

Формирование вычислительных навыков.

Рациональные способы вычислений.

Автор: Карпенко Л.П.,
учитель школы 175
г.Зеленогорск

- 9.01.2009г.

то мы знаем о способах

способы



какие способы

Одной из важнейших задач обучения математике младших школьников является формирование у них вычислительных навыков, основу которых составляет осознанное и прочное усвоение приёмов устных и письменных вычислений.

- Вычислительная культура является тем запасом знаний и умений, который находит повсеместное применение, являясь фундаментом изучения математики и других учебных дисциплин. Её основы закладываются в начальной школе.

Характеристики вычислительного навыка:

правильность

осознанность

рациональность

обобщённость

автоматизм

быстро

Остановимся более подробно на таком качестве вычислительного навыка как **рациональность**, которая напрямую связана с вариативностью.

Рациональность вычислений – это выбор тех вычислительных операций из возможных. «выполнение которых легче других и быстрее приводит к результату арифметического действия».

- Знакомство с рационализацией вычислений развивает вариативность мышления, показывает ценность знаний, которые при этом используются. Применение свойств арифметических действий позволяет учителю воспитывать интерес к математике, вызвать у детей желание научиться вычислять наиболее быстрыми и удобными способами. Такой подход позволит поддерживать стремление к использованию математических знаний в повседневной жизни.
- Остановлюсь на некоторых из способов вычислений, которые используются на уроках и таких, которые, посильны учащимся , но не всегда используются.

Рациональные способы вычислений

- 1. Сочетательное
- $2x(50x364) =$

- 2. Сочетательное
- свойство сложения
- $14 + (16 + 307) =$

- 3,4. Вынесение общего
- множителя за скобку

- 5,6. раскрытие
- скобок

- 7. Представление
- суммы в виде
- произведения
- $47 + 47 + 47 + 47 = 47 \times 4$

- 8. Свойство вычитания
- суммы из числа
- $798 - (498 + 16) =$

- 9. Свойство вычитания
- числа из суммы
- $(658 + 230 + 58) - 4 =$



$$\text{«+»} \\ 2x8 + 2x75 \\ 2=$$

$$axb + taxc = a(x \\ (b+c))$$

$$\text{«-»} \\ 3x498 - 498x \\ 2=$$

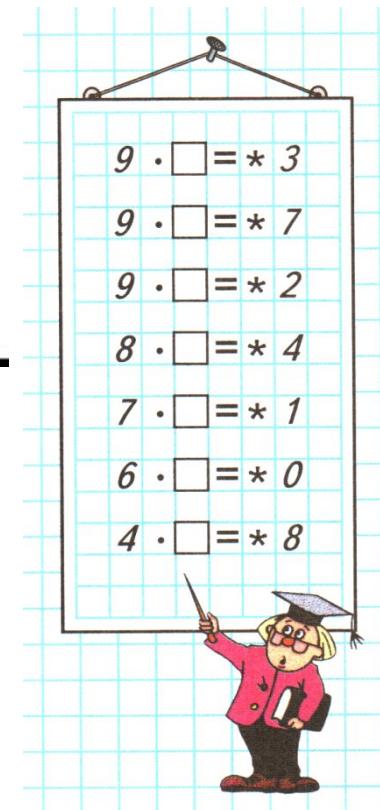
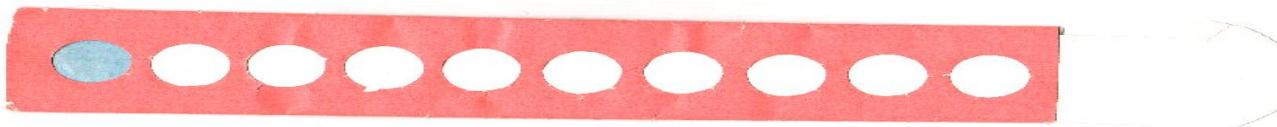
$$\text{«-»} \\ 9x(70 - 2) =$$

В основе всех вычислительных приёмов, как устных, так и письменных, лежит твёрдое **знание таблиц сложения и умножения**. Добиться прочного запоминания учащимися таблиц сложения и умножения однозначных чисел – одна из основных задач начального обучения.

