Городская научно – социальная программа «Шаг в будущее, Электросталь»

МОУ «Гимназия № 4»

Реферат.
Тема:

« Рациональные алгебраические уравнения. Некоторые методы решения. »

Автор: ученик 10 «А» класса
Скоряков Сергей

Руководитель: Бродецкая Т.А.

Электросталь
2009

Содержание.

Рациональные алгебраические выражения.

Рациональное алгебраическое выражение – это выражение составленное из чисел и переменных, в котором разрешается применять только четыре арифметических действия (сложение, вычитание, умножение и деление).

Различают два типа рациональных алгебраических выражений – **целые** и **дробные**, или *дробно-рациональные*.

Алгебраическое уравнение и схема его решения

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \qquad P, Q \in R[x].$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Пример 1 . $$1-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}. \qquad (1^*)$$

$$(1^*)\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^2}-\frac{x-1}{x^2}=0\Leftrightarrow \frac{x^2-1-(x-1)}{x^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x^2}=0\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0, \\ x^2\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)=0, \\ x\neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \quad x=1, \\ x\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=1.$$

Ответ: $x=1.$

Стандартные полиномиальные уравнения $p_n(x) = 0$.

1. Линейные уравнения.

2. Квадратные (квадратичные) уравнения.

3. Двучленные уравнения произвольной степени.

4. Биквадратные уравнения.

1) Линейные уравнения (степень n=1):

$$ax+b=0, \quad (a \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad ax=-b \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{b}{a}.$$

2) Квадратные (квадратичные) уравнения (n=2):

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a \neq 0),$$

$$D=b^2-4ac.$$

Если D < 0 — нет корней

Если D = 0 — $x_0=-\frac{b}{2a}$

Если D > 0 — $x_{1.2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3) Двучленные уравнения произвольной степени (n ≥ 2):

$$ax^n + b = 0, \qquad x^n = c.$$

1) Если n = 2k +1 (*нечётно)*, то при любом значении с уравнение имеет *единственное* решение:

$$x_0 = \sqrt[n]{c}$$

2) Если n = 2k чётно, то:

при с < 0 → корней нет

при с = 0 → x = 0

при с > 0 → $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{c}$

4) Биквадратные уравнения (a ≠ 0):

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = z, \\ az^2 + bz + c = 0. \end{cases}$$

Бикубические уравнения (a ≠ 0) :

$$\mathrm{ax}^6 + bx^3 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 = z, \\ az^2 + bz + c = 0. \end{cases}$$

Общая схема решения

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \quad n \in N, \quad a, b, c \in R, \quad a \neq 0,$$

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^n = z, \\ az^2 + bz + c = 0. \end{cases}$$

Метод замены.

Исходное уравнение $F(x)=0$ представим в виде $f(\varphi(x))=0.$

Выполним замену $\varphi(x)=z,$ решаем $f(z)=0.$

Находим значения $z=z_1, z_2 \ldots$

Решаем уравнения замены $\varphi(x)=z_1, \quad \varphi(x)=z_2, \ldots$

Схема замены:

$$f(\varphi(x))=0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x)=z_1 \quad \vee \quad \varphi(x)=z_2 \quad \vee \quad \ldots,$$

где $z_1, z_2 \ldots$ корни уравнения $f(z)=0.$

Пример 2.

$$2007\,(x^4 - 6x^2 + 9) + 2006\,(x^2 - 3) - 1 = 0.$$

$$y = x^2 - 3,$$

$$2007\,y^2 + 2006\,y - 1 = 0.$$

$$y_1 = -1,$$

$$y_1 \cdot y_2 = -\frac{1}{2007},$$

$$y_1 = -1, \qquad y_2 = \frac{1}{2007},$$

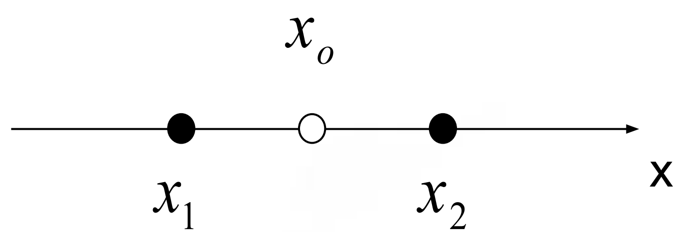
$$x^2 - 3 = -1 \quad u \quad x^2 - 3 = \frac{1}{2007}.$$

$$x = \pm\sqrt{2}, \qquad x = \pm\sqrt{3\frac{1}{2007}}.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{3\frac{1}{2007}}.$

Линейные замены, основанные на симметрии.

