РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

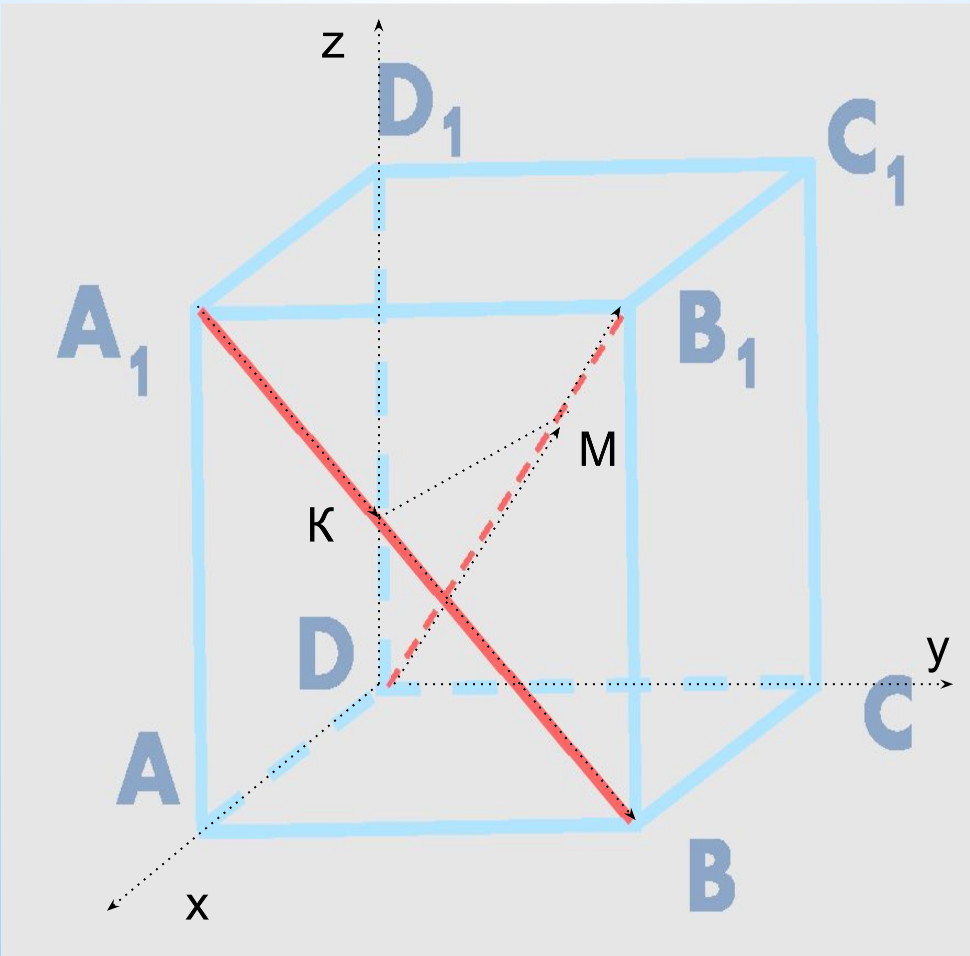
Координатным и векторным способом

Алферова Наталья Васильевна,
учитель математики
МКОУ «Горячеключевская СОШ»
Омского района Омской области

Основные понятия

- Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина общего перпендикуляра к данным прямым
- Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от точки одной прямой до плоскости параллельной данной прямой и содержащей вторую прямую.

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DB_1.



Точки A_1 (1;0;1), B (1;1;0)

Вектор $\vec{A_1B}$ {0;1;-1}

Точки D (0;0;0), B_1 (1;1;1)

Вектор $\vec{DB_1}$ {1;1;1}

Пусть КМ ⊥ A_1B и КМ ⊥ DB_1, значит КМ – искомое расстояние.

Пусть точка К лежит на прямой A_1B, а точка М на прямой DB_1. Рассмотрим векторы $\vec{A_1K}$ и $\vec{DM}$, сонаправленные с направляющими векторами данных прямых . По лемме о коллинеарных векторах вектор $\vec{A_1K} = a \cdot \vec{A_1B}$, т.е. вектор $\vec{A_1K}$ {0;a;-a}, вектор $\vec{DM} = b \cdot \vec{DB_1}$, т.е. вектор $\vec{DM}$ {b;b;b}.

