

# Равномерное распределение

*Определение.* Непрерывная СВ  $X$  имеет равномерное распределение на  $[a, b]$ , если ее функция плотности вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ c, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Т. к.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ , то  $c = \frac{1}{b-a}$ ,

$a$  и  $b$  - называются параметрами равномерного распределения и однозначно определяют его.

# Равномерное распределение

Функция распределения есть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b. \\ 1, & x > b \end{cases}$$

# Равномерное распределение

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{a+b}{2}, \text{ а дисперсия}$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x - MX)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(6.2)

$$A = \frac{M_3}{\sigma_x^3} = 0, \quad E = \frac{M_4}{\sigma_x^4} - 3 = -1, 2$$

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

$$[\alpha, \beta] \subset [a, b]$$

# Равномерное распределение

*Пример 6.1.* Автобус ходит регулярно с интервалом 12 минут. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать ему придется не более 5 минут? Найти математическое ожидание и  $\sigma_x$ .

Здесь СВ  $X$  - время ожидания. Очевидно,  $X \in [0, 12]$  и имеет равномерное распределение с функцией плотности распределения:

# Равномерное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{12}, & 0 \leq x \leq 12 \\ 0, & x > 12 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{12}, & 0 \leq x \leq 12 \\ 1, & x > 12 \end{cases}$$

$$P(0 \leq x \leq 5) = \int_0^5 f(x) dx = F(5) - F(0) = \frac{5}{12}$$

$$MX = 6 \quad DX = 12 \quad \sigma_x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

# Нормальное распределение

Нормальное распределение является одним из наиболее часто встречающихся.

*Определение.* Непрерывная СВ  $X$  имеет нормальное распределение, если ее функция плотности распределения  $f(x)$  имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где  $a$  и  $\sigma$  некоторые параметры (их смысл мы выясним позже)

$N(a, \sigma^2)$ .

# Нормальное распределение

Функция  $f(x)$  имеет максимум в точке  $x = a$ , равный  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ , и две точки перегиба  $x = a \pm \sigma$ .

График функции называют нормальной кривой.

Нетрудно показать, что  $MX = a$ , а  $DX = \sigma^2$ .

$$A = E = 0.$$

# Нормальное распределение

Выясним как будет меняться нормальная кривая при изменении  $a$  и  $\sigma$ .

Изменение  $a$  при постоянном  $\sigma$  смещает нормальную кривую вдоль оси абсцисс, не меняя формы.

Изменение  $\sigma$  при постоянном  $a$  меняет форму кривой: чем меньше  $\sigma$ , тем выше максимум и тем ближе точки перегиба, и наоборот.



# Нормальное распределение

Нормальный закон с параметрами  $a = 0$  и  $\sigma = 1$  ( $N(0,1)$ ) называется стандартным или нормированным.

Функция плотности вероятности стандартного закона имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

# Нормальное распределение

Вычислим вероятность  $P = (\alpha < x < \beta)$ .

Так как неравенство  $\alpha < x < \beta$  равносильно

неравенству  $\frac{\alpha - a}{\sigma} < \frac{x - a}{\sigma} < \frac{\beta - a}{\sigma}$ , то

$$\begin{aligned} P(\alpha < x < \beta) &= P\left(\frac{\alpha - a}{\sigma} < \frac{x - a}{\sigma} < \frac{\beta - a}{\sigma}\right) = \\ &= F\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

где

$$F(u) = \int_{-\infty}^u f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^u f(x) dx \right) =$$

# Нормальное распределение

$$\left( \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(u),$$

где  $\Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  называется функцией

Лапласа или интегралом вероятностей. Ее значения табулированы.

Итак,

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{2} \Phi(u_2) - \frac{1}{2} \Phi(u_1), \quad u_2 = \frac{\beta - a}{\sigma}, \quad u_1 = \frac{\alpha - a}{\sigma}.$$

(6.4)

# Нормальное распределение

Докажем нечетность функции  $\Phi(u)$ .

$$\Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\Phi(-u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{-u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[ \begin{array}{l} t = -z \\ dt = -dz \end{array} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-\frac{z^2}{2}} (-dz) = -\Phi(u).$$

# Нормальное распределение

Пусть  $X \in N(a, \sigma)$ . Найдем вероятность выполнения неравенства  $|X - a| < \varepsilon$ . Т.к. это неравенство равносильно неравенству  $a - \varepsilon < X < a + \varepsilon$ , то, воспользовавшись результатом (6.4), получим

$$P(|x - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) =, \\ (\text{т.к. } \Phi(u) \text{ функция нечетная}) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

(6.5)

Для  $X \in N(0, 1)$   $P(|x| < \varepsilon) = \Phi(\varepsilon)$ .

