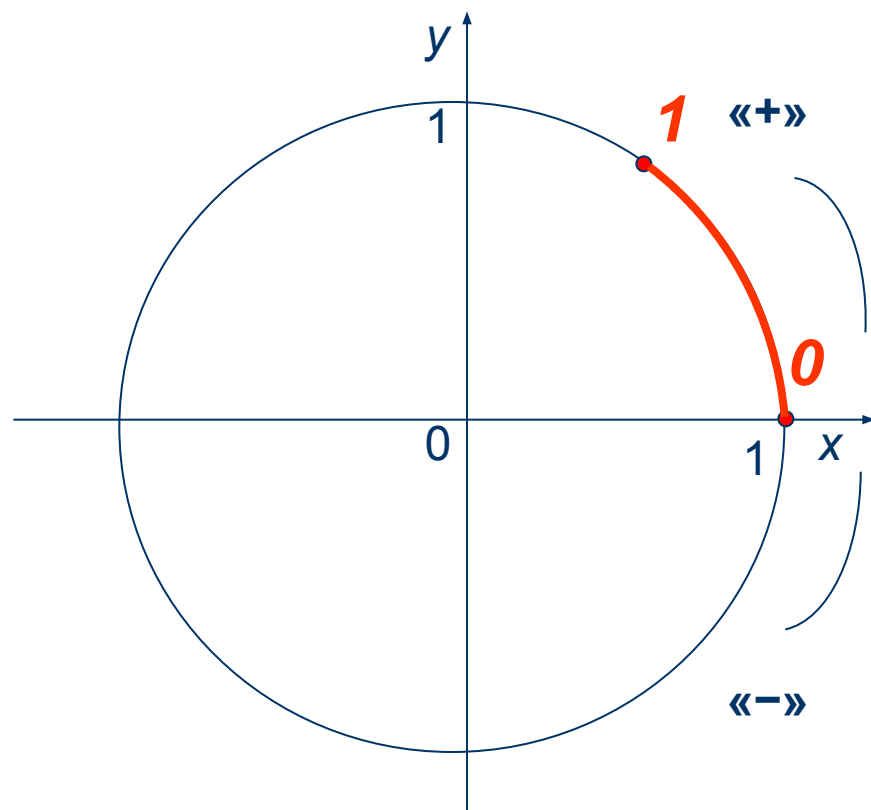
$\alpha \text{ рад} = \alpha \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ – правило перевода из радианной меры в градусную.

$$1 \text{ рад} = \frac{180^{\circ}}{\pi}; \quad 1 \text{ рад} \approx 57^{\circ}19'$$

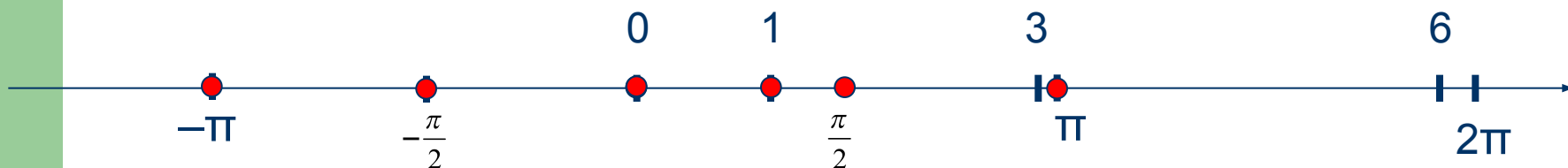
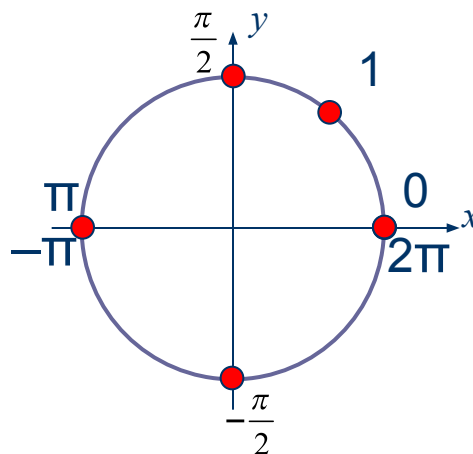
$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ рад}; \quad 1^{\circ} \approx 0,017 \text{ рад}$$

Окружность с центром в начале системы координат Oxy и радиусом, равным единице, называется единичной, а ограниченный ей круг – тригонометрическим.

