

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

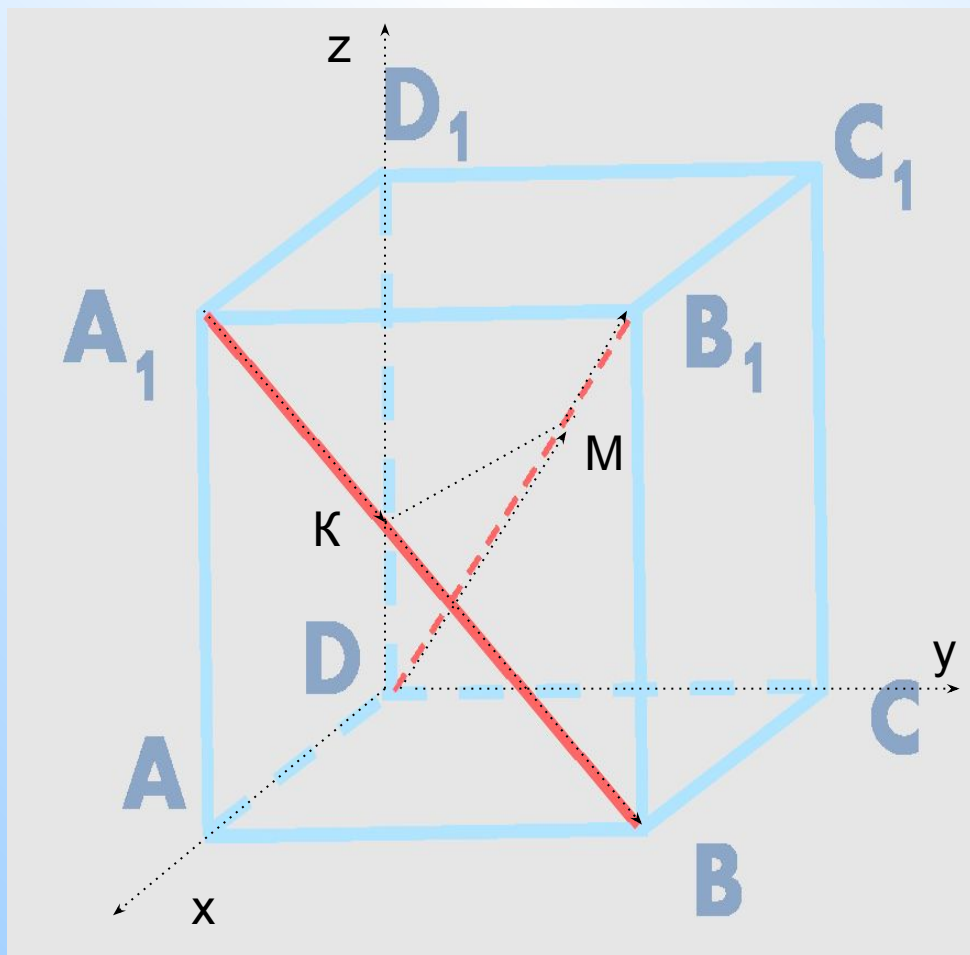
Координатным и векторным
способом

Алферова Наталья Васильевна,
учитель математики
МКОУ «Горячключевская СОШ»
Омского района Омской области

Основные понятия

- Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина общего перпендикуляра к данным прямым
- Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние от точки одной прямой до плоскости параллельной данной прямой и содержащей вторую прямую.

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DB_1 .



Точки $A_1 (1;0;1)$, $B (1;1;0)$

Вектор $A_1B \{0;1;-1\}$

Точки $D (0;0;0)$, $B_1 (1;1;1)$

Вектор $DB_1 \{1;1;1\}$

Пусть $KM \perp A_1B$ и $KM \perp DB_1$, значит KM – искомое расстояние.

Пусть точка K лежит на прямой A_1B , а точка M на прямой DB_1 . Рассмотрим векторы A_1K и DM , сонаправленные с направляющими векторами данных прямых. По лемме о коллинеарных векторах вектор $A_1K = a \cdot A_1B$, т.е. вектор $A_1K \{0;a;-a\}$, вектор $DM = b \cdot DB_1$, т.е. вектор $DM \{b;b;b\}$.

