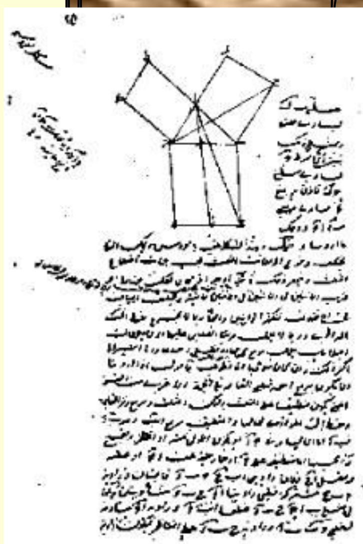
Различные подходы к доказательству теоремы Пифагора

Автор проекта:
Мигачева Ольга,
ученица 9А класса Лаишевской СОШ № 3
Лаишевского района Республики Татарстан

Руководитель: **Мигачева Галина Анатольевна**

…ли даны многочисленные разные доказательства теоремы Пифагора...

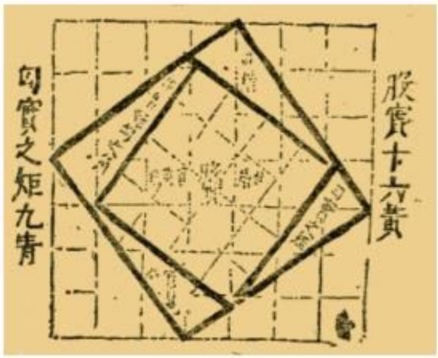


Чертеж к теореме Пифагора в средневековой арабской рукописи

Прокл в своем комментарии к «Началам» Евклида пишет относительно предложения о том, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, следующее: «Если слушать тех, кто любит повторять древние легенды, то придется сказать, что эта теорема восходит к Пифагору. Рассказывают, что в честь этого открытия он принес в жертву быка». О том же рассказывает и другой греческий историк древности – Плутарх (I в.). На основе этих и других преданий долгое время считали, что до Пифагора эта теорема не была известна и назвали ее поэтому «теоремой Пифагора»…

Однако теперь известно, что эта важнейшая теорема встречается в вавилонских текстах, написанных за 1200 лет до Пифагора.

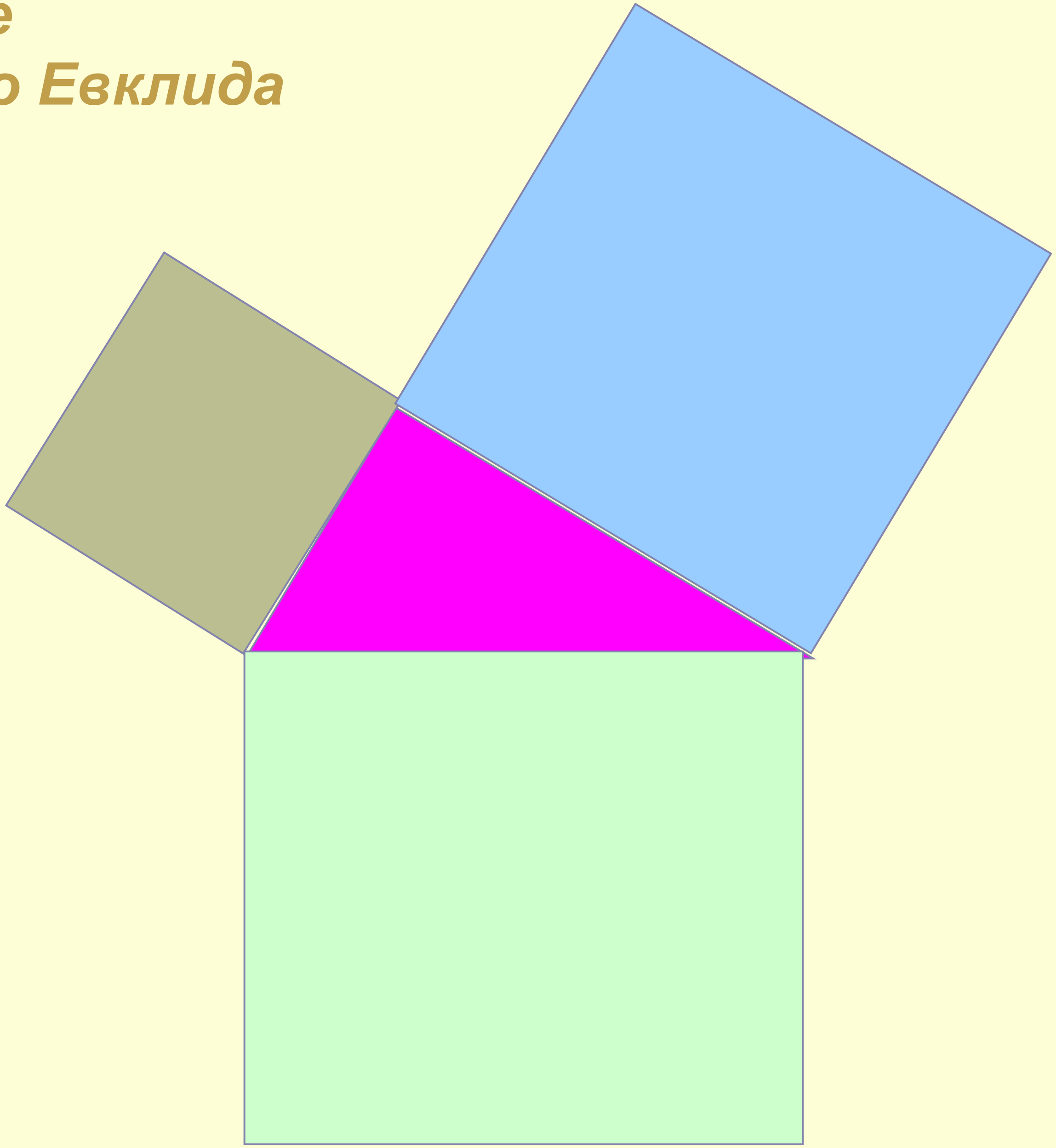
Теорема Пифагора упоминается в первой части самого древнего дошедшего до нас китайского математико-астрономического сочинения «Чжоу-би», написанного около 1100 лет до н.э.