Закрепить состав **десятка** помогают простые пособия:
«Числа, бегущие навстречу друг другу»:

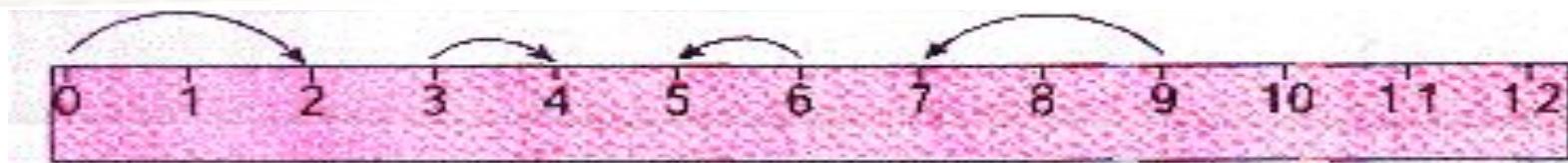
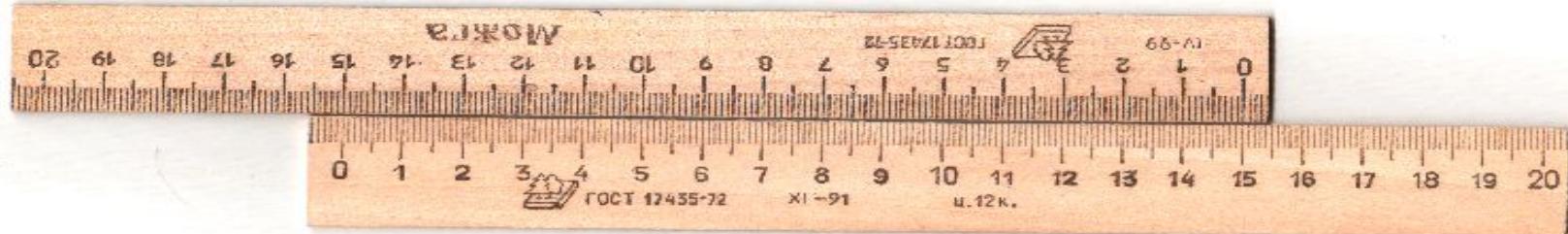


Счётное пособие –абак.



Учись считать с помощью простой линейки или полосок с числами двигая их относительно друг друга.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



Таблица

сложения и вычитания.

Таблица

умножения и деления.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1								
3	2	1							
4	3	2	1						
5	4	3	2	1					
6	5	4	3	2	1				
7	6	5	4	3	2	1			
8	7	6	5	4	3	2	1		
9	8	7	6	5	4	3	2	1	
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