Тогда $K(1;a;1-a)$, $M(b;b;b)$ и вектор $KM \{b-1;b-a;b-1+a\}$.

Решим систему из условия перпендикулярности двух векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

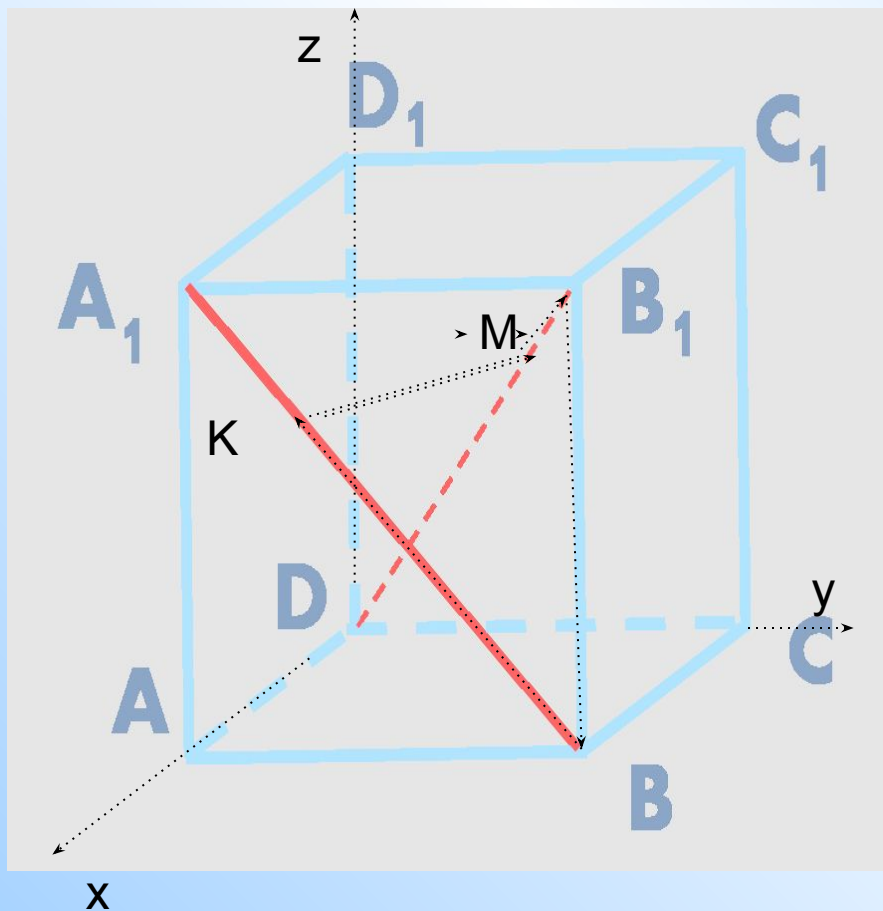
$$\vec{KM} \cdot \vec{A_1B} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot (b-1) + 1 \cdot (b-a) - 1 \cdot (b-1+a) = 0, \\ 1 \cdot (b-1) + 1 \cdot (b-a) + 1 \cdot (b-1+a) = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{KM} \cdot \vec{DB_1} = 0$$

Решив систему получаем $a=1/2$, $b=-2/3$,
подставим эти значения в координаты
вектора \vec{KM} : $\vec{KM} \{ -1/3; 5/6; -1/2 \}$. Найдём
длину вектора $|\vec{KM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $|\vec{KM}|$
 $= \sqrt{1/9 + 1/36 + 1/36} = \sqrt{6}/6$. Ответ: $\sqrt{6}/6$

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DB_1 .

$$\vec{KM} = \vec{MB_1} + \vec{BB_1} + \vec{BK} = a \cdot \vec{DB_1} + \vec{B_1B} + b \cdot \vec{BA_1}$$



$$\vec{DB_1} \{1; 1; 1\}, \vec{BA_1} \{0; -1; 1\}, \vec{B_1B} \{0; 0; 1\}$$

$$\vec{KM} = \{a; a; a\} + \{0; 0; 1\} + \{0; -b; b\} = \{a; a-b; a+1+b\}$$

$$\vec{KM} \cdot \vec{BA_1} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot a - 1 \cdot (a-b) + 1 \cdot (a+1+b) = 0, \\ 1 \cdot a + 1 \cdot (a-b) + 1 \cdot (a+1+b) = 0 \end{array} \right.$$

