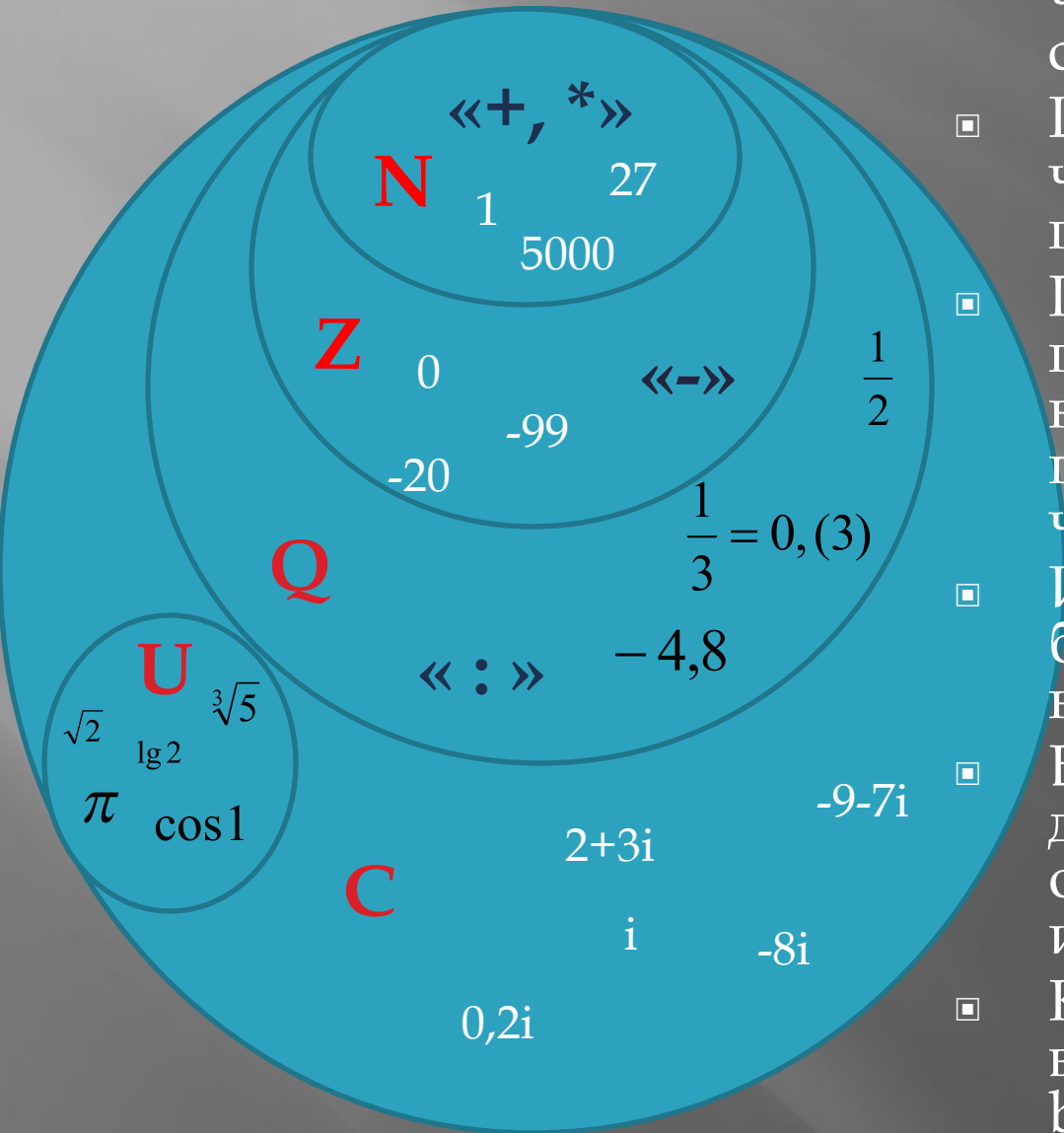


Расширение понятия числа



- **Натуральные числа** – это числа, используемые для счета.
- **Целые числа** – натуральные числа, числа им противоположные и 0.
- **Рациональные числа** – числа, представимые в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – число натуральное.
- **Иррациональные числа** – бесконечные десятичные непериодические дроби
- **Вещественные или действительные числа** – объединение рациональных и иррациональных чисел
- **Комплексные числа** – выражения вида $a+bi$, где a и b – вещественные числа, а i –

РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

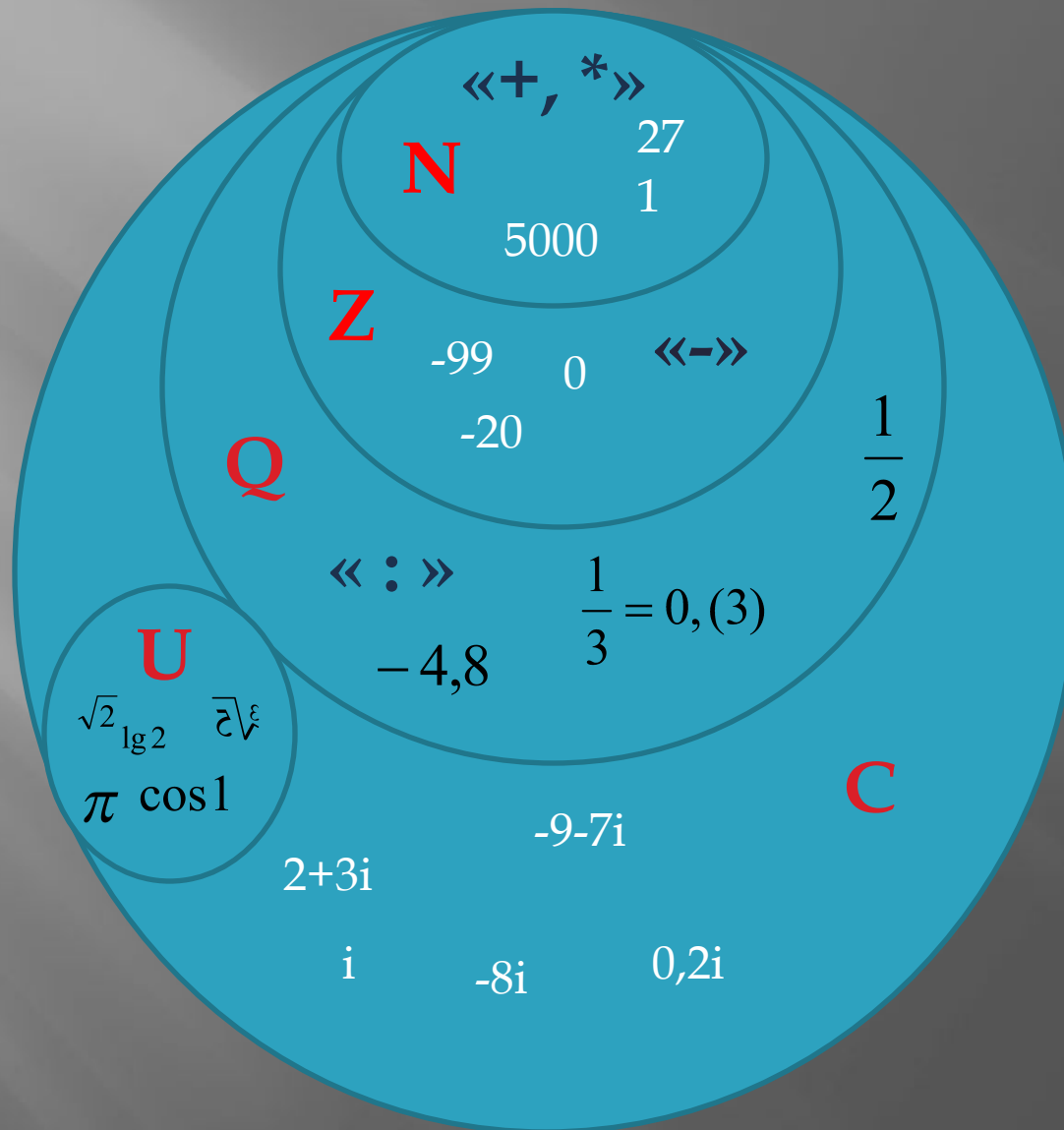
Комплексные числа

COMPLEX

Принцип преемственности М. В.Ломоносова

- ▣ Невозможное должно стать возможным
- ▣ Все верное должно остаться верным
(эволюционный подход к науке)

Расширение понятия числа



Мнимая единица.