Пример 3. $x^4 + (x+2)^4 = 82.$



$$\frac{x + (x+2)}{2} = x + 1 = z,$$

$$x = z - 1, \qquad x + 2 = z + 1,$$

$$(z-1)^4 + (z+1)^4 = 82,$$

$$2z^4 + 12z^2 + 2 = 82 \quad \Leftrightarrow \quad z^4 + 6z^2 - 40 = 0.$$

$$z^4 + 6z^2 - 40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z^2 - 4)(z^2 + 10) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 = 4 \quad \vee \quad z^2 = -10 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 2.$$

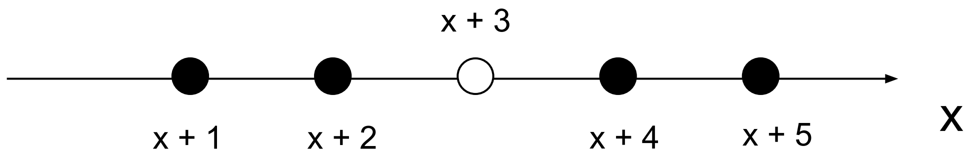
$$x + 1 = \pm 2,$$

$$x = 2 - 1 = 1 \quad \text{и} \quad x = -2 - 1 = -3.$$

Ответ: $x_1 = 1,$ $x_2 = -3.$

Пример 4.

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=40. \qquad (2^*)$$



$$x=z-3,$$

$$(2^*) \quad \Leftrightarrow \quad (z-2)(z-1)(z+1)(z+2)=40,$$

$$(z^2-4)(z^2-1)=40,$$

$$z^2=u,$$

$$(u-4)(u-1)=40 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u^2-5u-36=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u=\frac{5\pm 13}{2}=\left[\begin{array}{l}-4,\\ 9.\end{array}\right.$$

1) $u = z^2 \geq 0,$ исключаем $u = -4.$

2) $z^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 3,$

$$x = z - 3 = \pm 3 - 3,$$

$x = 0$ и $x = -6.$

II способ

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 40.$$

Группируем $x+1,\ x+5$ **и** $x+2,\ x+4.$

Получаем $(x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8) = 40.$

Возможные замены $x^2 + 6x = y,\quad x^2 + 6x + 5 = u.$

$$1 + 5 = 2 + 4.$$

Ответ: $x_1 = 0,\quad x_2 = -6.$

Метод разложения.

$$p_n(x) = 0,$$

$$p_k(x)\,p_m(x) = 0,$$

где $\quad \deg p_k(x) = k > 0, \quad \deg p_m(x) = m > 0,$

т.к. $\quad k + m = n, \quad$ то $\quad k, m < n.$

Схема решения:

$$p_n(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_k(x)\,p_m(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad p_k(x) = 0 \quad \vee \quad p_m(x) = 0.$$

Пример 5 .

$$(x-2)^3+(x+4)^3=(2x+2)^3.$$

$$(x-2+x+4)\left((x-2)^2-(x-2)(x+4)+(x+4)^2\right)=(2x+2)^3,$$

$$(2x+2)\left(x^2-4x+4-x^2-2x+8+x^2+8x+16\right)=(2x+2)^3,$$

$$(2x+2)\left(x^2+2x+28-4x^2-8x-4\right)=0,$$

$2x+2=0$ или $-3x^2-6x+24=0.$

$x_1=-1.$ $x_2=-4,$ $x_3=2.$

Ответ: $x_1=-1,$ $x_2=-4,$ $x_3=2.$

Теорема (о рациональных корнях целочисленных многочленов).

