Лекция 14

РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Современная вычислительная техника позволяет проводить расчеты сооружений с более подробным описанием их внутренней структуры и с более точным учетом действующих нагрузок.

Для этого разработаны специальные методы расчета, среди которых наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ).

1. Понятие о методе конечных элементов

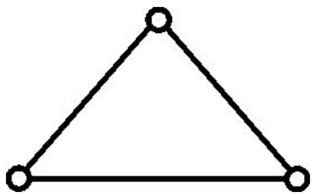
Метод конечных элементов – это метод расчета сооружений, основанный на рассмотрении сооружения как совокупности типовых элементов, называемых ***конечными элементами (КЭ)***.

В дискретном методе мы рассмотрели три типа стержневых элемента, которые используются и в МКЭ как конечные элементы.

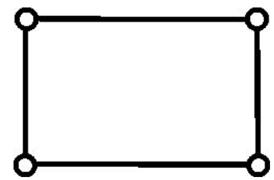
Например, элемент 3-его типа в МКЭ называются ферменным КЭ, а 1-го типа – плоским стержневым КЭ. При расчете пространственных рам используется КЭ бруса. В расчетах плоских тел используются треугольный или четырехугольный КЭ. При расчете пространственных сооружений могут использоваться КЭ призмы или КЭ тетраэдра и др.

ферменный КЭ

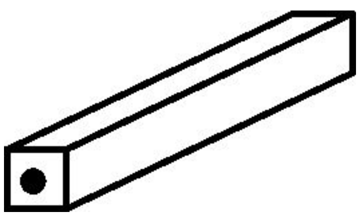
стержневой КЭ



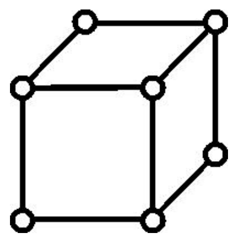
треугольный КЭ



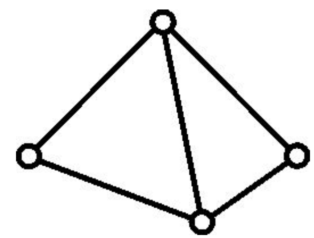
четырехугольный КЭ



КЭ бруса



призменный КЭ



тетраэдальный КЭ

Для расчета разных сооружений разработано множество других КЭ.

МКЭ – дискретный метод.

В этом методе сооружение делится на определенное число КЭ, соединяемых между собой в узлах конечно-элементной модели. А нагрузка, действующая на сооружение, переносится в узлы. Это позволяет определять НДС сооружения через узловые усилия и перемещения конечно-элементной модели.

В пределах одной и той же расчетной схемы сооружения можно выбирать разные расчетные модели по МКЭ, т.к. можно:

− разбить ее на разное количество однотипных КЭ;

− представить ее как комбинацию различных типов КЭ;

− реализовать различные варианты МКЭ − в формах метода сил, метода перемещений и смешанного метода.

В настоящее время широкое распространение получил МКЭ в форме метода перемещений.

2. Вариационные основы МКЭ

При решении многих задач статики, динамики и устойчивости сооружений определяется ***полная потенциальная энергия U***:

$$U = W - V.$$

Здесь W – работа внешних сил, V – работа внутренних сил.

Обычно они представляются в виде функций, зависящих от перемещений, деформаций, напряжений элементов расчетной модели сооружения.

Исследование этого выражения позволяет выявить важные законы механики, называемые принципами. Например, в теоретической механике известен ***принцип Лагранжа-Дирихле***:

для того чтобы механическая система находилась в равновесии, ее полная потенциальная энергия должна быть постоянной.

Из этого принципа следует, что приращение полной потенциальной энергии системы, находящейся в равновесии, должно равняться нулю:

$$\Delta U = 0.$$

Вычисление приращения функции обычно заменяется вычислением его приближенного значения − дифференциала. Тогда получается ***вариационное уравнение Лагранжа:***

$$\delta U = 0,$$

где символ δ означает вариацию, вычисление которого схоже с вычислением дифференциала функции.

Это уравнение позволяет свести задачу определения НДС сооружения к отысканию экстремума полной потенциальной энергии.

Так как $U = W - V$, уравнение Лагранжа принимает вид

$$\delta V = \delta W$$

и формулируется как ***принцип Лагранжа***: ***вариация работы внутренних сил равна вариации работы внешних сил.***

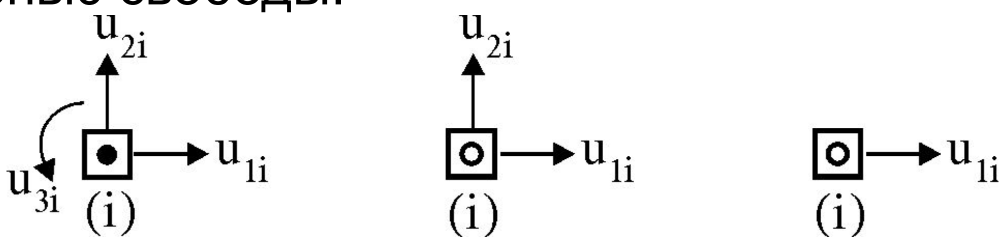
Вариационный принцип Лагранжа используется для сведения континуальной задачи к дискретной задаче путем аппроксимации непрерывных полей перемещений, деформаций, напряжений внутри конечного элемента через его узловые перемещения. Этот принцип является основой варианта МКЭ в форме метода перемещений.