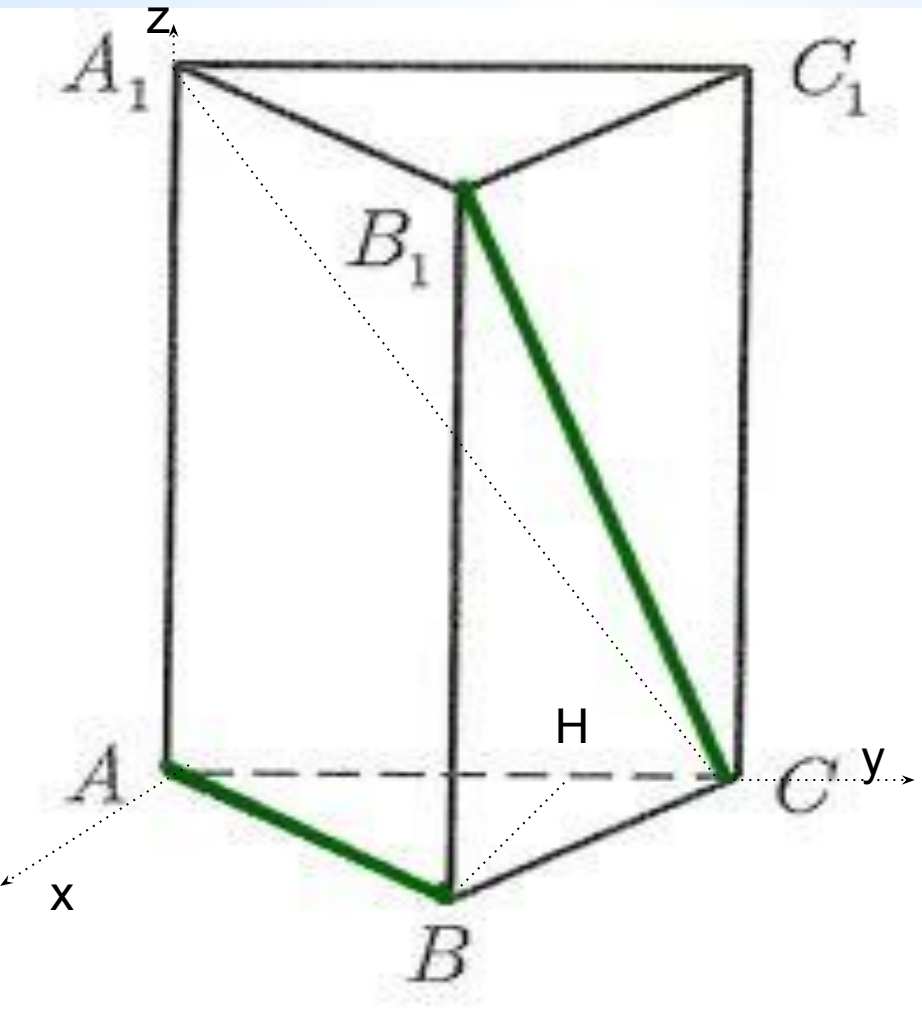
$$\vec{KM} \cdot \vec{DB_1} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \cdot a - 1 \cdot (a-b) + 1 \cdot (a+1+b) = 0, \\ 1 \cdot a + 1 \cdot (a-b) + 1 \cdot (a+1+b) = 0 \end{array} \right.$$