Тогда К(1;a;1-a), М(b;b;b) и вектор $\vec{KM}$ {b-1;b-a;b-1+a}.

Решим систему из условия перпендикулярности двух векторов

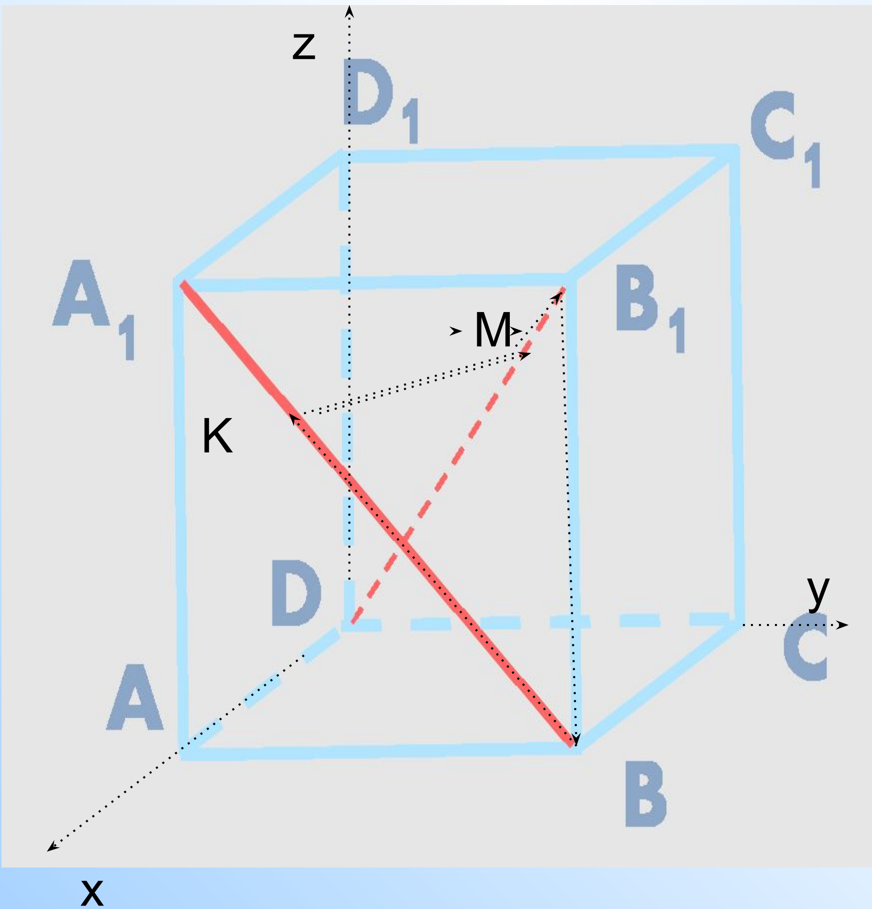
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0 & 0\cdot(b-1)+1\cdot(b-a)-1\cdot(b-1+a) = 0, \\ \overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{DB_1}=0 & 1\cdot(b-1)+1\cdot(b-a)+1\cdot(b-1+a) = 0 \end{cases}$$

Решив систему получаем $a=1/2$, $b=-2/3$, подставим эти значения в координаты вектора $\overrightarrow{KM}$: $\overrightarrow{KM}\ \{-1/3;\ 5/6;\ -1/2\}$. Найдём длину вектора $|\overrightarrow{KM}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $|\overrightarrow{KM}| = \sqrt{1/9+1/36+1/36} = \sqrt{6}/6$. Ответ: $\sqrt{6}/6$

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DB_1.

$$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BK}=a\cdot\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{B_1B}+b\cdot\overrightarrow{BA_1}$$



$\overrightarrow{DB_1}\{1;1;1\}$, $\overrightarrow{BA_1}\{0;-1;1\}$, $\overrightarrow{B_1B}\{0;0;1\}$

$$\overrightarrow{KM} = \{a;\ a;\ a\} + \{0;\ 0;\ 1\} + \{0;\ -b;\ b\} =$$
$$= \{a;\ a-b;\ a+1+b\}$$