Имеются и другие вариационные принципы − принципы Кастильяно, Рейсснера, Ху-Вашицу и др.

3. Аппроксимация КЭ

При выборе конечно-элементной модели сооружения можно вводить узлы с разным числом степеней свободы.

Например, в плоской системе вводятся узлы с тремя, с двумя или с одной степенью свободы:



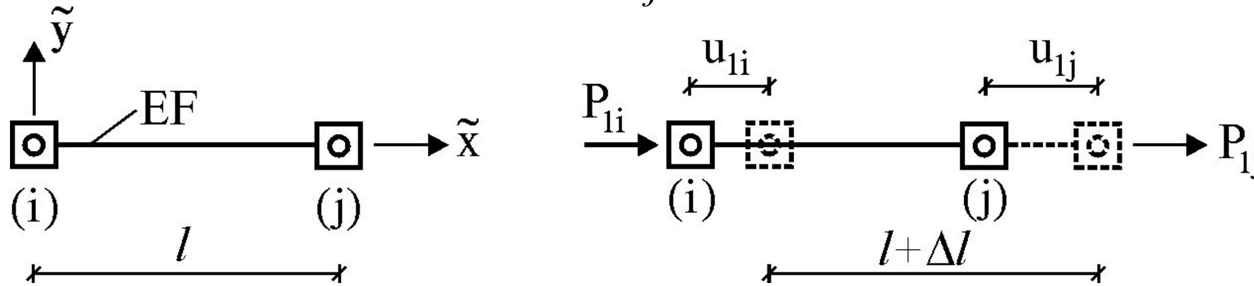
Для использования принципа Лагранжа вводятся ***координатные функции***, аппроксимирующие непрерывное поле перемещений внутри КЭ через перемещения ее узлов:

$$\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha},$$

где $\vec{\mathbf{u}}$ – вектор перемещений внутренних точек КЭ, $\mathbf{C}$ – матрица координатных функций, $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор коэффициентов. Элементы матрицы $\mathbf{C}$ выбираются в виде полиномов, непрерывных внутри КЭ.

Если в полиноме учитывается минимальное число членов, то такой КЭ называется ***симплекс-элементом***. При учете большего числа членов полинома, КЭ называется ***комплекс-элементом.***

Как пример рассмотрим ферменный КЭ с узлами i и j в местной системе координат. Его узлы имеют по одной поступательной степени свободы и соответствующие им узловые перемещения u_{1i} и u_{1j}. Пусть в узлах КЭ приложены силы P_{1i} и P_{1j} :



Перемещения внутренних точек элемента будем аппроксимировать полиномом первой степени

$$\tilde{\mathbf{u}} = \alpha(x) = \alpha_1 + \alpha_2 \tilde{x} .$$

Запишем его в матричной форме:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \left[1 \quad \tilde{x} \right] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha},$$

где $\mathbf{C} = \left[1 \quad \tilde{x} \right]$ − матрица координатных функций,

$\boldsymbol{\alpha} = \left\{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \right\}$ − вектор коэффициентов.

Подставив $\breve{x}=0$ и $\breve{x}=l$ в полином, получим два равенства:

$$\breve{u}(0)=u(0)=\alpha_1 ,$$
$$\breve{u}(l)=u(l)=\alpha_1+\alpha_2 l .$$

С другой стороны, $u(0)=u_{1i}$, $u(l)=u_{1j}$. Тогда предыдущие уравнения примут вид:

$$u_{1i}=\alpha_1 ,$$
$$u_{1j}=\alpha_1+\alpha_2 l .$$

Их можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

или как

$$\mathbf{u}=\mathbf{\Phi}\boldsymbol{\alpha} ,$$

где

$$\mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} .$$

Определим вектор $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\acute{\mathbf{u}} = \mathbf{C} \quad = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\tilde{x}}{l} & \dfrac{\tilde{x}}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{bmatrix}$$

или

$$\acute{\mathbf{u}} = \mathbf{H}\mathbf{u}.$$

Входящая сюда матрица

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\tilde{x}}{l} & \dfrac{\tilde{x}}{l} \end{bmatrix}$$

называется ***матрицей форм***. Она позволяет аппроксимировать поле перемещений внутренних точек КЭ через перемещения узлов.

По аналогии с перемещениями, поле внутренних усилий в КЭ можно аппроксимировать через вектор узловых сил по формуле

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}\,\mathbf{P}.$$

4. Матрица жесткости КЭ

Известные в механике геометрические и физические соотношения для континуальных систем можно записать в виде, аналогичном рассмотренным ранее уравнениям дискретного подхода:

для дискретной системы	***для континуальной системы***
$\mathbf{\Delta} = \mathbf{A}^{\mathrm{t}}\mathbf{u}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{t}}\mathbf{u}$
$\mathbf{\Delta} = \mathbf{B}\,\mathbf{S}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{\sigma}$

Здесь:

$\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ – вектора деформаций и напряжений,

$\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ – матрицы равновесия и податливости.