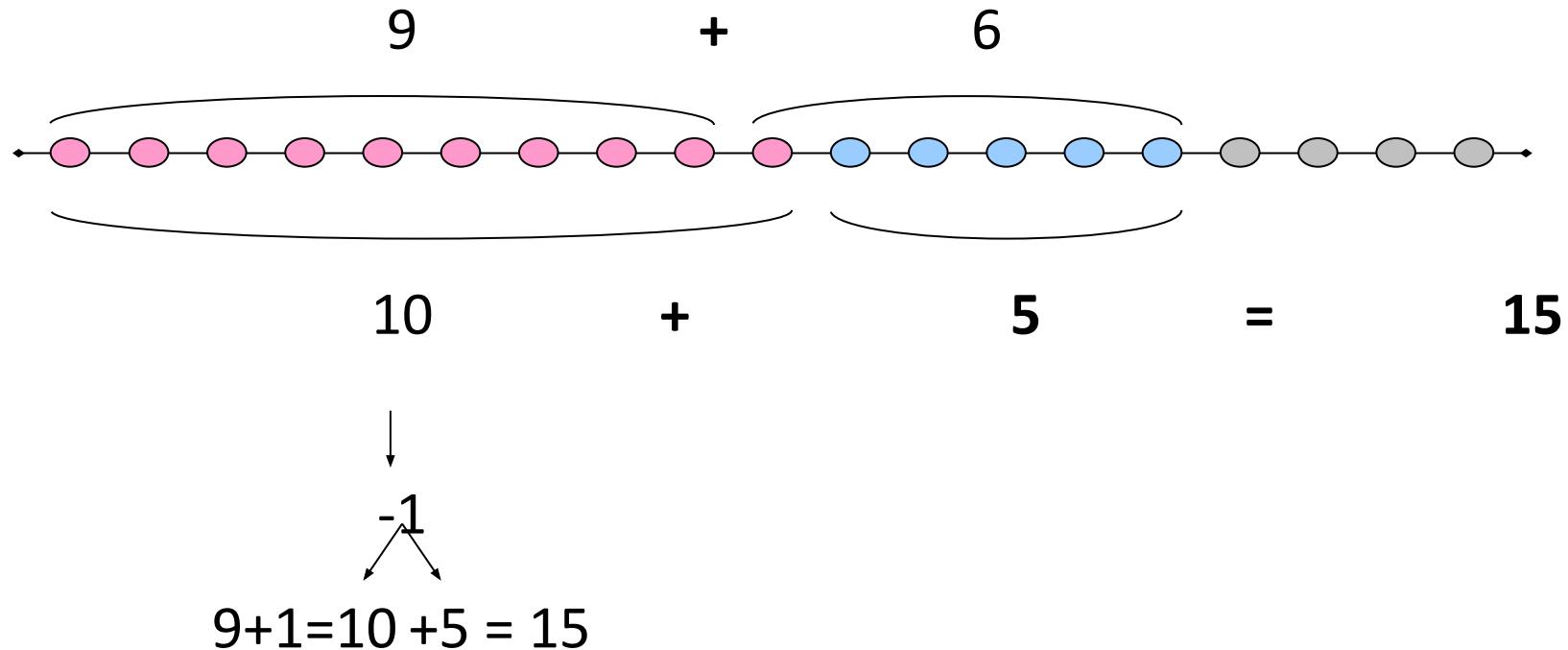
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Табличное деление и

4	6	8	умножение	10	12	14	16	18
20	21	24		25	27	28		
30	32	35		36				
40	42	45		48	49			
50	54	56						
60	63	64						
70	72							
80	81							
90								

Совершенствование навыков устных вычислений зависит не только от методики организации урока, но и во многом от того, насколько дети проявляют интерес к предложенным знаниям. Этот интерес можно вызвать и разнообразными учебными пособиями:

На уроках математики, по теме «*Сложение однозначных чисел с переходами через десяток*», старые счеты превратила в практическое пособие для детей (на толстую проволоку поместила 10 косточек одного цвета и 10 другого. Дети четко видят десяток.



Мы сами составили таблицу таким образом, что включили в неё все случаи, где ответ (сумма) будет **двухзначным** числом. Сделали заготовку для ответов (заготовили место для каждой из двух цифр).

$9 + 2 = 1.$	$8 + 3 = 1.$	$7 + 4 = 1.$	$6 + 5 = 1.$
$9 + 3 = 1.$	$8 + 4 = 1.$	$7 + 5 = 1.$	$6 + 6 = 1.$
$9 + 4 = 1.$	$8 + 5 = 1.$	$7 + 6 = 1.$	
$9 + 5 = 1.$	$8 + 6 = 1.$	$7 + 7 = 1.$	
$9 + 6 = 1.$	$8 + 7 = 1.$		
$9 + 7 = 1.$	$8 + 8 = 1.$		
$9 + 8 = 1.$			
$9 + 9 = 1.$			