- Приняв точку пересечения окружности с положительной частью оси Ox за начало отсчета;
- Выбрав положительное направление – против часовой стрелки, отрицательное – по часовой стрелке;
- Отложив от начала отсчета дугу в 1 рад , мы получим, что тригонометрическая окружность в некотором смысле «эквивалентна» понятию «числовая прямая».



Проследите за одновременным движением точки на координатной прямой и на тригонометрической окружности:



Обязательно разберитесь, почему на прямой **семь** точек, а на окружности их **пять**.

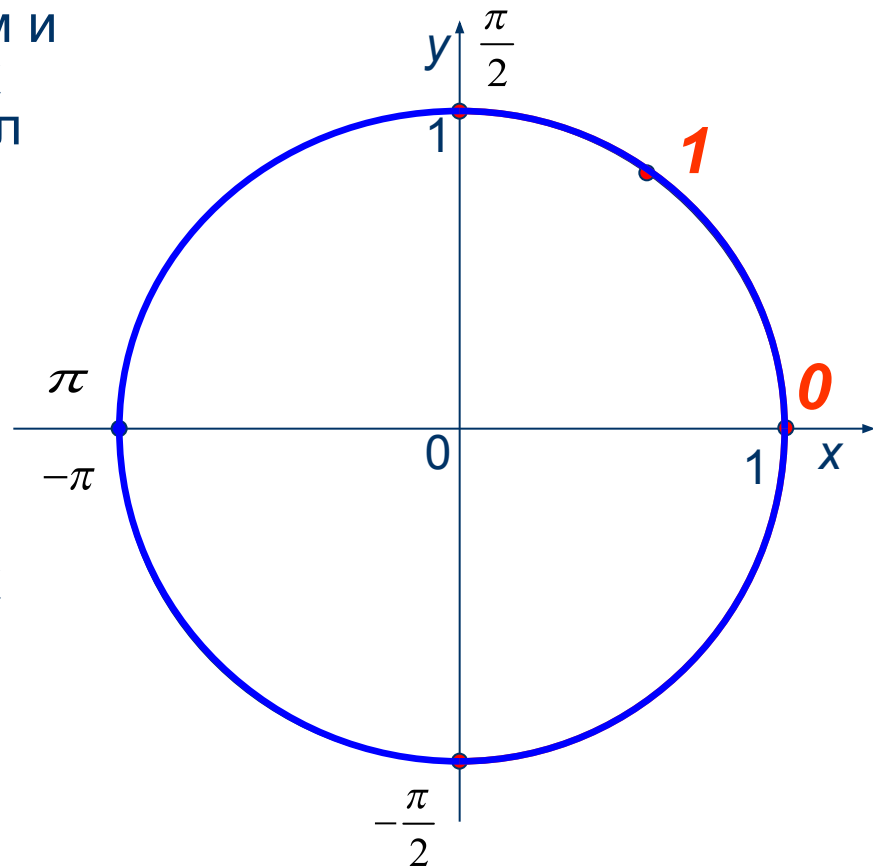
Так как дуги – это части окружности, то длины некоторых из них будут выражены через число π (объясните почему). $\pi = 3,14159... \approx 3,14$

- Откладывая в положительном и отрицательном направлениях от начала отсчета прямой угол получим точки, соответствующие числам ...

$$\frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} \text{ (объясните почему);}$$