При рассмотрении конечного элемента как континуальной системы, принцип Лагранжа $\delta V = \delta W$ можно записать в виде

$$\delta \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{\sigma}\, dV = \delta \int_V \mathbf{u}^{\mathrm{t}} \mathbf{P}\, dV ,$$

где левая и правая части представляют возможные работы внутренних и внешних сил, а интегрирование ведется по объему КЭ *V*.

После этого осуществляется переход к дискретной модели КЭ с использованием матрицы форм $\mathbf{H}$. Тогда, после ряда преобразований получается матричное уравнение, связывающее вектор узловых перемещений $\mathbf{u}$ с вектором узловых усилий $\mathbf{P}$ КЭ:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P},$$

в которой симметричная квадратная матрица

$$\mathbf{K} = \int\limits_V \mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\mathbf{H}\,dV$$

− ***матрица жесткости конечного элемента***.

Физический смысл любого элемента k_{ij} матрицы $\mathbf{K}$ – это реакция (реактивная сила), возникающая в *i*-ом направлении от заданного единичного перемещения в *j*-ом направлении.

К примеру, для рассмотренного ферменного КЭ, находящегося в одноосном напряженном состоянии, геометрическое уравнение будет

$$\varepsilon = \frac{d\,u(x)}{dx}.$$

Сравнив его с матричным уравнением

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^{t}\mathbf{u}$$

видим, что матрица равновесия будет дифференциальным оператором с одним членом:

$$\mathbf{A}^{t} = \mathbf{A} = \frac{d}{dx}.$$

Из уравнения связи между деформацией и напряжением

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$$

следует, что матрица податливости будет:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{E}.$$

Для определения матрицы жесткости такого КЭ вычислим все необходимые величины:

$$\mathbf{A}^{t}\mathbf{H} = \frac{d}{dx}\begin{bmatrix} 1-\dfrac{x}{l} & \dfrac{x}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{l} & \dfrac{1}{l} \end{bmatrix} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix},$$

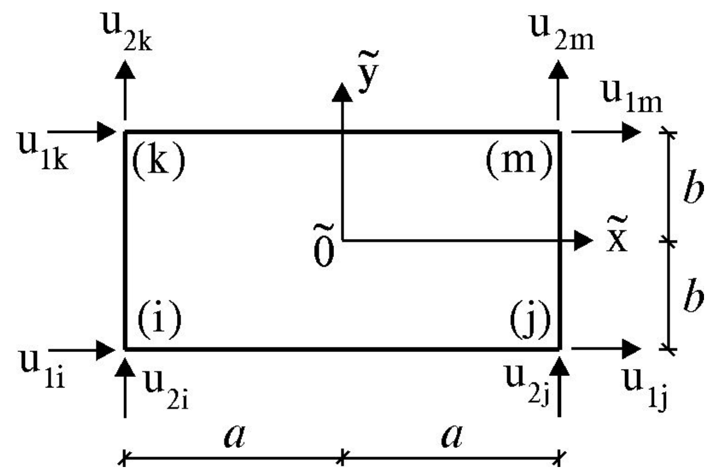
$$\mathbf{H}^{t}\mathbf{A} = \left(\mathbf{A}^{t}\mathbf{H}\right)^{t} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{-1} = E\ .$$

Интегрирование по объему V сводится к интегрированию по длине l КЭ, т.к. $dV = F\,dx$ (F − площадь сечения КЭ):

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{H}^{t}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{t}\mathbf{H}\,dV = \int_0^l \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{l}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot F\,dx = \frac{EF}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

При рассмотрении прямоугольного КЭ толщиной t и размерами $2a$ и $2b$ с четырьмя узлами i, j, k, m и восемью узловыми перемещениями, ее матрица жесткости будет иметь размеры 8×8.



Для краткости записи эту матрицу жесткости представим в блочной форме с 16 блоками одинаковой размерности 2×2:

$$\mathbf{K} = \frac{Et}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ik} & \mathbf{K}_{im} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{jk} & \mathbf{K}_{jm} \\ \mathbf{K}_{ki} & \mathbf{K}_{kj} & \mathbf{K}_{kk} & \mathbf{K}_{km} \\ \mathbf{K}_{mi} & \mathbf{K}_{mj} & \mathbf{K}_{mk} & \mathbf{K}_{mm} \end{bmatrix}.$$

Здесь μ – коэффициент Пуассона. Элементы каждого блока матрицы $\mathbf{K}$ определяются по разным формулам. Например,

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{bmatrix} 4\dfrac{b}{a} + 2(1-\mu)\dfrac{a}{b} & 1{,}5(1+\mu) \\ 1{,}5(1+\mu) & 4\dfrac{a}{b} + 2(1-\mu)\dfrac{b}{a} \end{bmatrix}.$$