# Правило «трех сигм»

В (6.5) положим  $\frac{\varepsilon}{\sigma} = u$ . Тогда

$$P(|x - a| < \sigma_u) = \Phi(u).$$

Пусть  $u = 1$  тогда  $P(|x - a| < \sigma) = \Phi(1) = 0,6837$

$u = 2$  тогда  $P(|x - a| < 2\sigma) = \Phi(2) = 0,9547$

$u = 3$  тогда  $P(|x - a| < 3\sigma) = \Phi(3) = 0,9973.$

# Правило «трех сигм»

Т.е. вероятность для нормально распределенной СВ отклонится от  $MX$  на величину большую  $3\sigma$  очень мала ( $=0,0027$ ). Отсюда следует правило, получившее название правила «трех сигм».

Для  $X \in N(a, \sigma)$  ее отклонение от  $MX$  по абсолютной величине практически не превышает утроенного среднеквадратичного отклонения.

# Основные задачи, связанные с нормальным распределением

1.  $X \in N(a, \sigma), Y = \frac{X - a}{\sigma} \Rightarrow Y \in N(0, 1)$   
 $Y \in N(0, 1), X = \sigma Y + a \Rightarrow X \in N(a, \sigma).$

2.  $X_i \in N(a_i, \sigma_i), i = 1, \dots, k \Rightarrow$

$$Y = \sum_1^k X_i \in N\left(\sum_1^k a_i, \sqrt{\sum_1^k \sigma_i^2}\right)$$

$$Y = \sum \gamma_i X_i \in N\left(\sum \gamma_i a_i, \sqrt{\sum \gamma_i^2 \sigma_i^2}\right).$$



# Распределение Пирсона

Распределение Пирсона ( хи –квадрат распределение).

Пусть даны независимые случайные величины  $X_1, \dots, X_k \in N(0,1)$ . Рассмотрим СВ

$$\chi^2(k) = X_1^2 + \dots + X_k^2 \geq 0.$$

Ее называют  $\chi$  - квадрат величиной с  $k$  степенями свободы, а ее закон распределения распределением  $\chi$  - квадрат с  $k$  степенями свободы.

# Распределение Пирсона

Функция плотности для  $\chi^2(x)$ -распределения имеет вид.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

где  $\Gamma(t)$  - гамма-функция

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

# Распределение Пирсона

Свойства  $\chi^2$  - распределения.

а.  $M[\chi^2(k)] = k$

в.  $D[\chi^2(k)] = 2k$

с. Если  $\chi^2(k_1)$  и  $\chi^2(k_2)$  - независимые СВ, то  
 $\chi^2(k_1) + \chi^2(k_2) = \chi^2(k_1 + k_2)$ .

# Распределение Стьюдента

Пусть имеются две независимые СВ:

$X_0 \in N(0,1)$  и  $\chi^2(k)$ .

Тогда говорят, что СВ

$$t(k) = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{\chi^2(k)}{k}}}$$

имеет распределение Стьюдента с  $k$  степенями свободы.

$$Mt(k) = 0, Dt(k) = \frac{k}{k-2}, k > 2.$$

# Биномиальное распределение

Пусть мы находимся в рамках схемы Бернулли.

*Определение.* Дискретная СВ  $X$ , которая может принимать лишь целые неотрицательные значения с вероятностью

$$P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m g^{n-m}, \text{ где } p, g > 0,$$

$p + g = 1, m = 0, 1, 2, \dots, n$ , называется распределенной по биномиальному закону с параметром  $p$ .

# Биноминальное распределение

Можно показать, что  $MX = np$ , а  $DX = npg$ ,

$$A = \frac{g - p}{\sqrt{npq}}, \quad E = \frac{1 - 6pq}{\sqrt{npq}};$$

$$P(k_1 \leq m \leq k_2) \approx \frac{1}{2} [\Phi(u_2) - \Phi(u_1)], \quad \text{где } \Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$u_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = 1, 2 \text{ или, что тоже:}$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

# Биномиальное распределение

На основании локальной и интегральной теорем Муавра-Лапласа можно показать, что при достаточно большом  $n$  и не очень малом  $p$  эта СВ приближено распределена по нормальному закону  $N(np, \sqrt{npq})$ .

# Распределение Пуассона

Распределение Пуассона (закон распределения редких явлений).

$$P(X = m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np (n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0) \quad (6.7)$$

*Определение.* Дискретная СВ, принимающая целые неотрицательные значения с вероятностью (6.7) называется распределенной по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ .

.

$$MX = DX = np = \lambda, \quad A = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}; \quad E = \frac{1}{\lambda}.$$