С2

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

С2

Материал, полученный и собранный в ходе работы над проектом, является незаменимым при подготовке к решению задач ЕГЭ С2.

Умение решать задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми разными способами может существенно сократить время их решения.

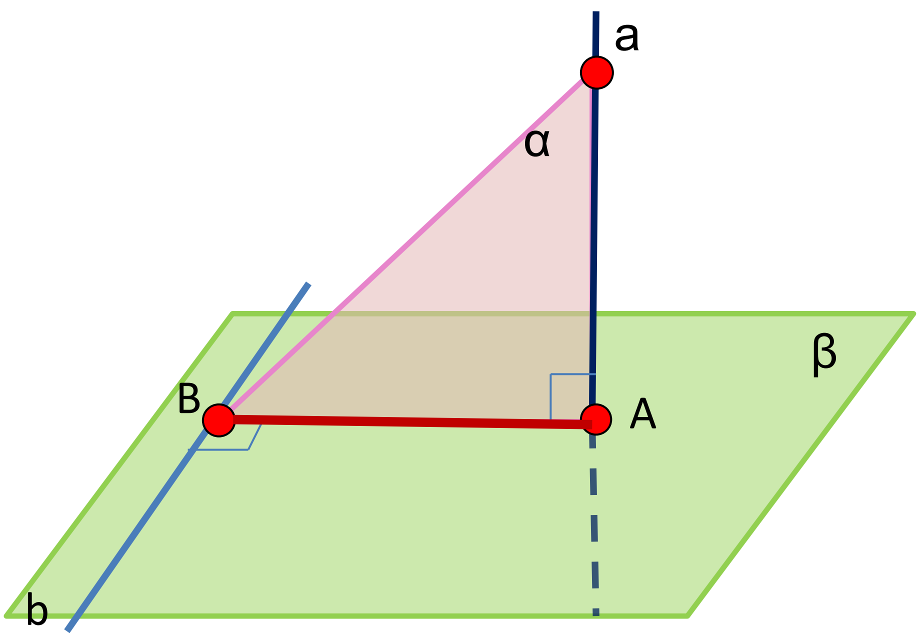
Способы нахождения:

- 1) Общий перпендикуляр – отрезок, перпендикулярный 2м параллельным плоскостям, в которых лежат скрещ. прямые.
- 2)Перпендикуляр между прямой и проекцией другой прямой. Первая прямая лежит в плоскости, а другая пересекает её под прямым углом
- 3)Перпендикуляр между прямыми. Одна прямая лежит в плоскости, а другая параллельна этой плоскости
- 4)Перпендикуляр между проекциями на плоскость.

Построение общего перпендикуляра. II способ

- Через каждую из скрещивающихся прямых проходит плоскость, перпендикулярная другой прямой.
- Искомый общий перпендикуляр лежит на прямой пересечения этих плоскостей и является отрезком с концами в точках пересечения прямых с соответствующими плоскостями.

AB- общий перпендикуляр



$$a \mathbin{\dot{-}} b$$

$$a \in \alpha$$

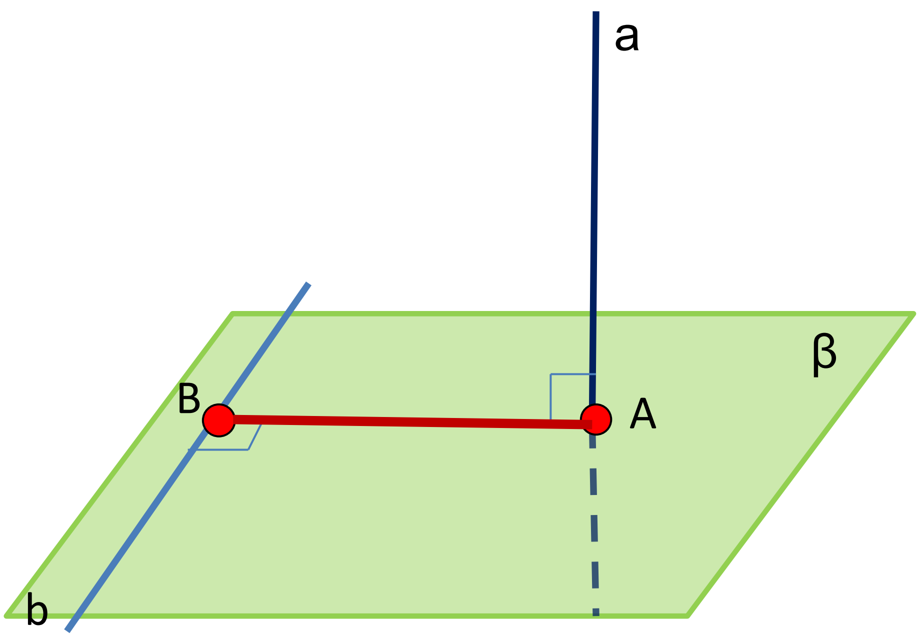
$$b \in \beta$$

$$\alpha \wedge \beta = AB$$

$$AB \perp b$$
$$AB \perp a$$

Другой вариант построения

- Не требуется рисовать обе плоскости, только одну.
- Тогда общий перпендикуляр- это перпендикуляр из точки пересечения одной прямой с плоскостью на другую прямую.