$$9 + 6 \underset{-1}{=} 15 \quad 8 + 6 \underset{-2}{=} 14$$

$$9 + 5 \underset{-1}{=} 14 \quad 8 + 5 \underset{-2}{=} 13$$

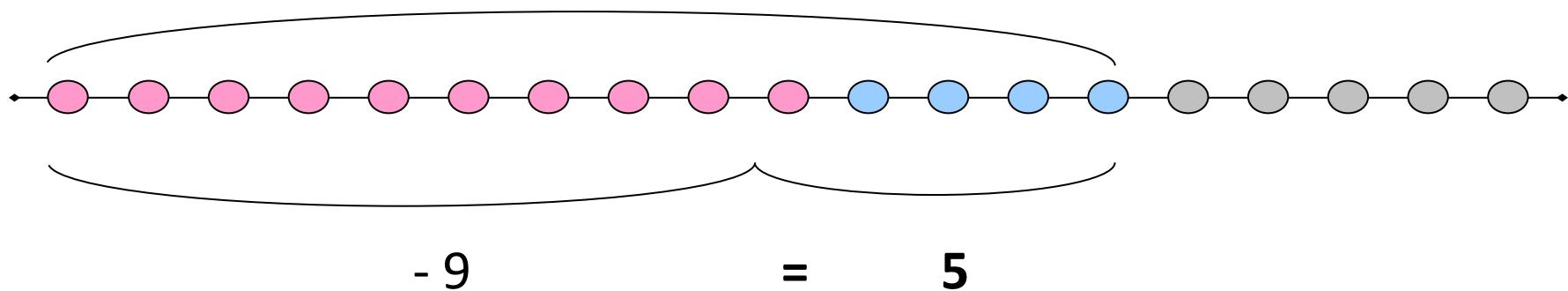
После практической деятельности по прибавлению к 9 любого однозначного числа, дети пришли к выводу: **«Чтобы к 9 прибавить любое однозначное число достаточно от этого числа отнять 1 и к полученному десятку прибавить остаток»...**

Важно, что ребенок сам осознал, что в ответе число единиц получается на один меньше того числа, которое прибавляешь. Дети испытывают радость открытия, общения друг с другом, радость взаимопонимания.

Новый прием развивает воображение, логическое мышление, умение рассуждать.

Этот же принцип действует при сложении 8,7,6 с любым однозначным числом.

На этом пособии удобно прийти к выводу о вычитании из любого двузначного числа (меньше 20)- 9,8,7,6.



Например: 14 – 9 достаточно к единицам прибавить 1 (4+1). Значит $14 - 9 = 5$

14 – 8 достаточно к единицам прибавить 2 (4+2). Значит $14 - 8 = 6$.

Так дети легче запоминают таблицу сложения и вычитания.

Чтобы превратить знакомство с таблицей умножения в увлекательное занятие, где ребенок не только исполнитель, но и автор, использую следующий прием. Начинаем с составления подробнейшего анализа таблицы умножения на 9.

ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ на 9

1) Определение количества цифр в произведениях от 9×2 до 9×9 .

«Прикидка» - во всех произведениях будет по 2 цифры.

Делается заготовка: $9 \times 2 = ..$ $9 \times 9 = ..$

2) Используя несколько способов нахождения

произведения: через сумму одинаковых слагаемых, через предыдущее произведение, через представление 9 как $10 - 1$, заполняют заготовленные для цифр места.

3) Дети усматривают связь между произведениями:

число десятков от произведения к произведению
увеличивается на единицу, в то время как число единиц уменьшается:

- 10
- $9 \times 2 = [18]$
+1 -1
- $9 \times 3 = 27$

$$9 \times 4 = 36$$

$$\begin{array}{c} 9 \\ \swarrow \searrow \end{array}$$

.....

$$9 \times 9 = 81$$

- Обнаруживают, что сумма цифр произведения при этом равна 9, позже это открытие превращается в признак делимости.

На следующем этапе они начинают исследовать связь между **множителем** (отличным от 9) и **цифрой десятков**, а затем **цифрой единиц**.

Замечают следующее: число **десяятков всегда на 1 меньше множителя**, т.е. при умножении 9 на 7 в разряде десятков будет $\underbrace{6}_{-1}$. $9 \times 7 = 63$ $9 \times 8 = 72$ $\underbrace{-1}_{-1}$