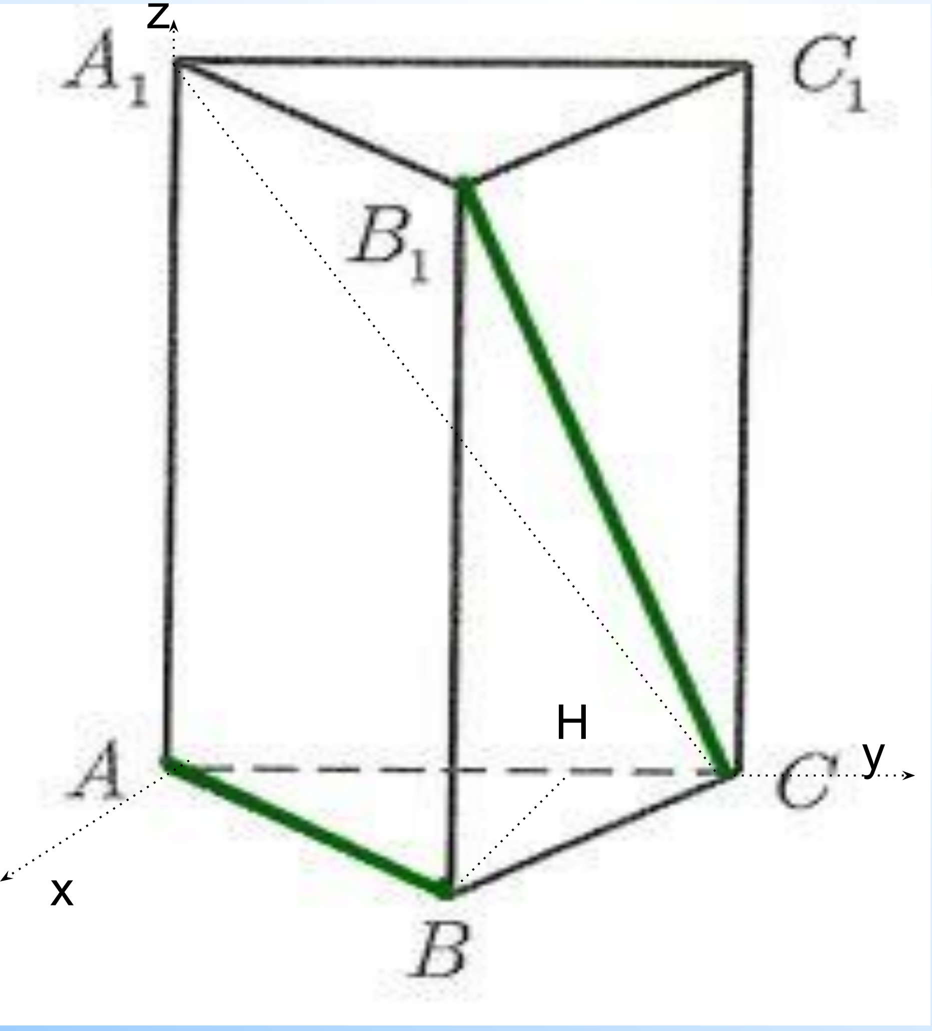
$$\begin{cases} \overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0 & 0\cdot a-1\cdot(a-b)+1\cdot(a+1+b)=0, \\ \overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{DB_1}=0 & 1\cdot a+1\cdot(a-b)+1\cdot(a+1+b)=0 \end{cases}$$

$$b=-\tfrac{1}{2},\ a=-\tfrac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{KM}\ \{-1/3;\ 1/6;\ 1/6\}$$