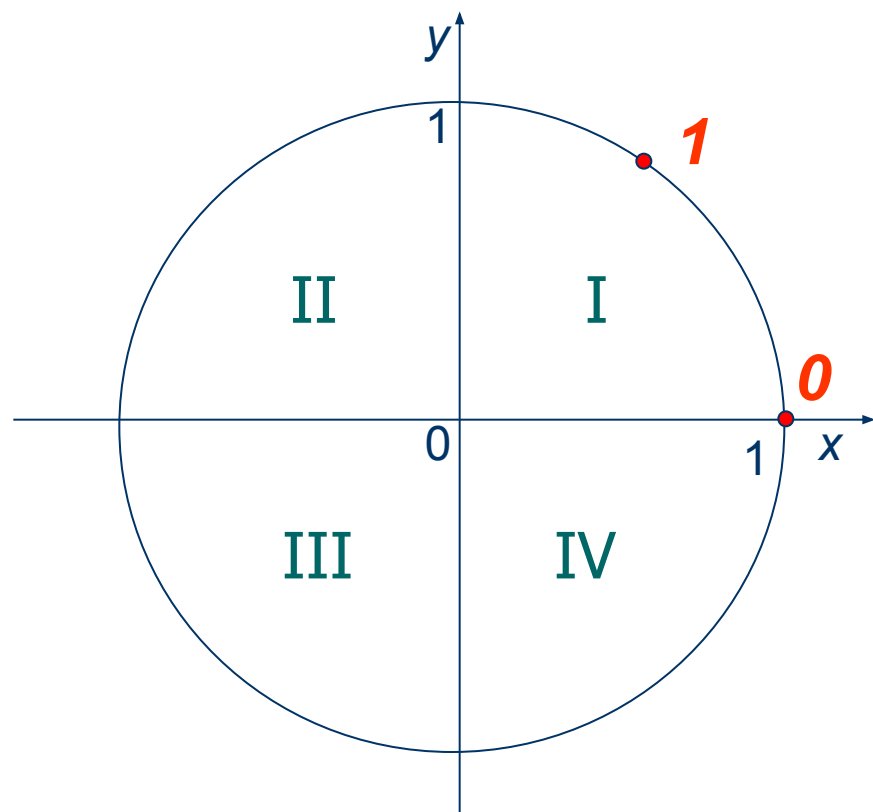
- Выполнив поворот на развернутый угол в положительном и отрицательном направлениях получаем две совпадающие точки окружности с координатами...

$$\pi \text{ и } -\pi .$$



Напомним, что декартова система разбивается координатными осями на четыре координатные четверти – I, II, III и IV.

- Задание 2. Определите границы координатных четвертей через углы поворота в радианной мере, взятых в положительном направлении.
- Задание 3. Выполните предыдущее задание, при условии, что выбирается отрицательное направление углов поворота.
- Задание 4. Какой координатной четверти принадлежит точка окружности с координатой $6,28$?



$$\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

– это соотношение может Вам понадобится для понимания некоторых фактов!

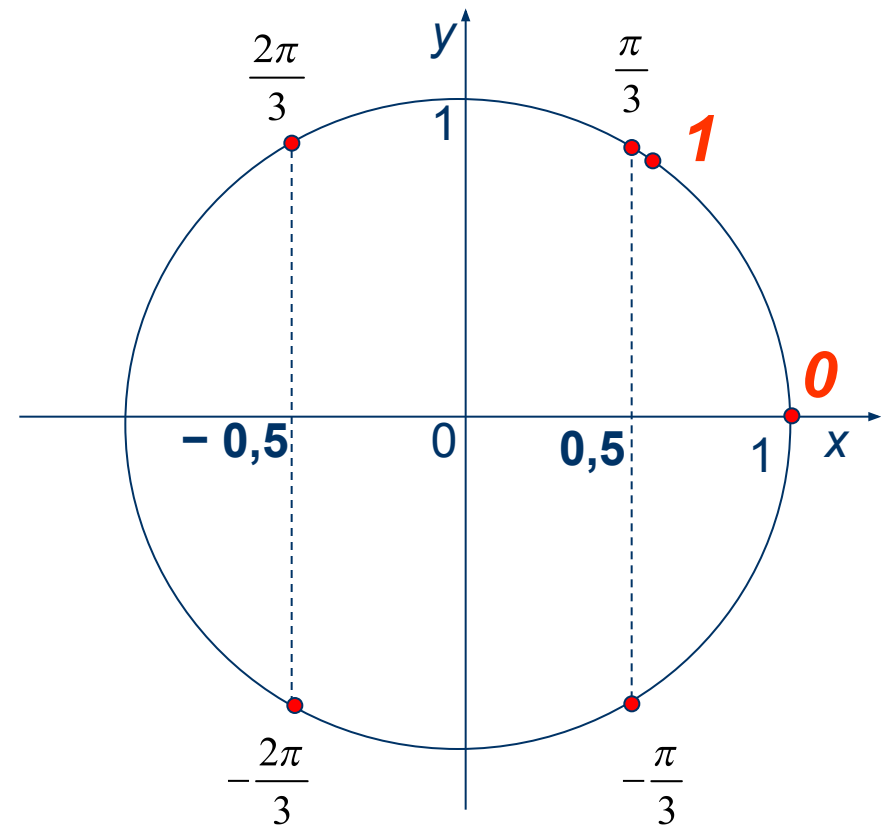
- Отметив на окружности точки с абсциссой 0,5 мы получим точки, соответствующие числам ...

