

Равномерное распределение

Определение. Непрерывная СВ X имеет равномерное распределение на $[a, b]$, если ее функция плотности вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ c, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Т. к. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, то $c = \frac{1}{b-a}$,

a и b - называются параметрами равномерного распределения и однозначно определяют его.

Равномерное распределение

Функция распределения есть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b. \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Равномерное распределение

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{a+b}{2}, \text{ а дисперсия}$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (x - MX)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(6.2)

$$A = \frac{M_3}{\sigma_x^3} = 0, \quad E = \frac{M_4}{\sigma_x^4} - 3 = -1, 2$$

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

$$[\alpha, \beta] \subset [a, b]$$

Равномерное распределение

Пример 6.1. Автобус ходит регулярно с интервалом 12 минут. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать ему придется не более 5 минут? Найти математическое ожидание и σ_x .

Здесь СВ X - время ожидания. Очевидно, $X \in [0, 12]$ и имеет равномерное распределение с функцией плотности распределения:

Равномерное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{12}, & 0 \leq x \leq 12 \\ 0, & x > 12 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{12}, & 0 \leq x \leq 12 \\ 1, & x > 12 \end{cases}$$

$$P(0 \leq x \leq 5) = \int_0^5 f(x) dx = F(5) - F(0) = \frac{5}{12}$$

$$MX = 6 \quad DX = 12 \quad \sigma_x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Нормальное распределение

Нормальное распределение является одним из наиболее часто встречающихся.

Определение. Непрерывная СВ X имеет нормальное распределение, если ее функция плотности распределения $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a и σ некоторые параметры (их смысл мы выясним позже)

$N(a, \sigma^2)$.

Нормальное распределение

Функция $f(x)$ имеет максимум в точке $x = a$, равный $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$, и две точки перегиба $x = a \pm \sigma$.

График функции называют нормальной кривой.

Нетрудно показать, что $MX = a$, а $DX = \sigma^2$.

$$A = E = 0.$$

Нормальное распределение

Выясним как будет меняться нормальная кривая при изменении a и σ .

Изменение a при постоянном σ смещает нормальную кривую вдоль оси абсцисс, не меняя формы.

Изменение σ при постоянном a меняет форму кривой: чем меньше σ , тем выше максимум и тем ближе точки перегиба, и наоборот.

Нормальное распределение

Нормальный закон с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ ($N(0,1)$) называется стандартным или нормированным.

Функция плотности вероятности стандартного закона имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Нормальное распределение

Вычислим вероятность $P = (\alpha < x < \beta)$.

Так как неравенство $\alpha < x < \beta$ равносильно

неравенству $\frac{\alpha - a}{\sigma} < \frac{x - a}{\sigma} < \frac{\beta - a}{\sigma}$, то

$$\begin{aligned} P(\alpha < x < \beta) &= P\left(\frac{\alpha - a}{\sigma} < \frac{x - a}{\sigma} < \frac{\beta - a}{\sigma}\right) = \\ &= F\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

где

$$F(u) = \int_{-\infty}^u f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^u f(x) dx \right) =$$

Нормальное распределение

$$\left(\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi(u),$$

где $\Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ называется функцией

Лапласа или интегралом вероятностей. Ее значения табулированы.

Итак,

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{2} \Phi(u_2) - \frac{1}{2} \Phi(u_1), \quad u_2 = \frac{\beta - a}{\sigma}, \quad u_1 = \frac{\alpha - a}{\sigma}.$$

(6.4)

Нормальное распределение

Докажем нечетность функции $\Phi(u)$.

$$\Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\Phi(-u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{-u} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left[\begin{array}{l} t = -z \\ dt = -dz \end{array} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-\frac{z^2}{2}} (-dz) = -\Phi(u).$$

Нормальное распределение

Пусть $X \in N(a, \sigma)$. Найдем вероятность выполнения неравенства $|X - a| < \varepsilon$. Т.к. это неравенство равносильно неравенству $a - \varepsilon < X < a + \varepsilon$, то, воспользовавшись результатом (6.4), получим

$$P(|x - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) =, \\ (\text{т.к. } \Phi(u) \text{ функция нечетная}) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

(6.5)

Для $X \in N(0, 1)$ $P(|x| < \varepsilon) = \Phi(\varepsilon)$.