Если ***несократимая*** *дробь* $x_0 = \dfrac{p}{q}$ *является корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_k \in Z\,,$$

то числитель дроби **p** *является делителем свободного члена полинома, а знаменатель* **q** *– делителем старшего коэффициента .*

Если уравнения имеет хотя бы один рациональный корень, то он находится среди дробей вида

$$f_{ik} = \pm \frac{p_i}{q_k}.$$

Пример 6. $x^3 - 8x^2 + 13x - 2 = 0.$

Возможные корни: -2, -1, 1, 2. **Подбором x = 2 - корень.**

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3-8x^2+13x-2 \\ \underline{x^3-2x^2} \end{array} & \begin{array}{l} x-2 \\ \hline x^2-6x+1 \end{array} \\
-\begin{array}{l} -6x^2+13x \\ \underline{-6x^2+12x} \end{array} & \\
-\begin{array}{l} x-2 \\ \underline{x-2} \end{array} & \\
0 &
\end{array}
$$

$(x-2)(x^2-6x+1)=0,$

$x-2=0$ или $x^2-6x+1=0,$

$x_1=2.$ $x_{2,3}=3\pm\sqrt{8}.$

Ответ: $x_1=2,$ $x_{2,3}=3\pm\sqrt{8}.$

Пример 7. $$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = 0.$$

1) $x_0 = 1$ *или* $x_0 = -1$ **не являются корнями, т.к.**

$$p_8(1) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1 \quad \text{и} \quad p_8(-1) = 5.$$

2) при $x < 0$ $p_8(x) > 0,$ **нет корней.**

3) при $x > 1$ $x^8 > x^5,$ $x^2 > x,$

$p_8(x) > 0,$ **нет корней.**

4) $x \in (0;1),$ $1 - x > 0,$ $x^2 - x^5 > 0,$

$$p_8(x) = (1 - x) + (x^2 - x^5) + x^8 > 0,$$

нет корней.

Ответ: нет корней.

Пример 8.

$$\left(x^2-3x+6\right)\left(x^2-4x+6\right)=12x^2 \quad \Big| : x^2 \neq 0,$$

$$\left(x-3+\frac{6}{x}\right)\left(x-4+\frac{6}{x}\right)=12,$$

$$y=x+\frac{6}{x},$$

$$(y-3)(y-4)=12,$$

$$y^2-7y+12=12,$$

$$y_1=0, \qquad y_2=7,$$

$$x+\frac{6}{x}=0, \qquad x+\frac{6}{x}=7,$$

нет корней. $\qquad x_1=6, \quad x_2=1.$

Ответ: $x_1=6, \quad x_2=1.$

Некоторые методы решения дробно-рациональных уравнений.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Например:

$$kx + \frac{ax+b}{cx+d} = m \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} kx(cx+d) + ax + b - m(cx+d) = 0, \\ cx + d \neq 0. \end{cases}$$

Пример 9.

$$(x+2)^2 + \frac{24}{x^2+4x} = 18. \qquad ОДЗ: x^2+4x \neq 0.$$

$$\left(x^2+4x+4\right) + \frac{24}{x^2+4x} = 18.$$

$$y = x^2+4x \qquad (y \neq 0),$$

$$y + 4 + \frac{24}{y} = 18.$$

$$y_1 = 12, y_2 = 2.$$

$x^2+4x=12$ или $x^2+4x=2.$

$x_1=-6, x_2=2.$ $\qquad$ $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{6}.$

Ответ: $x_1=-6, x_2=2, x_{3,4}=-2\pm\sqrt{6}.$

Пример 10.

$$\frac{x^4+324}{x^2+6x+18}=43-6x.$$

$$\frac{\left(x^4+36x^2+324\right)-36x^2}{x^2+6x+18}=43-6x,$$

$$\frac{\left(x^2+18\right)^2-36x^2}{x^2+6x+18}=43-6x,$$

$$\frac{\left(x^2+18+6x\right)\left(x^2+18-6x\right)}{x^2+6x+18}=43-6x.$$

Сократим дробь, т.к. $x^2+6x+18>0.$

$$x^2-6x+18=43-6x,$$

$$x_1=-5, x_2=5.$$

Ответ: $x_{1,2}=\pm 5.$

Основные методы решения уравнений степени большей трёх

метод замены

метод разложения

Заключение

Теория уравнений интересовала и интересует математиков всех времён и народов. Им посвящали научные трактаты и даже слагали стихи великие люди истории.

В своей работе мы постарались систематизировать известные нам знания о теории уравнений, показать красоту и изящество некоторых способов решения уравнений.