$$\frac{\pi}{3} \text{ и } -\frac{\pi}{3} \text{ (объясните почему);}$$

- Аналогично, получаются точки окружности с координатами

$$\frac{2\pi}{3} \text{ ; } -\frac{2\pi}{3} \text{ .}$$

- Обратите внимание на симметричность относительно оси Ox полученных точек!



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

– это соотношение может Вам понадобится для понимания некоторых фактов!

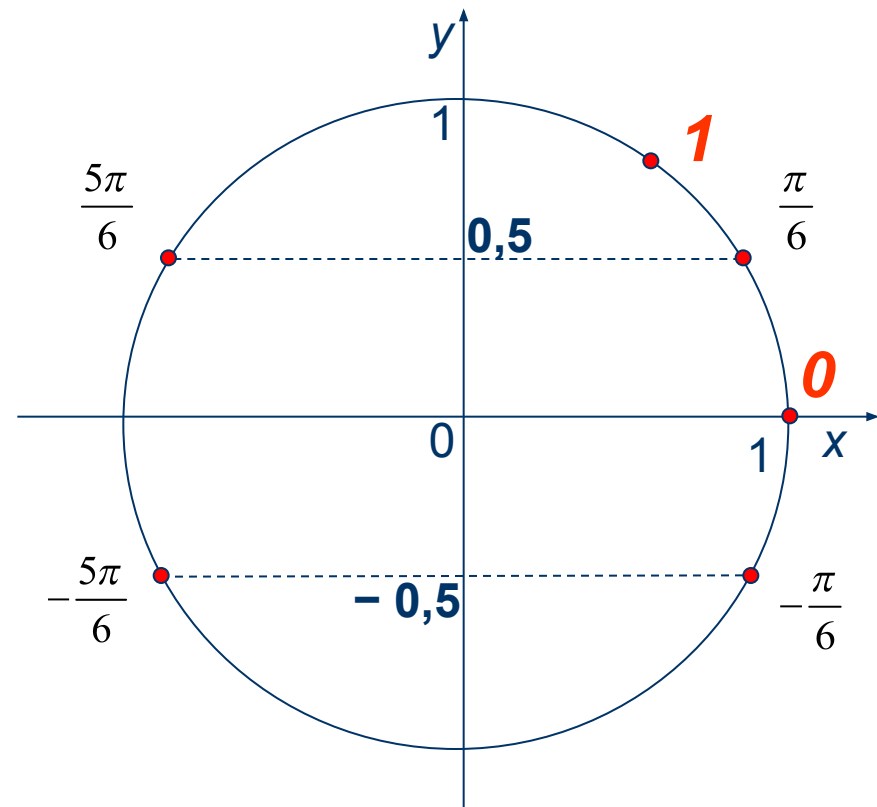
- Отметив на окружности точки с ординатой 0,5 мы получим точки, соответствующие числам ...

$$\frac{\pi}{6} \text{ и } \frac{5\pi}{6} \text{ (объясните почему);}$$

- Аналогично, получаются точки окружности с координатами

$$-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$$

- Обратите внимание на симметричность относительно оси Oy полученных точек!