Правило «трех сигм»

В (6.5) положим $\frac{\varepsilon}{\sigma} = u$. Тогда

$$P(|x - a| < \sigma_u) = \Phi(u).$$

Пусть $u = 1$ тогда $P(|x - a| < \sigma) = \Phi(1) = 0,6837$

$u = 2$ тогда $P(|x - a| < 2\sigma) = \Phi(2) = 0,9547$

$u = 3$ тогда $P(|x - a| < 3\sigma) = \Phi(3) = 0,9973.$

Правило «трех сигм»

Т.е. вероятность для нормально распределенной СВ отклонится от MX на величину большую 3σ очень мала ($=0,0027$). Отсюда следует правило, получившее название правила «трех сигм».

Для $X \in N(a, \sigma)$ ее отклонение от MX по абсолютной величине практически не превышает утроенного среднеквадратичного отклонения.

Основные задачи, связанные с нормальным распределением

1. $X \in N(a, \sigma), Y = \frac{X - a}{\sigma} \Rightarrow Y \in N(0, 1)$

$Y \in N(0, 1), X = \sigma Y + a \Rightarrow X \in N(a, \sigma).$

2. $X_i \in N(a_i, \sigma_i), i = 1, \dots, k \Rightarrow$

$$Y = \sum_1^k X_i \in N\left(\sum_1^k a_i, \sqrt{\sum_1^k \sigma_i^2}\right)$$

$$Y = \sum \gamma_i X_i \in N\left(\sum \gamma_i a_i, \sqrt{\sum \gamma_i^2 \sigma_i^2}\right).$$

Распределение Пирсона

Распределение Пирсона (хи –квадрат распределение).

Пусть даны независимые случайные величины $X_1, \dots, X_k \in N(0,1)$. Рассмотрим СВ

$$\chi^2(k) = X_1^2 + \dots + X_k^2 \geq 0.$$

Ее называют χ - квадрат величиной с k степенями свободы, а ее закон распределения распределением χ - квадрат с k степенями свободы.

Распределение Пирсона

Функция плотности для $\chi^2(x)$ -распределения имеет вид.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

где $\Gamma(t)$ - гамма-функция

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx.$$

Распределение Пирсона

Свойства χ^2 - распределения.

а. $M[\chi^2(k)] = k$

в. $D[\chi^2(k)] = 2k$

с. Если $\chi^2(k_1)$ и $\chi^2(k_2)$ - независимые СВ, то
 $\chi^2(k_1) + \chi^2(k_2) = \chi^2(k_1 + k_2)$.

Распределение Стьюдента

Пусть имеются две независимые СВ:

$X_0 \in N(0,1)$ и $\chi^2(k)$.

Тогда говорят, что СВ

$$t(k) = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{\chi^2(k)}{k}}}$$

имеет распределение Стьюдента с k степенями свободы.

$$Mt(k) = 0, Dt(k) = \frac{k}{k-2}, k > 2.$$

Биномиальное распределение

Пусть мы находимся в рамках схемы Бернулли.

Определение. Дискретная СВ X , которая может принимать лишь целые неотрицательные значения с вероятностью

$$P_n(m) = P(X = m) = C_n^m p^m g^{n-m}, \text{ где } p, g > 0,$$

$p + g = 1, m = 0, 1, 2, \dots, n$, называется распределенной по биномиальному закону с параметром p .

Биноминальное распределение

Можно показать, что $MX = np$, а $DX = npq$,

$$A = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}, \quad E = \frac{1 - 6pq}{\sqrt{npq}};$$

$$P(k_1 \leq m \leq k_2) \approx \frac{1}{2} [\Phi(u_2) - \Phi(u_1)], \quad \text{где } \Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$u_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = 1, 2 \text{ или, что тоже:}$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Биномиальное распределение

На основании локальной и интегральной теорем Муавра-Лапласа можно показать, что при достаточно большом n и не очень малом p эта СВ приближено распределена по нормальному закону $N(np, \sqrt{npq})$.

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона (закон распределения редких явлений).

$$P(X = m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np (n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0) \quad (6.7)$$

Определение. Дискретная СВ, принимающая целые неотрицательные значения с вероятностью (6.7) называется распределенной по закону Пуассона с параметром λ .

.

$$MX = DX = np = \lambda, \quad A = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}; \quad E = \frac{1}{\lambda}.$$