$$|\overrightarrow{KM}| = \sqrt{1/9+1/36+1/36} = \sqrt{6}/6$$

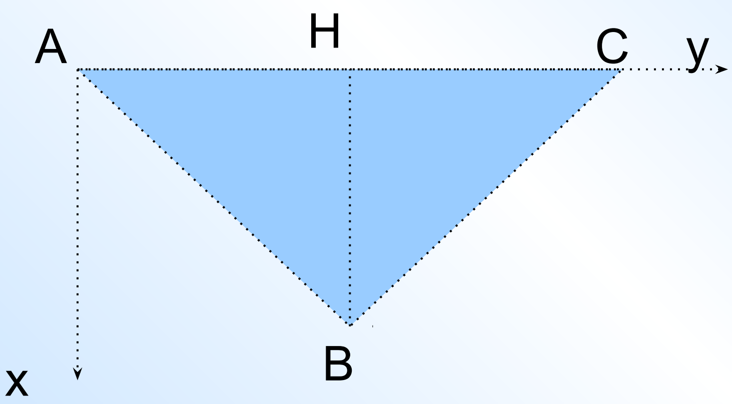
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CB_1

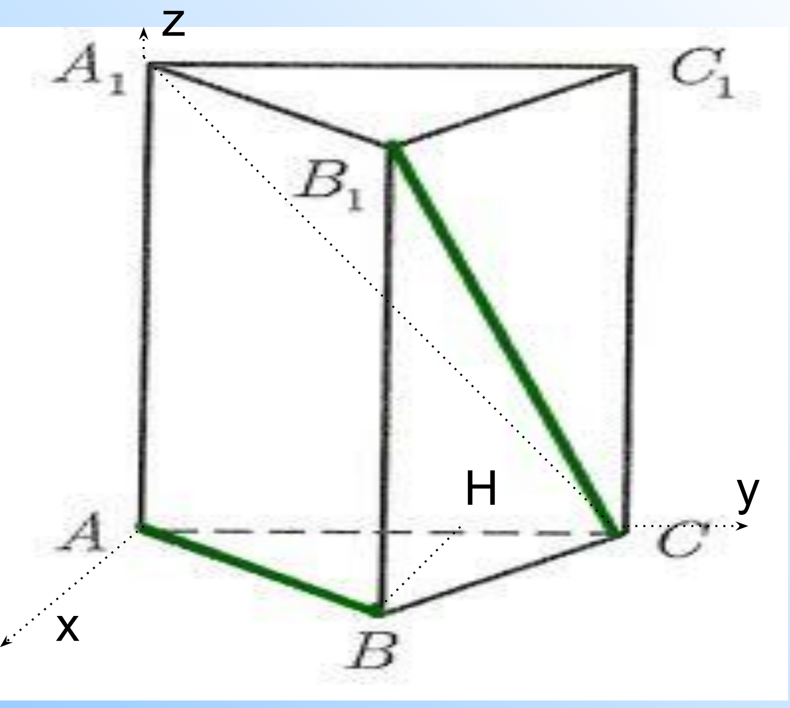


Рассмотрим плоскость (A_1B_1C), содержащую прямую B_1C и параллельную прямой AB. Расстоянием между скрещивающимися прямыми будет расстояние от точки прямой AB, например от A, до плоскости (A_1B_1C).

Введём прямоугольную систему координат OXYZ так, чтобы ось OX была параллельна высоте BH основания, ось OY совпадала с AC, ось OZ совпадала с AA_1.

Рассмотрим ΔABC в плоскости ОХУ





Δ ABC – правильный, AB=BC=AC=1, BH=$\sqrt{3}/2$.

Составим уравнение плоскости (A_1B_1C): Ax+By+Cz+D=0.

$A_1(0;0;1)$,

$B_1(\sqrt{3}/2;\ 1/2\ ;1)$,

C(0;1;0) , подставляем координаты точек в уравнение плоскости, получим систему:

$$\begin{cases} 0A+0B+1C+D=0, \\ (\sqrt{3}/2)A+(1/2)B+1C+D=0, \\ 0A+1B+0C+D=0. \end{cases}$$

Получаем C=-D, B=-D, A= $(\sqrt{3}/3)$D.