$$a \mathbin{\dot{-}} b$$

$$b \in \beta$$

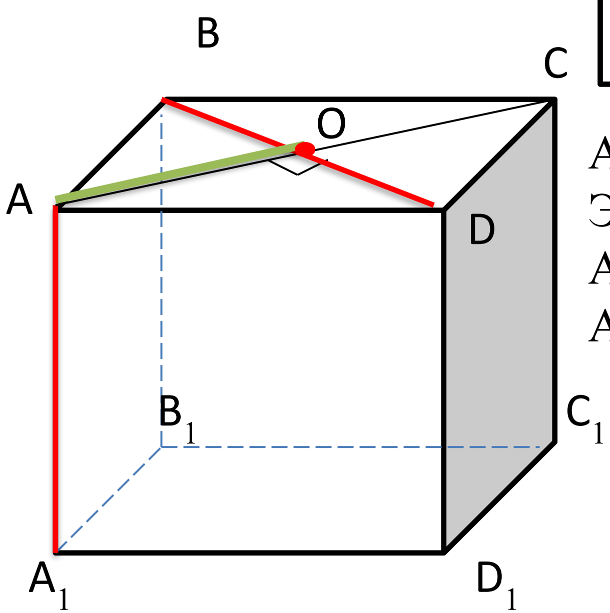
$$AB \perp b$$

$$AB \perp a$$

Задача №1

Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (все ребра равны 1). Найти расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и BD.

Построим общий перпендикуляр прямых AA_1 и BD, равный расстоянию между скрещивающимися прямыми.



$AA_1 \perp (ABD)$	значит, можно воспользоваться способом 2,
$BD \in (ABD)$	для построения общего перпендикуляра

AA_1 (ABD) = A, опустим перпендикуляр из A на BD.
Это отрезок AO. AO ϵ AC, AC и BD – диагонали квадрата ABCD, пересекаются в O под прямым углом.
AO – расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и BD

Найдем его: AO = 0,5 AC.
Т.к. квадрат со стороной 1, то его диагональ AC = $\sqrt{2}$

Тогда, AO = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

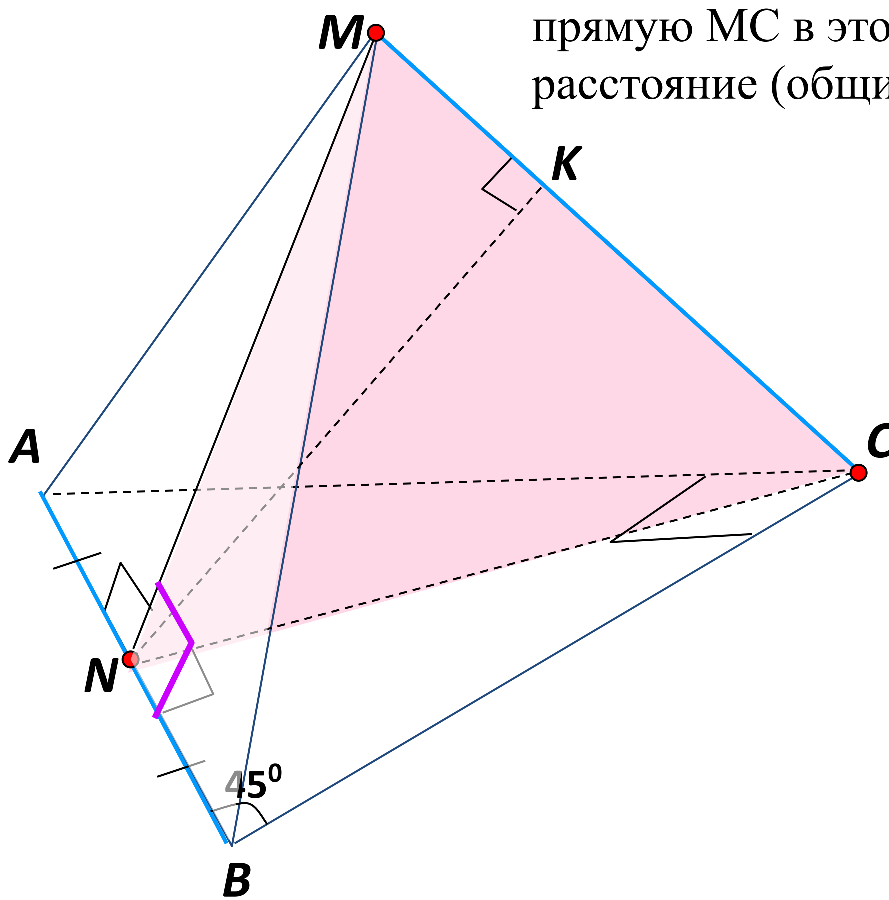
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Задача №2

В основании пирамиды MABC лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC (AC=BC=4). Ребра MA, MB и MC равны 8. Найдите расстояние между прямыми AB и CM.