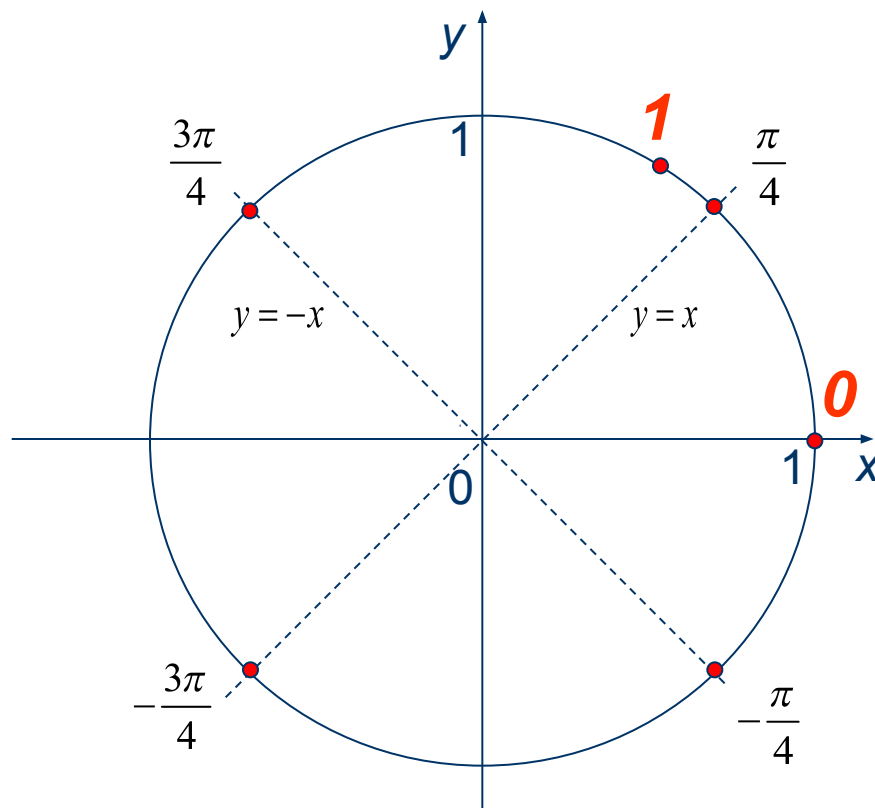


Графики функций $y=x$ и $y=-x$ – прямые, являющиеся биссектрисами координатных четвертей.

- Постройте графики функций $y=x$ и $y=-x$. Подумайте, какие углы поворота соответствуют точкам пересечения этих прямых с тригонометрической окружностью?...