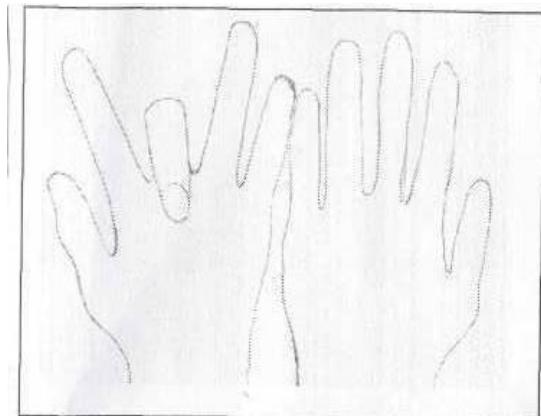
А число в разряде единиц *дополняет множитель до 10*

$$\begin{array}{ccc} & 10 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ 9 \times 7 & = & 63 \\ & \uparrow \quad \uparrow & \\ & 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 10 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ 9 \times 8 & = & 72 \\ & \uparrow \quad \uparrow & \\ & 9 & \end{array}$$

(или число десятков до девяты).

Вывод: чтобы 9 умножить на однозначное число, достаточно от этого числа отнять один и получить десятки, а от 9 отнять количество десятков- получим единицы.

Знакомлю детей также с пальцевым счетом. Располагаем две руки рядом, ладонями к себе. Например: 9×3 - загибаем третий палец слева, до согнутого пальца 2 - это десятки, 7 - единицы - получили 27.



Устные приёмы умножения.

Чтобы **любое число умножить на 5**, достаточно разделить его на 2 и умножить на 10 (т.к. 5-половина 10)

$$124 \times 5 = 124 : 2 \times 10 = 620$$

Чтобы **умножить на 50**, достаточно число разделить на 2 и умножить на 100 (т.к 50 –половина 100).

$$36 \times 50 = 36 : 2 \times 100 = 1800$$

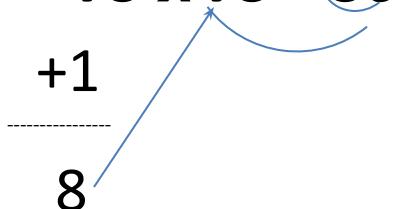
Чтобы **умножить на 25**, достаточно число разделить на 4 и умножить на 100 (т.к. 25- четвёртая часть от 100) или наоборот. Если в остатке получится 1, то вместо двух нулей поставим 25, если в остатке 2, то – 50, если 3, то – 75.

$$14 \times 25 = 14 : 4 = 3(\text{ост.}2), \text{ значит } 300 + 50 = 350$$

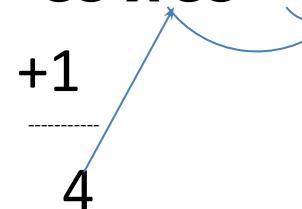
Чтобы **умножить на 125**, достаточно число разделить на 8 и умножить на 1000(т.к. 125 – восьмая часть от 1000)

Чтобы **умножить два одинаковых числа, оканчивающихся на 5**, достаточно к первой цифре одного из множителей прибавить 1. Получившееся число умножить на первую цифру второго множителя. Получим число сотен и припишем справа число 25.

$$\bullet \quad 75 \times 75 = 5625$$



$$35 \times 35 = 1225$$



Чтобы **умножить на 11**, можно умножить на 10 и прибавить это же число.

$$23 \times 11 = 23 \times 10 + 23 = 253$$

Или: записать последнюю цифру числа в конце произведения, затем сумму последней и предыдущей (и т. д., если цифр в числе несколько), а затем первую цифру числа.

$$\underline{23} \times 11 = \underline{2}(\underline{2+3})\underline{3} = \underline{2}5\underline{3}$$

$$\underline{243} \times 11 = \underline{2}(\underline{2+4})(\underline{4+3})\underline{3} = \underline{2}6\underline{7}\underline{3}$$

$$\underline{2543} \times 11 = \underline{2}(\underline{2+5})(\underline{5+4})(\underline{4+3})\underline{3} = \underline{2}7\underline{9}\underline{7}\underline{3}$$

Умножение на 9, 99, 999

Чтобы умножить число на 9, (99, 999) достаточно умножить его на 10 (100, 1000) и отнять это же число.

$$57 \times 9 = 57 \times 10 - 57 = 570 - 57 = 513$$

$$68 \times 99 = 68 \times (100 - 1) = 68 \times 100 - 68 = 6800 - 68 = 6732$$

$$47 \times 999 = 47 \times (1000 - 1) = 47 \times 1000 - 47 = 47000 - 47 = 46953$$