Уравнение плоскости ($A_1B_1C_1$):

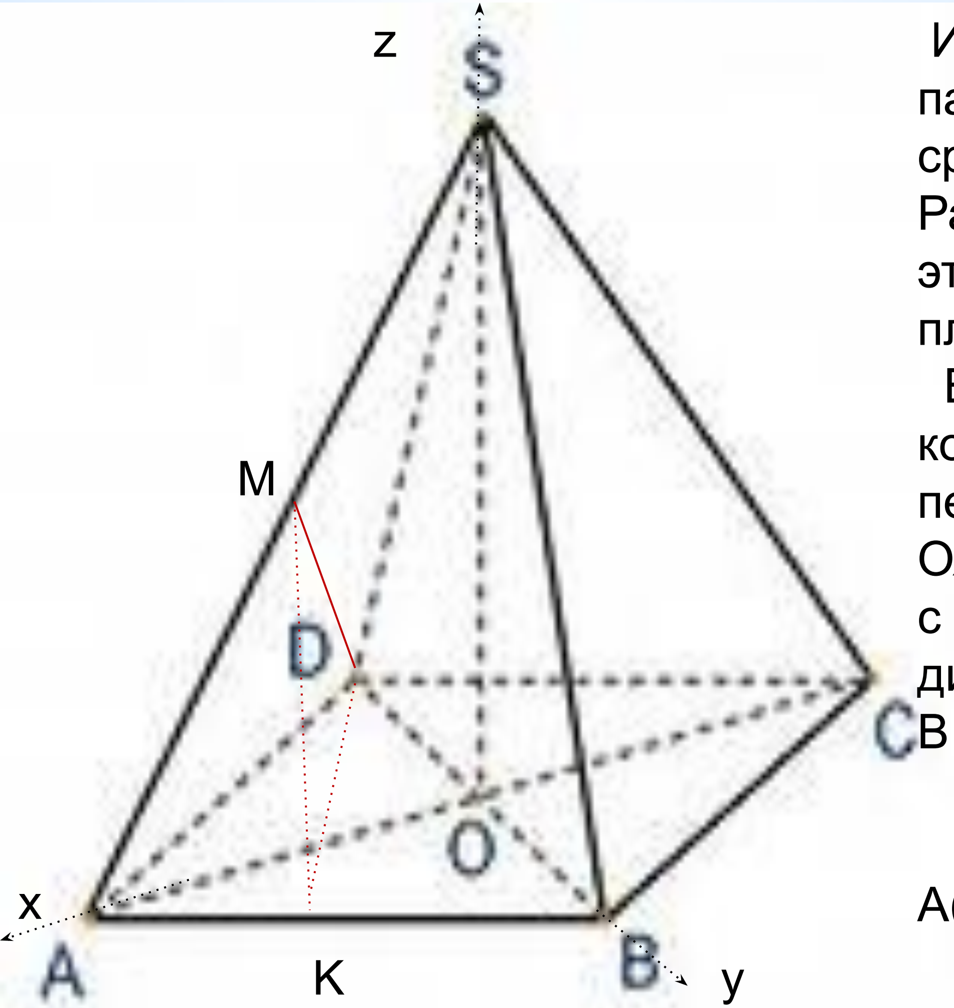
$(\sqrt{3}/3)Dx-Dy-Dz+D=0$, $(\sqrt{3}/3)x-1y-1z+1=0$,

Формула расстояния от точки до плоскости: d= $\frac{|A*x_0+B*y_0+C*z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

где $(x_0;y_0;z_0)$- координаты точки A,

d = $|\sqrt{3}/3\cdot0-1\cdot0-1\cdot0+1| / \sqrt{(\sqrt{3}/3)^2+1+1}$ $=\sqrt{21}/7$. Ответ: $\sqrt{21}/7$.

В правильной четырехугольной пирамидеSABCD, сторона основания $3\sqrt{2}$, боковые ребра 5 ,точка М – середина ребра AS. Найдите расстояние между прямыми MD и SB.



Из точки М проведён прямую МК параллельную SB, очевидно, что МК- средняя линия Δ ASB, SB|| (KMD). Расстояние между прямыми MD и SB – это расстояние от точки прямой SB до плоскости (MDK).

Введём прямоугольную систему координат OXYZ с началом в точке пересечения диагоналей О, так чтобы ось ОХ совпадала с ОА, ось ОУ с ОВ, ось OZ с высотой OS. Сторона квадрата $3\sqrt{2}$, =>, диагональ AC=6.