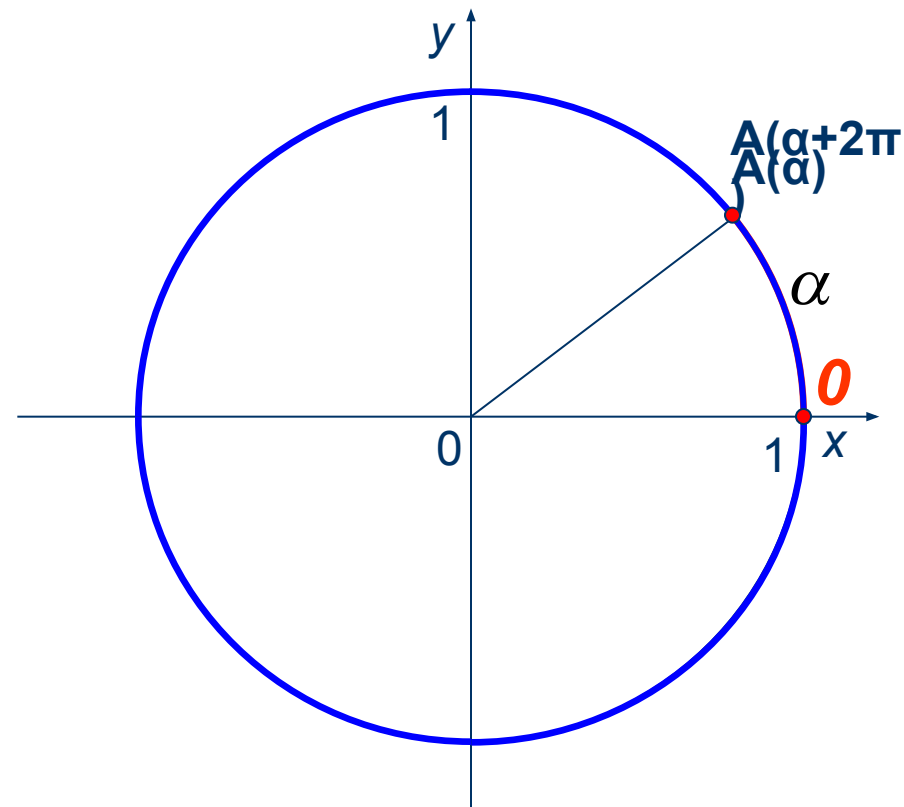
- ...Ответ:

$$\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}.$$



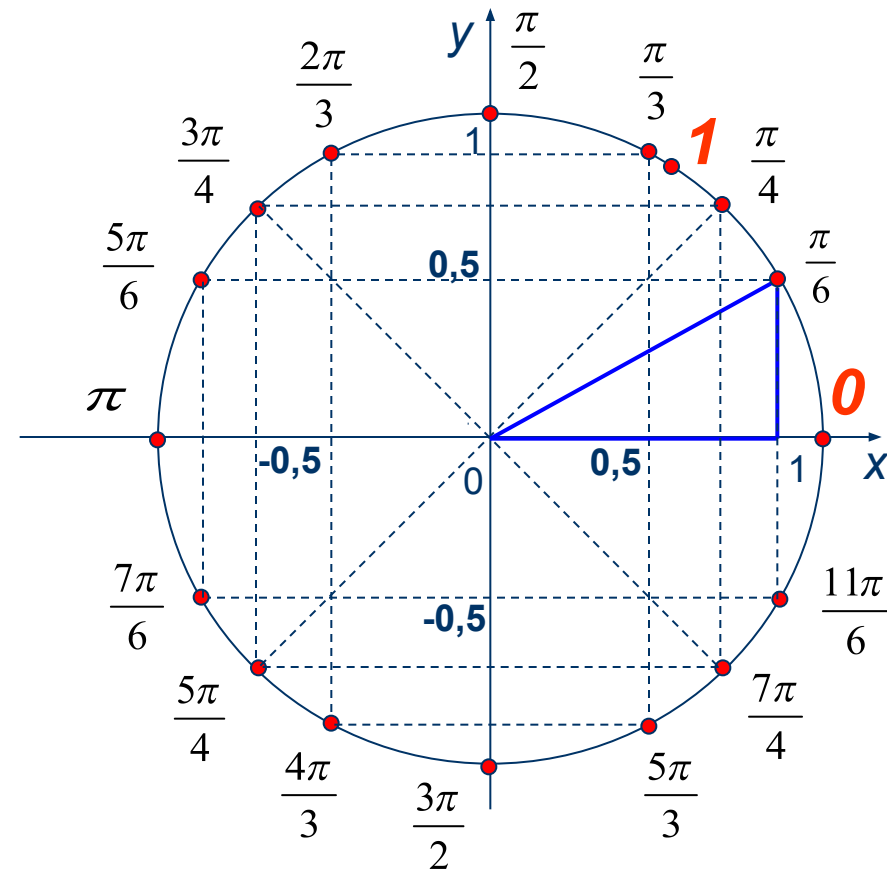
Отметим на тригонометрической окружности точку A , соответствующую **произвольному острому положительному** углу поворота α .

