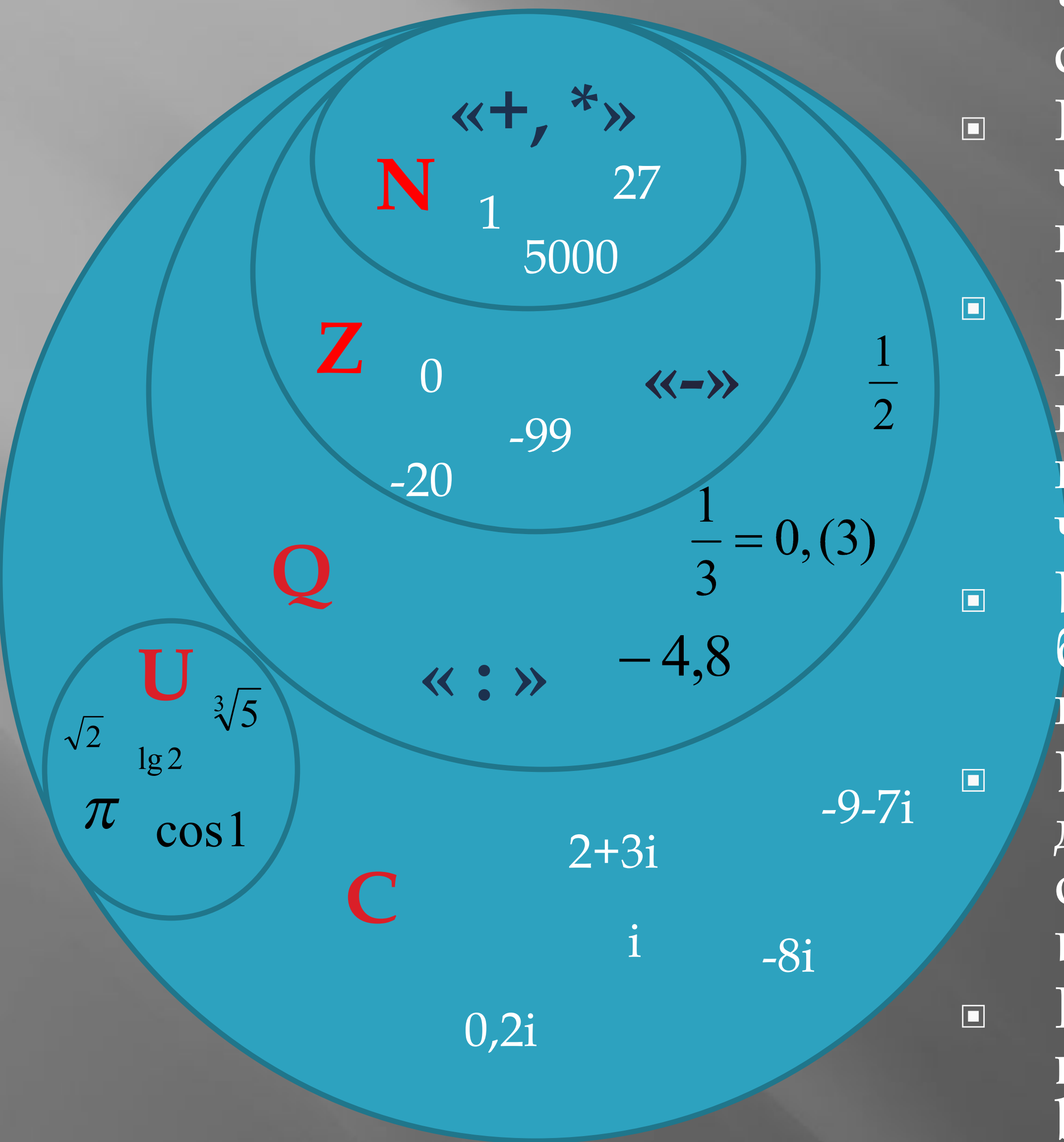
Расширение понятия числа



- Натуральные числа – это числа, используемые для счета.
- Целые числа – натуральные числа, числа им противоположные и 0.
- Рациональные числа – числа, представимые в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n- число натуральное.
- Иррациональные числа – бесконечные десятичные непериодические дроби
- Вещественные или действительные числа – объединение рациональных и иррациональных чиселю
- Комплексные числа – выражения вида a+bi, где a и b – вещественные числа, а i – $i^2=1$

РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

Комплексные числа

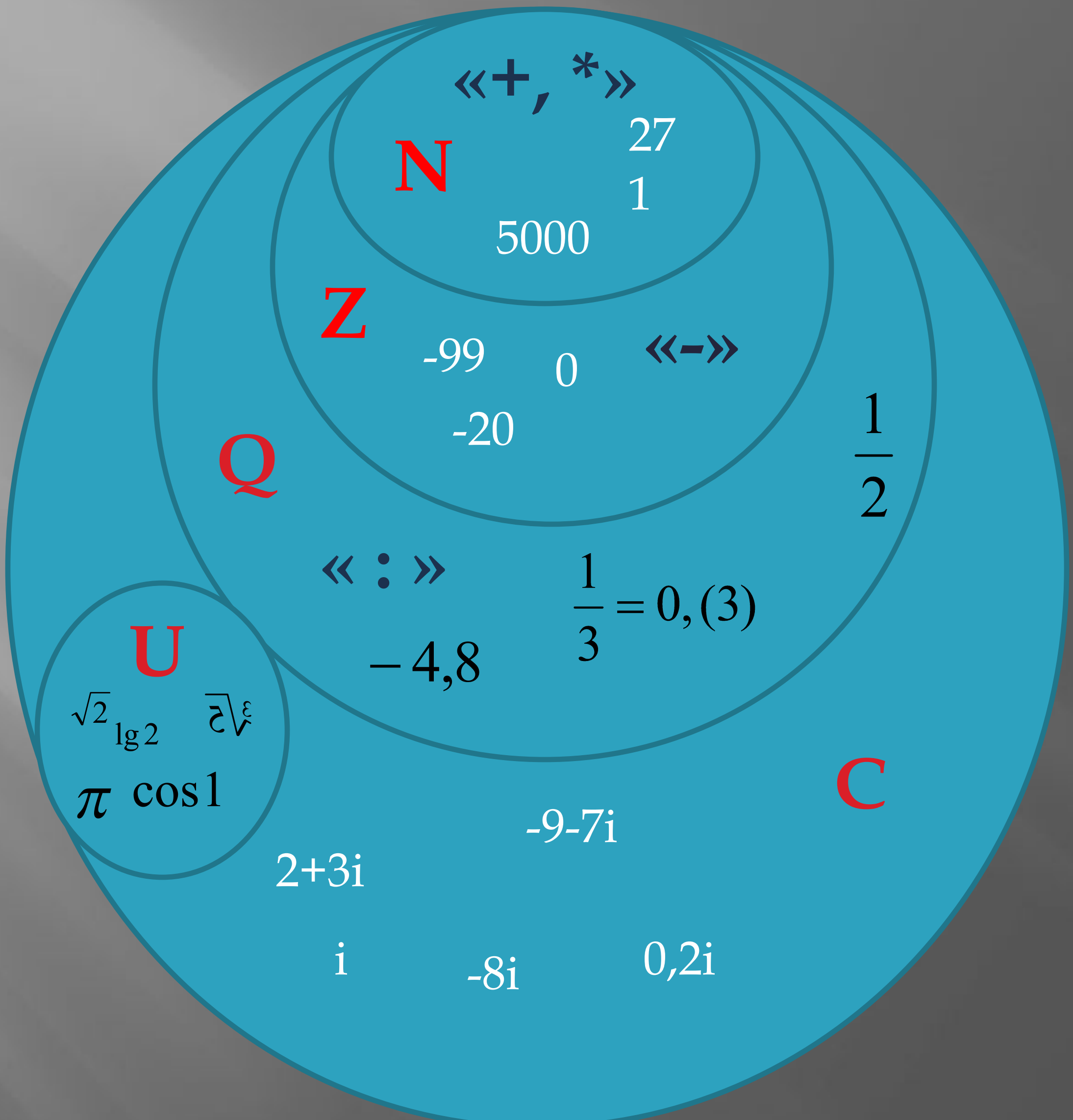
COMPLEX

Принцип преемственности М. В.Ломоносова

- Невозможное должно стать возможным
- Все верное должно остаться верным

(эволюционный подход к науке)

Расширение понятия числа



Мнимая единица.

- Т.к. любое отрицательное число можно представить в виде произведения -1 и числа противоположного данному, то задачу вычисления корня из отрицательного числа можно свести к задаче вычисления корня из -1.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = 2\sqrt{-1} = 2i$$

- Например:

$$i^2 = -1$$

- Введем число i такое что
- Данное число назовем мнимой единицей.

