Равномерное распределение

Определение. Непрерывная $CB\ \ X$ имеет равномерное распределение на $[a,b]$, если ее функция плотности вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ c, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

Т. к. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, то $c=\dfrac{1}{b-a}$,

a и b - называются параметрами равномерного распределения и однозначно определяют его.

Равномерное распределение

Функция распределения есть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

Равномерное распределение

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{a+b}{2}$$, а дисперсия

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}(x - MX)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(6.2)

$$A = {M_3}\big/{\sigma_x^3} = 0, \quad E = {M_4}\big/{\sigma_x^4} - 3 = -1,2$$

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

$$[\alpha, \beta] \subset [a, b]$$

Равномерное распределение

Пример 6.1. Автобус ходит регулярно с интервалом 12 минут. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать ему придется не более 5 минут? Найти математическое ожидание и σ_x.

Здесь $СВ\ \ X$ - время ожидания. Очевидно, $X \in [0,12]$ и имеет равномерное распределение с функцией плотности распределения:

Равномерное распределение

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{12}, & 0\le x\le 12\\ 0, & x>12\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{12}, & 0\le x\le 12\\ 1, & x>12\end{cases}$$

$$P(0\le x\le 5)=\int_0^5 f(x)dx=F(5)-F(0)=\frac{5}{12}$$

$$MX=6\quad \mathrm{D}X=12\quad \sigma_x=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

Нормальное распределение

Нормальное распределение является одним из наиболее часто встречающихся.

Определение. Непрерывная CB X имеет нормальное распределение, если ее функция плотности распределения $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a и σ некоторые параметры (их смысл мы выясним позже)

$N(a,\sigma^2)$.

Нормальное распределение

Функция $f(x)$ имеет максимум в точке $x = a$, равный $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$, и две точки перегиба $x = a \pm \sigma$.

График функции называют нормальной кривой.

Нетрудно показать, что $MX = a$, а $DX = \sigma^2$.

$A = E = 0$.

Нормальное распределение

Выясним как будет меняться нормальная кривая при изменении a и σ.

Изменение a при постоянном σ смещает нормальную кривую вдоль оси абсцисс, не меняя формы.

Изменение σ при постоянном a меняет форму кривой: чем меньше σ, тем выше максимум и тем ближе точки перегиба, и наоборот.

Нормальное распределение

Нормальный закон с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ ($N(0,1)$) называется стандартным или нормированным.

Функция плотности вероятности стандартного закона имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Нормальное распределение

Вычислим вероятность $P = (\alpha < x < \beta)$.

Так как неравенство $\alpha < x < \beta$ равносильно

неравенству $\dfrac{\alpha - a}{\sigma} < \dfrac{x - a}{\sigma} < \dfrac{\beta - a}{\sigma}$, то

$$P(\alpha < x < \beta) = P(\frac{\alpha - a}{\beta} < \frac{x - a}{\sigma} < \frac{\beta - a}{\sigma}) =$$

,

$$= F(\frac{\beta - a}{\sigma}) - F(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

где

$$F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{u} f(x)dx) =$$

Нормальное распределение

$$\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(u),$$

где $\Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{u} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ называется функцией Лапласа или интегралом вероятностей. Ее значения табулированы.

Итак,

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{2}\Phi(u_2) - \frac{1}{2}\Phi(u_1), \ u_2 = \frac{\beta - a}{\sigma}, \ u_1 = \frac{\alpha - a}{\sigma}.$$

(6.4)

Нормальное распределение

Докажем нечетность функции $\Phi(u)$.

$$\Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

$$\Phi(-u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{-u} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \begin{bmatrix} t = -z \\ dt = -dz \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{\frac{-z^2}{2}} (-dz) = -\Phi(u).$$

Нормальное распределение

Пусть $X \in N(a,\sigma)$. Найдем вероятность выполнения неравенства $|X-a|<\varepsilon$. Т.к. это неравенство равносильно неравенству $a-\varepsilon < X < a+\varepsilon$, то, воспользовавшись результатом (6.4), получим

$$P(|x-a|<\varepsilon) = P(a-\varepsilon < X < a+\varepsilon) = \frac{1}{2}\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) - \frac{1}{2}\Phi(-\frac{\varepsilon}{\sigma}) =,$$

(т.к. $\Phi(u)$ функция нечетная) $= \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

(6.5)

Для $X \in N(0,1)$ $\quad P(|x|<\varepsilon) = \Phi(\varepsilon)$.