- Если добавить полный поворот к углу α , то мы снова окажемся в той же точке A . Но теперь ее координата равна (подумайте)...
 $\alpha + 2\pi$
- Вообще, любую точку окружности можно получить поворотом на угол, вида $\alpha + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $\alpha \in [0; 2\pi)$.



Итогом нашей предыдущей работы является данная окружность, на которой отмечены наиболее часто встречающиеся в различных таблицах углы.

- Примечание. На чертеже отмечены только положительные углы поворота.
- Задание 5. Найдите координаты всех точек, отмеченных на данной окружности (указание: рассмотрите различные прямоугольные треугольники с гипотенузой-радиусом (см. рис.) и примените теорему Пифагора ; помните о симметрии точек).

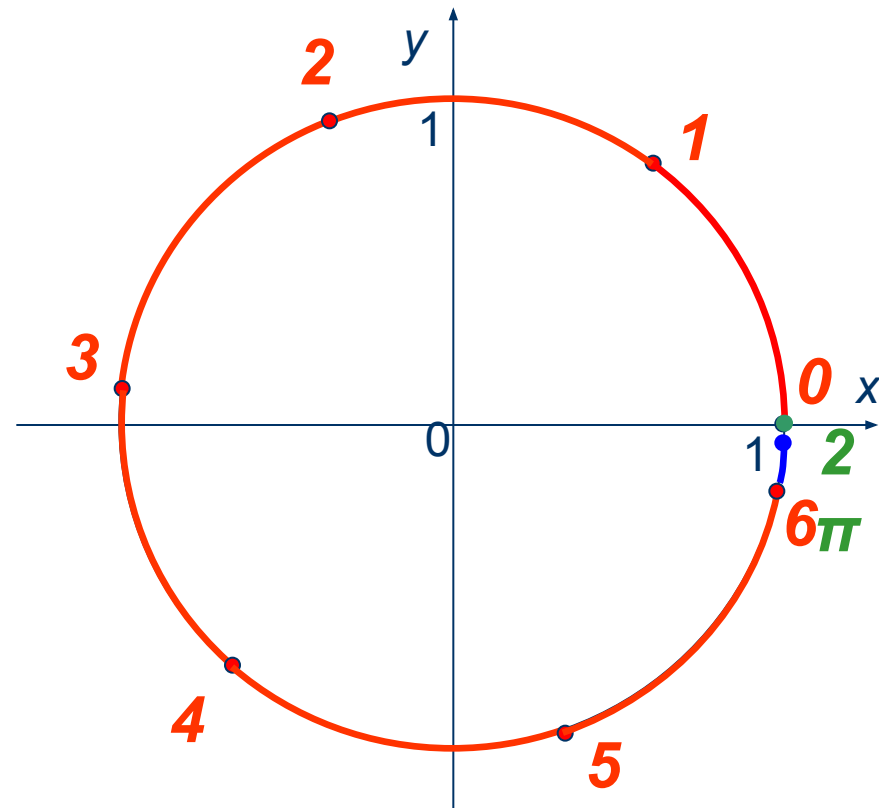


Ответы и решения.

- Задание 2. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ - I четверть, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ - II четверть,
 $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ - III четверть, $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ - IV четверть.
- Задание 3. $\left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$ - I четверть, $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$ - II четверть,
 $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$ - III четверть, $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ - IV четверть

Ответы и решения.

- Задание 4. $6,28 \in IV$
(см.рис.)
 $6,28 < 2\pi$ (обязательно
разберитесь в
совпадении цвета
цифр и некоторых
частей окружности)!



Ответы и решения.

- Задание 5. $0(1;0)$ $\frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ $\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 $\frac{\pi}{2}(0;1)$ $\frac{2\pi}{3}\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{3\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{5\pi}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$
 $\pi(-1;0)$ $\frac{7\pi}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ $\frac{5\pi}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{4\pi}{3}\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
 $\frac{3\pi}{2}(0;-1)$ $\frac{5\pi}{3}\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{7\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{11\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$