$$b = -\frac{1}{2}, \quad a = -\frac{1}{3}$$

$$\vec{KM} \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6} \right\}$$

$$|\vec{KM}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{6}{6}}$$

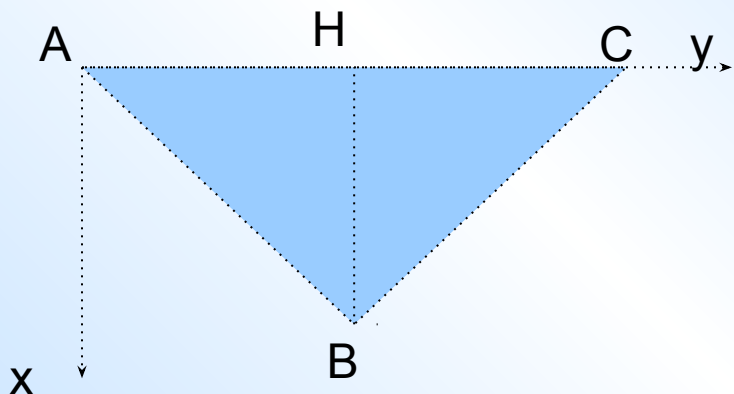
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CB_1



Рассмотрим плоскость (A_1B_1C) , содержащую прямую B_1C и параллельную прямой AB . Расстоянием между скрещивающимися прямыми будет расстояние от точки прямой AB , например от A , до плоскости (A_1B_1C) .

Введём прямоугольную систему координат $OXYZ$ так, чтобы ось OX была параллельна высоте BH основания, ось OY совпадала с AC , ось OZ совпадала с AA_1 .

Рассмотрим $\triangle ABC$
в плоскости OXY



$\triangle ABC$ – правильный, $AB=BC=AC=1$,
 $BH=\sqrt{3}/2$.

Составим уравнение плоскости $(A_1B_1C_1)$:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

$$A_1(0;0;1),$$

$$B_1(\sqrt{3}/2; 1/2 ;1),$$

$C(0;1;0)$, подставляем координаты точек в уравнение плоскости, получим систему:

$$0A+0B+1C+D=0,$$

$$(\sqrt{3}/2)A+(1/2)B+1C+D=0,$$

$$0A+1B+0C+D=0.$$

Получаем $C=-D$, $B=-D$, $A = (\sqrt{3}/3)D$.

Уравнение плоскости $(A_1B_1C_1)$:

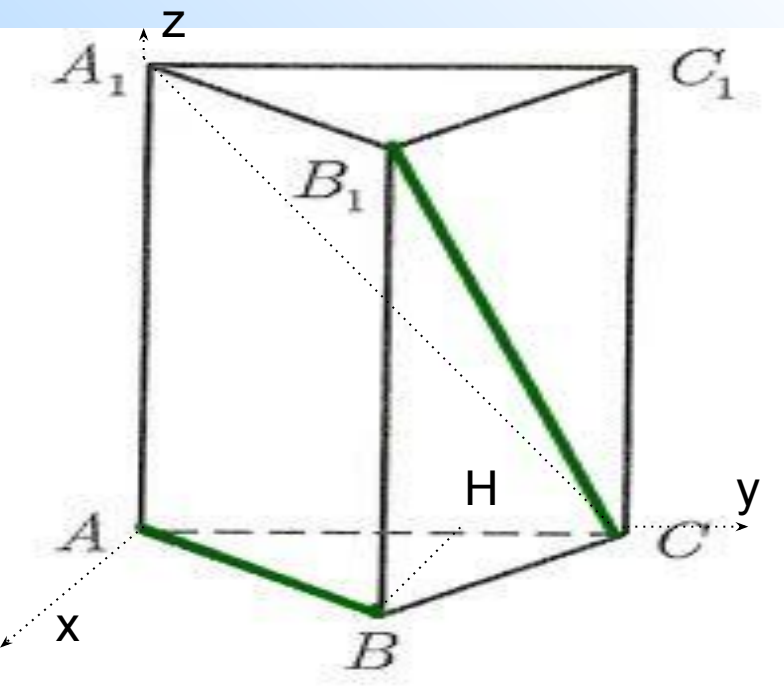
$$(\sqrt{3}/3)Dx-Dy-Dz+D=0, \quad (\sqrt{3}/3)x-1y-1z+1=0,$$

Формула расстояния от точки до плоскости:

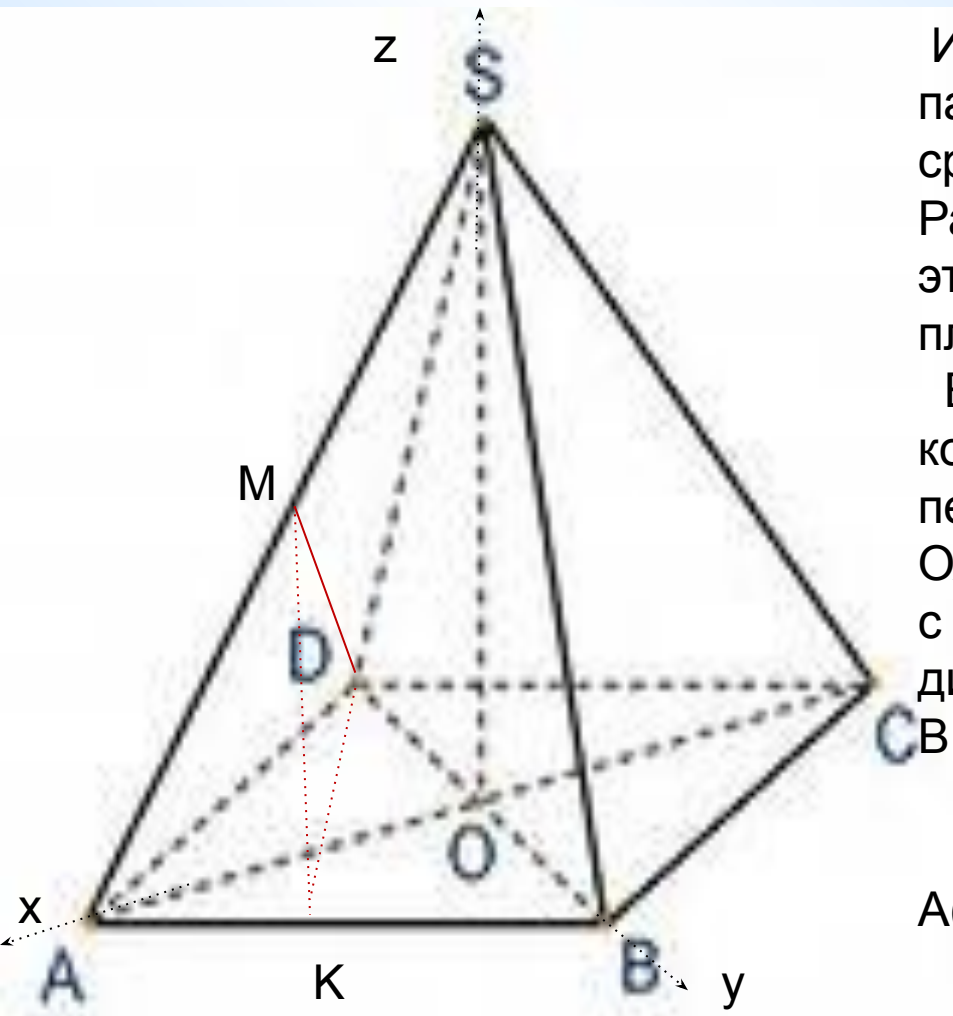
$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ - координаты точки A ,

$$d = |\sqrt{3}/3 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1| / \sqrt{(\sqrt{3}/3)^2 + 1 + 1} = \sqrt{21}/7. \quad \text{Ответ: } \sqrt{21}/7.$$



В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания $3\sqrt{2}$, боковые ребра 5 , точка M – середина ребра AS . Найдите расстояние между прямыми MD и SB .



Из точки M проведён прямую MK параллельную SB , очевидно, что MK – средняя линия $\triangle ASB$, $SB \parallel (KMD)$. Расстояние между прямыми MD и SB – это расстояние от точки прямой SB до плоскости (MDK) .

Введём прямоугольную систему координат $OXYZ$ с началом в точке пересечения диагоналей O , так чтобы ось Ox совпадала с OA , ось Oy с OB , ось Oz с высотой OS . Сторона квадрата $3\sqrt{2}$, \Rightarrow , диагональ $AC=6$.

В прямоугольном $\triangle AOS$: $AO=3$, $SO=4$.