ΔABC и Δ AMB – равнобедренные, значит, высота является и медианой.

Прямая AB перпендикулярна плоскости MCN, а прямая MC лежит в этой плоскости. Опустим перпендикуляр из точки N на прямую MC в этой плоскости. NK – искомое расстояние (общий перпендикуляр).



Из ΔCNB:

$$\sin 45^0 = \frac{NC}{BC};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{NC}{4};$$

$$NC = \frac{4\sqrt{2}}{2};$$

$$NC = 2\sqrt{2}.$$

Из ΔNMB:

$$MB^2 = NM^2 + NB^2;$$

$$8^2 = NM^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2;$$

$$NM^2 = 64 - 8;$$

$$NM = \pm\sqrt{56};$$

$$NM = 2\sqrt{14}.$$

Найдем высоту ΔMNC.

Составим систему уравнений.

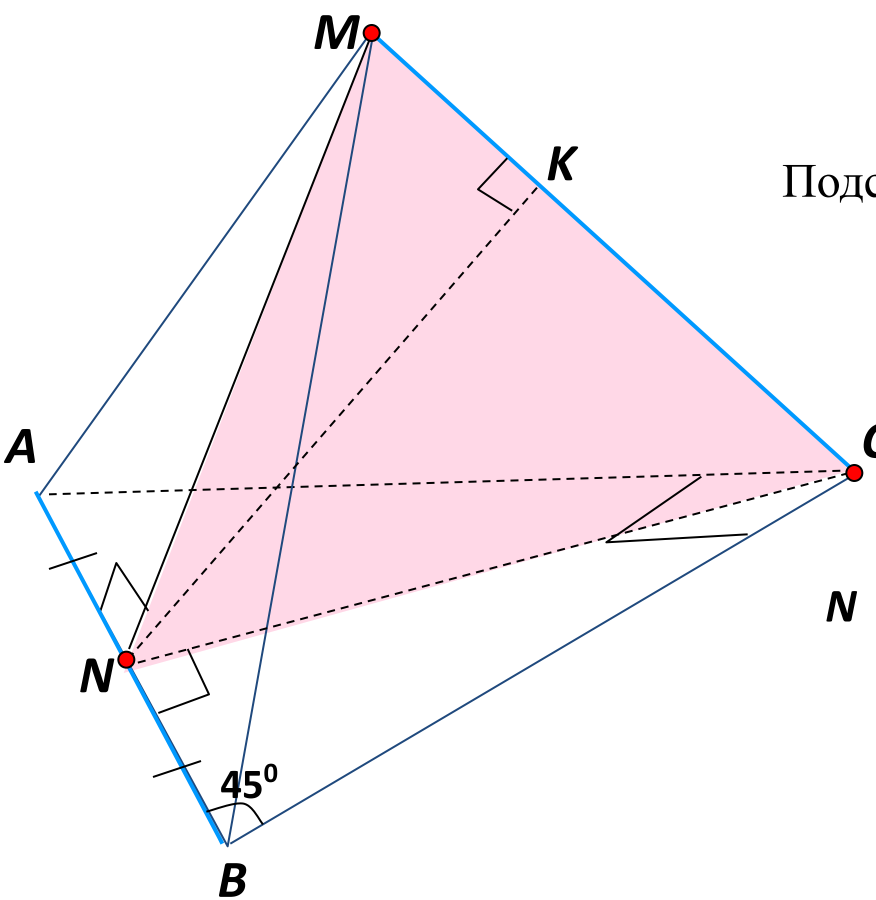
$$\begin{cases} NM^2 = h^2 + x^2 \\ NC^2 = h^2 + (8-x)^2 \end{cases}$$

Применили теорему Пифагора для прямоугольных треугольников CNK и NKM.

$$48 = -64 + 16x;$$

$$16x = 64 + 48;$$

$$16x = 112.$$



Подставим в первое уравнение $x = 7.$

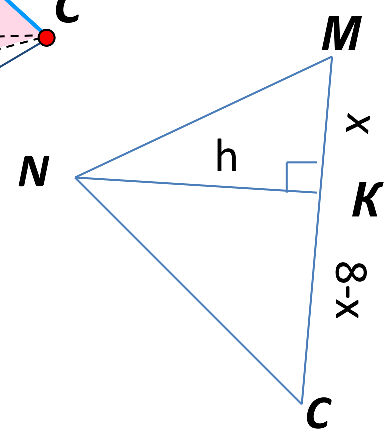
$$56 = h^2 + 49;$$

$$h^2 = 56 - 49;$$

$$h^2 = 7;$$

$$h = \pm\sqrt{7}$$

$$h = \sqrt{7}$$



Ответ: $NK = \sqrt{7}$