Правило «трех сигм»

В (6.5) положим $\dfrac{\varepsilon}{\sigma} = u$. Тогда

$$P(|x - a| < \sigma_u) = \Phi(u).$$

Пусть $u = 1$ тогда $P(|x - a| < \sigma) = \Phi(1) = 0{,}6837$

$u = 2$ тогда $P(|x - a| < 2\sigma) = \Phi(2) = 0{,}9547$

$u = 3$ тогда $P(|x - a| < 3\sigma) = \Phi(3) = 0{,}9973$.

Правило «трех сигм»

Т.е. вероятность для нормально распределенной CB отклонится от MX на величину большую 3σ очень мала (=0,0027). Отсюда следует правило, получившее название правила «трех сигм».

Для $X \in N(a, \sigma)$ ее отклонение от MX по абсолютной величине практически не превышает утроенного среднеквадратичного отклонения.

Основные задачи, связанные с нормальным распределением

1. $X \in N(a,\sigma)$, $\quad Y = \dfrac{X-a}{\sigma} \Rightarrow Y \in N(0,1)$

$Y \in N(0,1)$, $\quad \mathrm{X} = \sigma Y + a \Rightarrow X \in N(a,\sigma)$.

2. $X_i \in N(a_i,\sigma_i)$, $\; i = 1,\dots,k \;\Rightarrow$

$$Y = \sum_1^k X_i \in N\Big(\sum_1^k a_i, \sqrt{\sum_1^k \sigma_i^2}\,\Big)$$

$$Y = \sum \gamma_i X_i \in N\Big(\sum \gamma_i a_i, \sqrt{\sum \gamma_i^2 \sigma_i^2}\,\Big).$$

Распределение Пирсона

Распределение Пирсона (хи –квадрат распределение).

Пусть даны независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_k \in N(0,1)$. Рассмотрим CB

$$\chi^2(k) = X_1^2 + \ldots + X_k^2 \geq 0.$$

Ее называют χ - квадрат величиной с k степенями свободы, а ее закон распределения распределением χ - квадрат с k степенями свободы.

Распределение Пирсона

Функция плотности для $\chi^2(x)$ - распределения имеет вид.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

где $\Gamma(t)$ - гамма-функция

$$\Gamma(t)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{t-1}dx\,.$$

Распределение Пирсона

Свойства χ^2 - распределения.

а. $M\left[\chi^2(k)\right]=k$

в. $D\left[\chi^2(n)\right]=2k$

с. Если $\chi^2(k_1)$ и $\chi^2(k_2)$- независимые CB, то

$$\chi^2(k_1)+\chi^2(k_2)=\chi^2(k_1+k_2).$$

Распределение Стьюдента

Пусть имеются две независимые CB:

$X_0 \in N(0,1)$ и $\chi^2(k)$.

Тогда говорят, что СВ

$$t(k) = \frac{X_0}{\sqrt{\dfrac{x^2(k)}{k}}}$$

имеет распределение Стьюдента с k степенями свободы.

$$Mt(k) = 0 \;\;, \mathrm{D}t(k) = \frac{k}{k-2}, \;\; k > 2 \,.$$

Биноминальное распределение

Пусть мы находимся в рамках схемы Бернулли.

Определение. Дискретная $CB \ X$, которая может принимать лишь целые неотрицательные значения с вероятностью $P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m g^{n-m}$, где $p, g > 0$, $p + g = 1, m = 0, 1, 2, \ldots, n$, называется распределенной по биномиальному закону с параметром p.

Биноминальное распределение

Можно показать, что $MX = np$, а $DX = npg$,

$$A = \frac{g-p}{\sqrt{npg}},\quad \text{E}=\frac{1-6pg}{\sqrt{npg}};$$

$$P(k_1 \le m \le k_2) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi(u_2) - \Phi(u_1)\right], \text{ где } \Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^u e^{\frac{-t^2}{2}}dt,$$

$$u_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npg}},\quad i = 1,2 \text{ или, что тоже:}$$

$$P(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon) \approx \Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pg}}).$$

Биномиальное распределение

На основании локальной и интегральной теорем Муавра-Лапласа можно показать, что при достаточно большом n и не очень малом p эта CB приближено распределена по нормальному закону $N(np, \sqrt{npg})$.

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона (закон распределения редких явлений).

$$P(X=m)\approx\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!},\;\; \lambda=np(n\to\infty,p\to 0) \tag{6.7}$$

Определение. Дискретная CB, принимающая целые неотрицательные значения с вероятностью (6.7) называется распределенной по закону Пуассона с параметром λ.

.

$$MX=DX=np=\lambda,\;\; A=\frac{1}{\sqrt{\lambda}};\;\; E=\frac{1}{\lambda}.$$