Составим уравнение плоскости (MKD) :

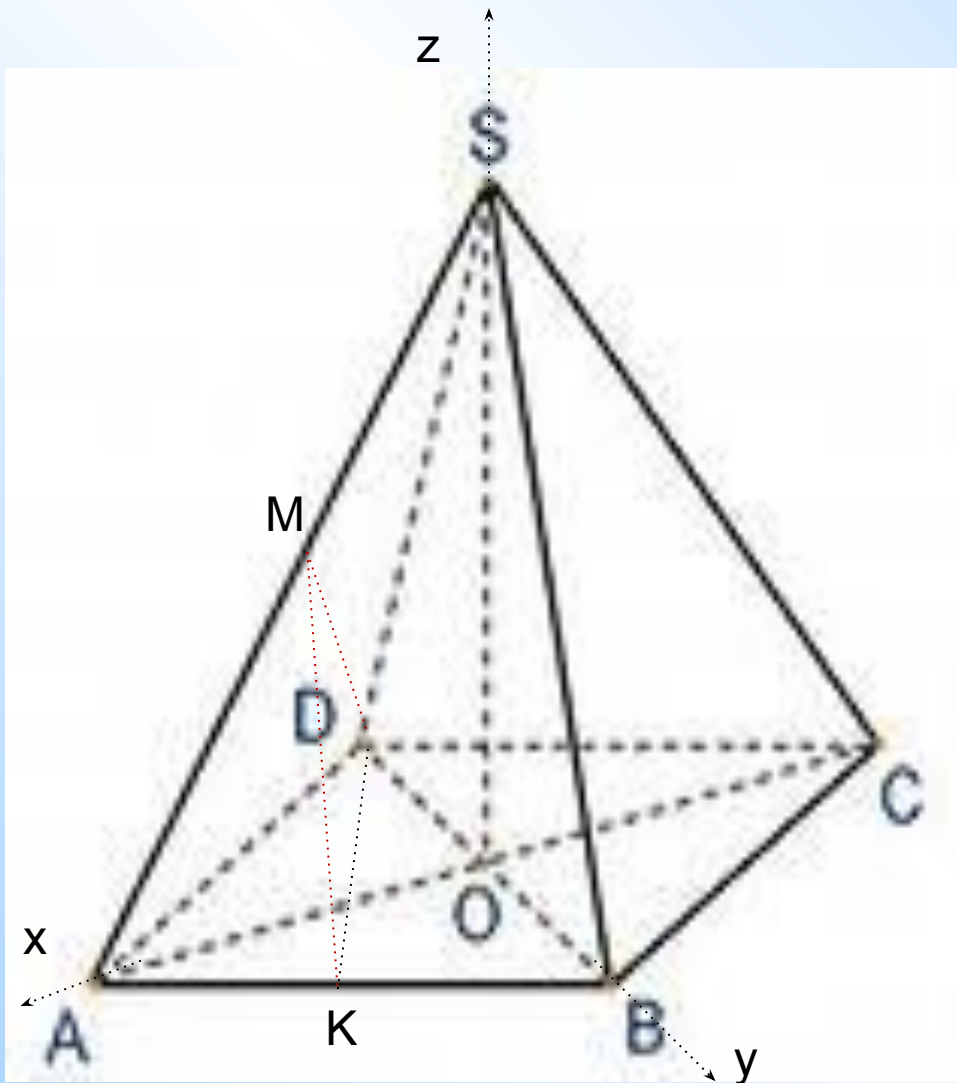
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A(3; 0; 0), D(0; -3; 0), S(0; 0; 4), M(3/2; 0; 2)$$

$$3A + D = 0$$

$$-3B + D = 0$$

$$(3/2)A + 2C + D = 0$$



$$A = (-1/3)D, B = (1/3)D, C = (-1/4)D.$$

Уравнение плоскости (MKD):

$$(-1/3)Dx + (1/3)Dy + (-1/4)Dz + D = 0,$$

$$(-1/3)x + (1/3)y + (-1/4)z + 1 = 0.$$

Определим расстояние от точки $B(0;3;0)$ до плоскости (MKD) по формуле $d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$\frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = |1 + 1| / \sqrt{1/9 + 1/9 + 1/16} = \sqrt{41/12}$$

Ответ: $\sqrt{41/12}$

Спасибо за внимание!!!