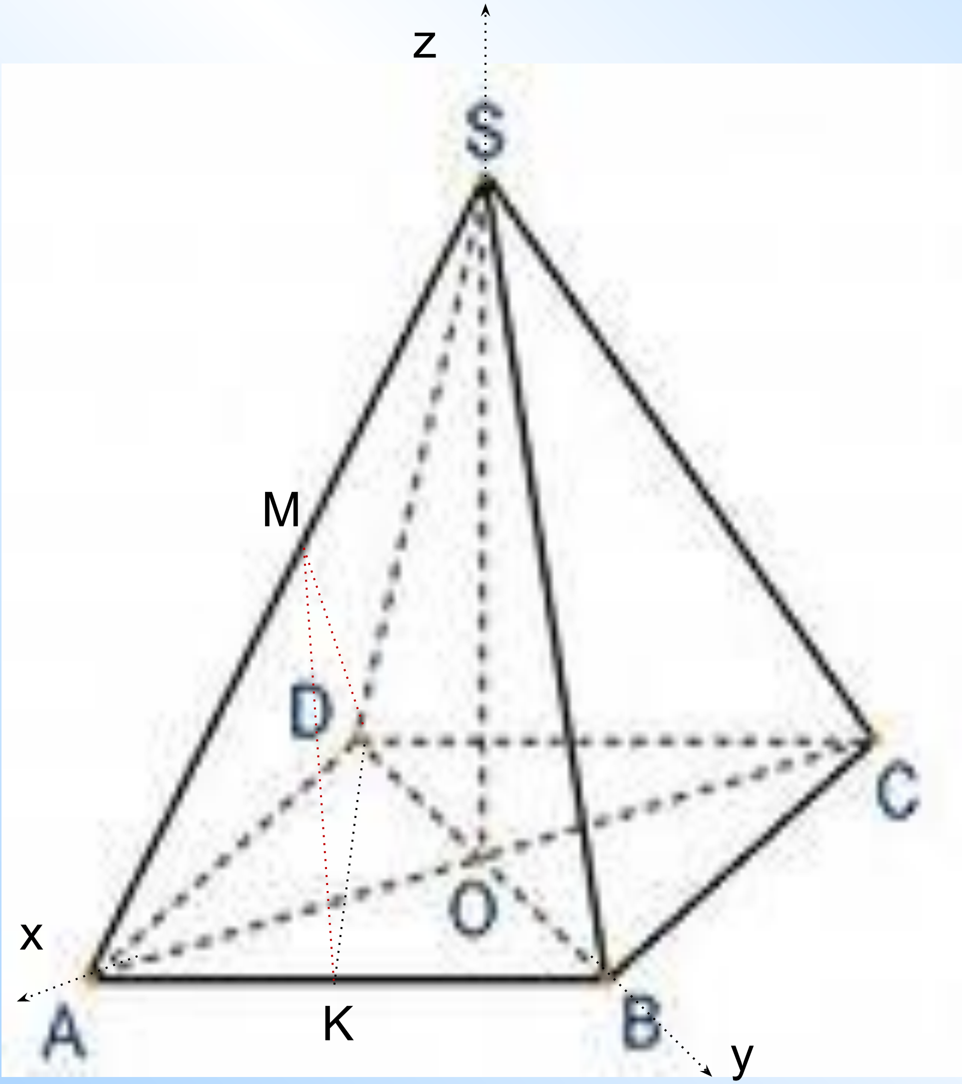
В прямоугольном Δ AOS: AO=3, SO=4.

Составим уравнение плоскости (MKD):

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

A(3;0;0),D(0;-3;0), S(0;0;4), M(3/2;0;2)

$$\begin{cases} 3A+D=0 \\ -3B+D=0 \\ (3/2)A+2C+D=0 \end{cases}$$



A= (- 1/3)D, B=(1/3)D, C=(-1/4)D.
Уравнение плоскости (МКD):
(-1/3)Dx+(1/3)Dy+(-1/4)Dz+D=0,
(-1/3)x+(1/3)y+(-1/4)z+1=0.
Определим расстояние от точки В(0;3;0) до плоскости (МКD) по формуле d= $\frac{|A*x_0+B*y_0+C*z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$d=|1+1|/\sqrt{1/9+1/9+1/16}=\sqrt{41}/12$

Ответ: $\sqrt{41}/12$

Спасибо за внимание!!!