Но ещё проще ознакомить детей с правилом – « чтобы умножить число на 9 (99, 999) достаточно вычесть из этого числа число его десятков (сотен, тысяч), увеличенное на единицу, и к полученной разности приписать дополнение его цифры единиц до 10 (дополнение до 100 (1000) числа, образованного двумя (тремя) последними цифрами этого числа):

$$154 \times 9 = (\underline{15}4 - 16) \times 10 + (10 - 4) = 138 \times 10 + 6 = 1380 + 6 = 1386$$

Умножение на 15, 150

При умножении на 15, если число нечётное, умножают его на 10 и прибавляют половину полученного произведения:

$$23 \times 15 = 23 \times (10 + 5) = 230 + 115 = 345;$$

Если же число чётное , то поступаем ещё проще – к числу прибавляем его половину и результат умножаем на 10:

$$18 \times 15 = (18 + 9) \times 10 = 17 \times 10 = 270$$

При умножении числа на 150 пользуемся тем же приёмом и умножаем результат на 10, т.к. $150 = 15 \times 10$:

$$24 \times 150 = ((24 + 12) \times 10) \times 10 = (36 \times 10) \times 10 = 3600$$

Интересно, что $7 \times 11 \times 13 = 1001$ (число Шехерезады)

$$7 \times 143 = 1001$$

$$11 \times 91 = 1001$$

$$77 \times 13 = 1001$$

Признаки делимости.

- : **на 2** – чётные числа, круглые.
- : **на 3** – сумма цифр которых делится на 3.
- : **на 4** – две последние цифры составляют число, которое делится на 4 и числа, у которых два нуля на конце.
- : **на 5** числа, у которых на конце 5 или 0.
- : **на 6** числа, которые делятся и на 2 и на 3.
- : **на 8** числа, в записи которых три последние цифры образуют число ,делящееся на8.
- : **на 9** числа, сумма цифр которых делится на 9.
- : **на 10** числа, которые оканчиваются на 0.
- : **на 11 числа**, если из суммы цифр, стоящих на нечётных местах вычесть сумму цифр на чётных местах получится 0 или число кратное 11. 87635064
 $8+6+5+6=25$

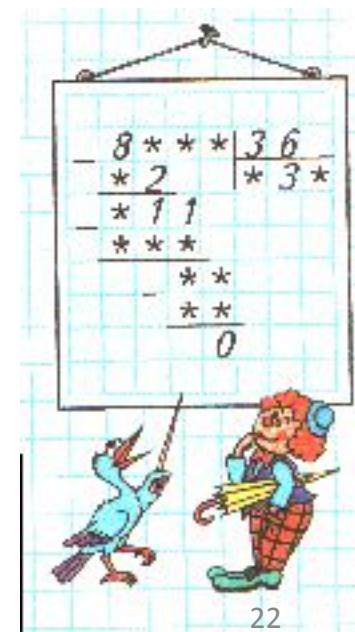
$$7+3+0+4=14 \quad 25-14=11,$$

значит всё число делится.

Для малых чисел: число справа налево делят по 2 цифры и складывают. Если сумма делится на 11, то всё число делится.

528 $5 + 28 = 33$, значит делится.

- : **на 12** числа, которые делятся и на 4, и на 3.
- : **на 14** числа, которые делятся и на 7, и на 2.
- : **на 15** числа, которые делятся и на 3, и на 5.



Рационализация вычислений:

1) за счёт тождественного преобразования:

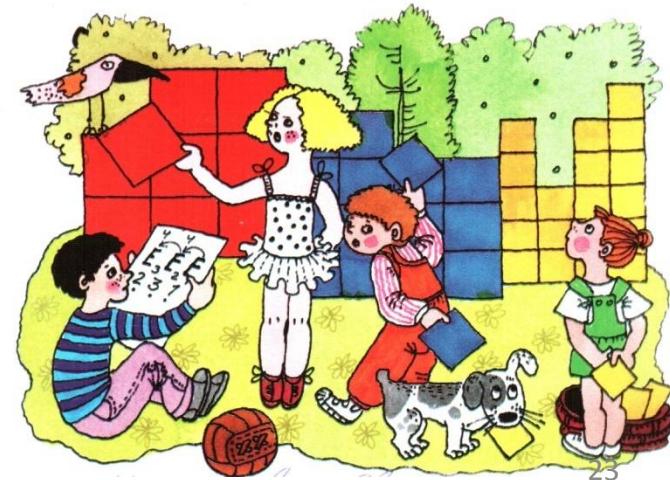
- $7584 : \underline{6} - 1584 : \underline{6} = (7584 - 1584) : \underline{6}$
- $1476 + \underline{65} + 24 + \underline{35} = (1476 + 24) + (\underline{65} + \underline{35}) =$

2) за счёт возможности не выполнять некоторые арифметические действия:

- $\underline{104482} : 6 - \underline{104482} : 6 = 0$
- $(75840 : \underline{20}) \times \underline{20} = 75840$

Свойства арифметических действий и конкретный смысл умножения

- 1) $120 : (5 \times 3) = 120 : 5 : 3$
- 2) $630 : 2 : 5 = 630 : (2 \times 5)$
- 3) $\underline{57} \times 9 + \underline{57} = 57 \times (9 + 1)$
- 4) $4 \times 35 \times 25 \times 2 = (4 \times 25) \times (35 \times 2)$



Возможность: устно вычислить

$$5300 : \underline{2} : \underline{5} = 5300 : (\underline{2} \times \underline{5})$$

Выполнять меньшее количество действий

$$30452 \times \underline{3} \times \underline{2} = 30452 \times (\underline{3} \times \underline{2})$$

$$6532 \times \underline{3} + 3645 \times \underline{3} = (6532 + 3645) \times \underline{3}$$

Проще вычислять

$$70 : \underline{2} + 80 : \underline{2} = (70 + 80) : \underline{2}$$

Связь результатов и компонентов действий

$(91010 - \underline{57654}) + \underline{57654} = 91010$ – увеличили и уменьшили на столько же

Конкретный смысл выполнения вычитания и деления над одинаковыми компонентами

$$a - a = 0 \quad a : a = 0$$

$$(\underline{304} + \underline{629}) - (\underline{304} + \underline{629}) = 0$$
 -одинаковые суммы

Умножение на нуль , случаи умножения и деления 0.

$$a \times 0 = 0 \quad 0 \times a = 0 \quad 0 : a = 0$$

$$283 \times (\underline{4704} - \underline{676}) \times \underline{0} = 0$$

Представление некоторых одинаковых чисел одинаковыми выражениями

$$(12004 - \underline{4 \times 19}) + \underline{4 \times 19} = 12004$$

Представление нуля или одного из одинаковых чисел выражением:

$$(12004 - 4 \times 19) + 17 = (12004 - 76) + 76 = 12004$$

$$(100 - 99 - 1) \times (1723 - 23 \times 13) = 0 \times (1723 - 23 \times 17) = 0$$

Возможность применения знаний не ко всему выражению, а к его части:

$$\begin{aligned} 2380 + 2527 : 7 + 273 : 7 &= 2380 + (2527 + 273) : 7 = 2380 + 2800 : 7 = \\ &= 2380 + 400 = 2780 \end{aligned}$$

Возможность применять одновременно несколько знаний к разным частям выражения:

$$5 \times 23 \times 2 + 98 + 102 = (5 \times 2) \times 23 + (98 + 102) = 230 + 200 = 430$$

$$783 \times 4 + 783 \times 6 - 703 \times 8 \times 0 = 783 \times (4 + 6) - 0 = 7830$$

Возможность применения к одному выражению нескольких знаний – одного после другого.

$$5 \times (300 + 65) - 5 \times 65 = 5 \times 300 + \underline{5 \times 65} - \underline{5 \times 65} = 5 \times 300 = 1500$$

$$65277 : 3 : 3 - 65277 : 9 = 65277 : (3 \times 3) - 65277 : 9 = 65277 : 9 - 65277 : 9 = 0$$