Задание № 1.

- Вычислить:

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1$$
$$i^5 = i$$
$$i^6 = -1$$

$$i^{4n} = 1$$
$$i^{4n+1} = i$$
$$i^{4n+2} = -1$$
$$i^{4n+3} = -i$$

-

$$i^{318} = (i^2)^{159} = (-1)^{159} = -1$$
$$i^{231} = i \cdot i^{230} = i \cdot (i^2)^{115} = i \cdot (-1) = -i$$
$$i^{2012} = i^{2012} = (i^4)^{503} = 1$$

Комплексные числа

- Множество, состоящее из выражений вида z=a+bi , где $i^2=-1$ и a, b – действительные числа, называется множеством комплексных чисел.

При этом сложение, вычитание, умножение и деление двух чисел в этом множестве определены соответственно следующим правилами:

- (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i
- (a+bi)-(c+di)=(a-c)+(c-d)i
- (a+bi)(c+di)=(ac+bd)+(ad+bc)i

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{ca+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-cb}{a^2+b^2}i$$

Задание № 2.

- Даны два комплексных числа $z_1 = 10 - i$, $z_2 = -5 + 2i$

Найти их сумму, разность и произведение.

Мнемоническое правило:

«действуй как с многочленами»

$$z_1 + z_2 = (10 - i) + (-5 + 2i) = (10 - 5) + (2i - i) = 5 + i$$

$$z_1 - z_2 = (10 - i) - (-5 + 2i) = (10 + 5) + (-i - 2i) = 15 - 3i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (10 - i) \cdot (-5 + 2i) = -50 + 20i + 5i - 2i^2 = -50 + 15i + 2 = -48 + 25i$$

Задание № 2 (продолжение)

- Для z=a+bi комплексное числа $\bar{z} = a - bi$ называется сопряженным .

Свойство: $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

- Правило деления: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$

- Даны два комплексных числа $z_1 = 10 - i$

  Выполнить деление $z_2 = -5 + 2i$

$$\frac{10-i}{-5+2i} = \frac{(10-i)(-5-2i)}{(-5+2i)(-5-2i)} = \frac{-50-20i+5i+2i^2}{4+25} = \frac{-52-15i}{29} = -\frac{52}{29} - \frac{12}{29}i$$

Свойства действий над комплексными числами.

- Переместительный закон: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z \cdot_1$

- Сочетательный закон: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 = z_2 + (z_1 + z_3)$

  $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

- Распределительный закон: $z_1 \cdot (z_2 \pm z_3) = z_1 \cdot z_2 \pm z_1 \cdot z_3$

- Формулы сокращенного умножения:

$$(z_1 \pm z_2)^2 = z_1^2 \pm 2z_1z_2 + z_2^2$$

$$(z_1 \pm z_2)^3 = z_1^3 \pm 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 \pm z_2^3$$

$$z_1^3 - z_2^3 = (z_1 - z_2)(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2)$$

Элементы комплексного числа.

- z=a+bi

a – вещественная часть числа, Re(z)=a

b – мнимая часть числа, Im(z)=b

Пример: 3-8i $\begin{array}{l}\operatorname{Re}(3-8i)=3\\ \operatorname{Im}(3-8i)=-8\end{array}$, 5i $\begin{array}{l}\operatorname{Re}(5i)=0\\ \operatorname{Im}(5i)=5\end{array}$, 10 $\begin{array}{l}\operatorname{Re}(10)=10\\ \operatorname{Im}(10)=0\end{array}$

a – вещественное число, bi – чисто мнимое число

- Модулем комплексного числа z называют корень из суммы квадратов его вещественной и мнимой части.

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Свойство:

$$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$$

Вычислить |z|

$$|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}$$

3-4i $\quad |3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$

9 $\quad |9|=\sqrt{9^2}=9$

-7i $\quad |-7i|=\sqrt{(-7)^2}=\sqrt{49}=7$

1+2i $\quad |1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

Равенство комплексных чисел

- Комплексные числа $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ равны $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases}$
- Операция сравнения для комплексных чисел неопределена.
- Пример: Найдите действительные числа x и y из равенства (3x-y)+(x+y)i=6-2i

$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

$$\textit{ответ}: (1; -3)$$

Домашнее задание

- Учебник: стр. 208 № 6-14 (нечетные)
  стр. 212 № 16-22 (нечетные)