- Т.к. любое отрицательное число можно представить в виде произведения -1 и числа противоположного данному, то задачу вычисления корня из отрицательного числа можно свести к задаче вычисления корня из -1 .
$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = 2\sqrt{-1} = 2i$$
- Например: $i^2 = -1$
- Введем число i такое что
- Данное число назовем мнимой единицей.

Задание № 1.

▣ Вычислить:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

$$i^{318} = (i^2)^{159} = (-1)^{159} = -1$$

▣

$$i^{231} = i \cdot i^{230} = i \cdot (i^2)^{115} = i \cdot (-1) = -i$$

$$i^{2012} = i^{2012} = (i^4)^{503} = 1$$

Комплексные числа

- Множество, состоящее из выражений вида $z=a+bi$, где $i^2 = -1$ и a, b – действительные числа, называется множеством комплексных чисел.

При этом сложение, вычитание, умножение и деление двух чисел в этом множестве определены соответственно следующим правилами:

- $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
- $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
- $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
- $\frac{c+di}{a+bi} = \frac{ca+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-cb}{a^2+b^2}i$

Задание № 2.

- Даны два комплексных числа $z_1 = 10 - i$
 $z_2 = -5 + 2i$
Найти их сумму, разность и произведение.

Мнемоническое правило:

«действуй как с многочленами»

$$z_1 + z_2 = (10 - i) + (-5 + 2i) = (10 - 5) + (2i - i) = 5 + i$$

$$z_1 - z_2 = (10 - i) - (-5 + 2i) = (10 + 5) + (-i - 2i) = 15 - 3i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (10 - i) \cdot (-5 + 2i) = -50 + 20i + 5i - 2i^2 = -50 + 15i + 2 = -48 + 25i$$

Задание № 2 (продолжение)

- Для $z = a + bi$ комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным.

Свойство: $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$

- Правило деления: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$

- Даны два комплексных числа $z_1 = 10 - i$

Выполнить деление $z_2 = -5 + 2i$

$$\frac{10 - i}{-5 + 2i} = \frac{(10 - i)(-5 - 2i)}{(-5 + 2i)(-5 - 2i)} = \frac{-50 - 20i + 5i + 2i^2}{4 + 25} = \frac{-52 - 15i}{29} = -\frac{52}{29} - \frac{15}{29}i$$

Свойства действий над комплексными числами.

- ▣ Переместительный закон: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

- ▣ Сочетательный закон: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 = z_2 + (z_1 + z_3)$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

- ▣ Распределительный закон: $z_1 \cdot (z_2 \pm z_3) = z_1 \cdot z_2 \pm z_1 \cdot z_3$

- ▣ Формулы сокращенного умножения:

$$(z_1 \pm z_2)^2 = z_1^2 \pm 2z_1z_2 + z_2^2$$

$$(z_1 \pm z_2)^3 = z_1^3 \pm 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 \pm z_2^3$$

$$z_1^3 - z_2^3 = (z_1 - z_2)(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2)$$

Элементы комплексного числа.

- $z = a + bi$
 - a – вещественная часть числа, $\text{Re}(z) = a$
 - b – мнимая часть числа, $\text{Im}(z) = b$

Пример: $3 - 8i$ $\text{Re}(3 - 8i) = 3$, $5i$ $\text{Re}(5i) = 0$, 10 $\text{Re}(10) = 10$
 $\text{Im}(3 - 8i) = -8$, $\text{Im}(5i) = 5$, $\text{Im}(10) = 0$
 a – вещественное число, bi – чисто мнимое число

- Модулем комплексного числа z называют корень из суммы квадратов его вещественной и мнимой части.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Свойство:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Вычислить

$$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$3 - 4i$

9

$$|9| = \sqrt{9^2} = 9$$

$-7i$

$1 + 2i$

$$|-7i| = \sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Равенство комплексных чисел

□ Комплексные числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ равны $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases}$

□ Операция сравнения для комплексных чисел неопределена.

□ Пример: Найдите действительные числа x и y из равенства $(3x - y) + (x + y)i = 6 - 2i$

$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

ответ : (1; -3)

Домашнее задание

- ▣ Учебник: стр. 208 № 6-14 (нечетные)
стр. 212 № 16-22 (нечетные)