Приём замены множителя разностью

Приём замены второго множителя, если этот множитель на 1-2 единицы меньше двузначного или трёхзначного разрядного числа:

$$\underline{68} \times 5 = (\underline{70} - 2) \times 5 = 70 \times 5 - 2 \times 5 = 350 - 10 = 340$$

$$\underline{599} \times 8 = (\underline{600} - 1) \times 8 = 600 \times 8 - 8 = 4800 - 8 = 4792$$

Приём замены множителя произведением:

$$35 \times \underline{6} = 35 \times (\underline{2} \times 3) = (35 \times 2) \times 3 = 70 \times 3 = 210$$

$$125 \times \underline{48} = 125 \times (\underline{8} \times 6) = (125 \times 8) \times 6 = 1000 \times 6 = 6000$$

Умножение двузначных чисел.

- Основой умножения двузначных чисел является правило **умножения суммы на число**. 18×16 . Сначала число 18 представим в виде «суммы удобных (разрядных) слагаемых , затем используем распределительный закон умножения относительно сложения:
- $18 \times 16 = (10 + 8) \times 16 = 10 \times 16 + 8 \times 16 = 160 + 128 = 288$**
- Устно можно проще: к одному из чисел надо прибавить количество единиц другого, эту сумму умножить на 10 и прибавить к ней произведение единиц данных чисел:
- $18 \times 16 = (18 + 6) \times 10 + 8 \times 6 = 240 + 48 = 288$**
- Таким способом можно умножать двузначные числа , меньше 20, а также числа ,в которых одинаковое количество десятков:
- $23 \times 24 = (23 + 4) \times 20 + 4 \times 3 = 27 \times 20 + 12 = 540 + 12 = 562$**

Приём округления, основанный на изменении результата вычисления при изменении одного или нескольких компонентов.

- **1. Сложение.** Для нахождения значения суммы используется приём округления одного или нескольких слагаемых.
- При увеличении (уменьшении) слагаемого на несколько единиц, сумму уменьшаем (увеличиваем) соответственно на столько же единиц:
- $324 + 48 = 324 + (48 + 2) - 2 = (324 + 50) - 2 = 374 - 2 = 372$ или
- $324 + 48 = (320 + 50) + 4 - 2 = 370 + 4 - 2 = 372$
- **2. Вычитание.**
- 1) при увеличении (уменьшении) уменьшаемого на несколько единиц разность уменьшаем (увеличиваем) на столько же единиц:
- $497 - 36 = (500 - 36) - 3 = 464 - 3 = 461;$
- 2) при увеличении (уменьшении) вычитаемого на несколько единиц разность увеличиваем (уменьшаем) на столько же единиц:
- $534 - 98 = (534 - 100) + 2 = 434 + 2 = 436$

3) При увеличении (уменьшении) уменьшаемого и вычитаемого на несколько единиц разность не изменяется:

$$231 - 96 = (231 + \underline{4}) - (96 + \underline{4}) = 235 - 100 = 135$$

- 3. Умножение.
- При увеличении (уменьшении) одного из множителей на несколько единиц умножаем полученное целое число и прибавленные (отнятые) единицы на другой множитель и из первого произведения вычитаем второе произведение (полученные произведения складываем).
- $97 \times 6 = (\underline{100} - 3) \times 6 = 100 \times 6 - 3 \times 6 = 600 - 18 = 582$

Некоторые способы вычислений могут показаться сложными, но при правильной организации работы на уроке и внеклассных занятиях учащиеся осваивают их и с удовольствием используют в вычислительной деятельности. Привычка выполнять подобные вычисления устно формирует устойчивый навык, который не раз сыграет добрую службу при изучении более сложного материала.

- *Вариативность вычислительных навыков учащихся формирует интерес, положительную мотивацию к вычислительной деятельности, даёт возможность знакомить школьников с известными вычислительными секретами, показать практическую значимость математики, тогда перед детьми откроется совсем другая математика – живая, полезная и понятная.*

**Ведь уроки математики должны учить считать,
тренировать мышление, разум, волю. И тогда наши
ученики будут способными, уверенными и
культурными. Ведь своя голова надёжней, чем
• самые современные вычислительные средства.**