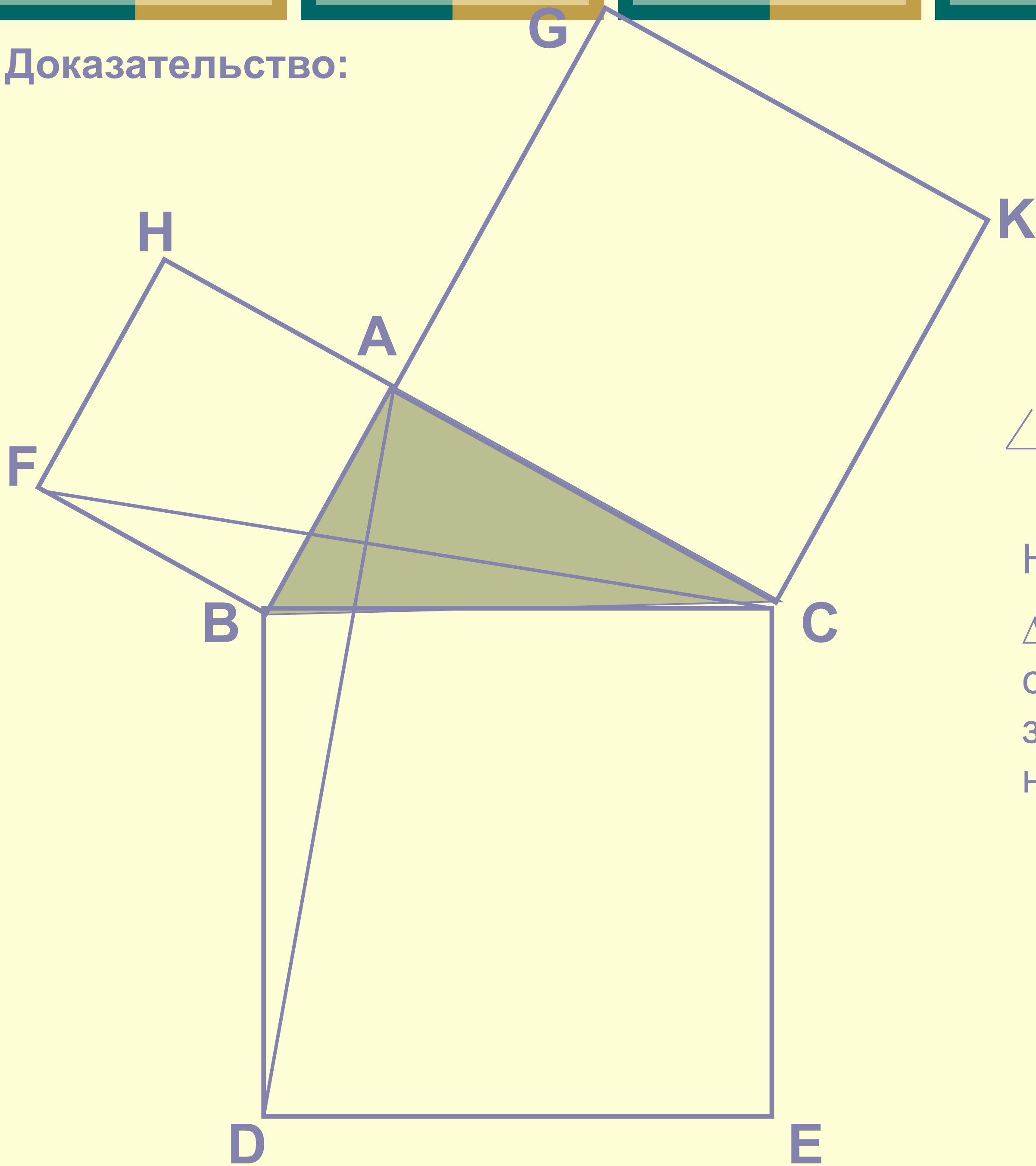
Теорема Пифагора в древнейшем китайском трактате «Чжоу-би»

Геометрическое доказательство Евклида

Если на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построить соответствующие квадраты, то квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.



Доказательство:



$\angle DBC = \angle FBA = 90^0$

$\angle DBC + \angle ABC =$

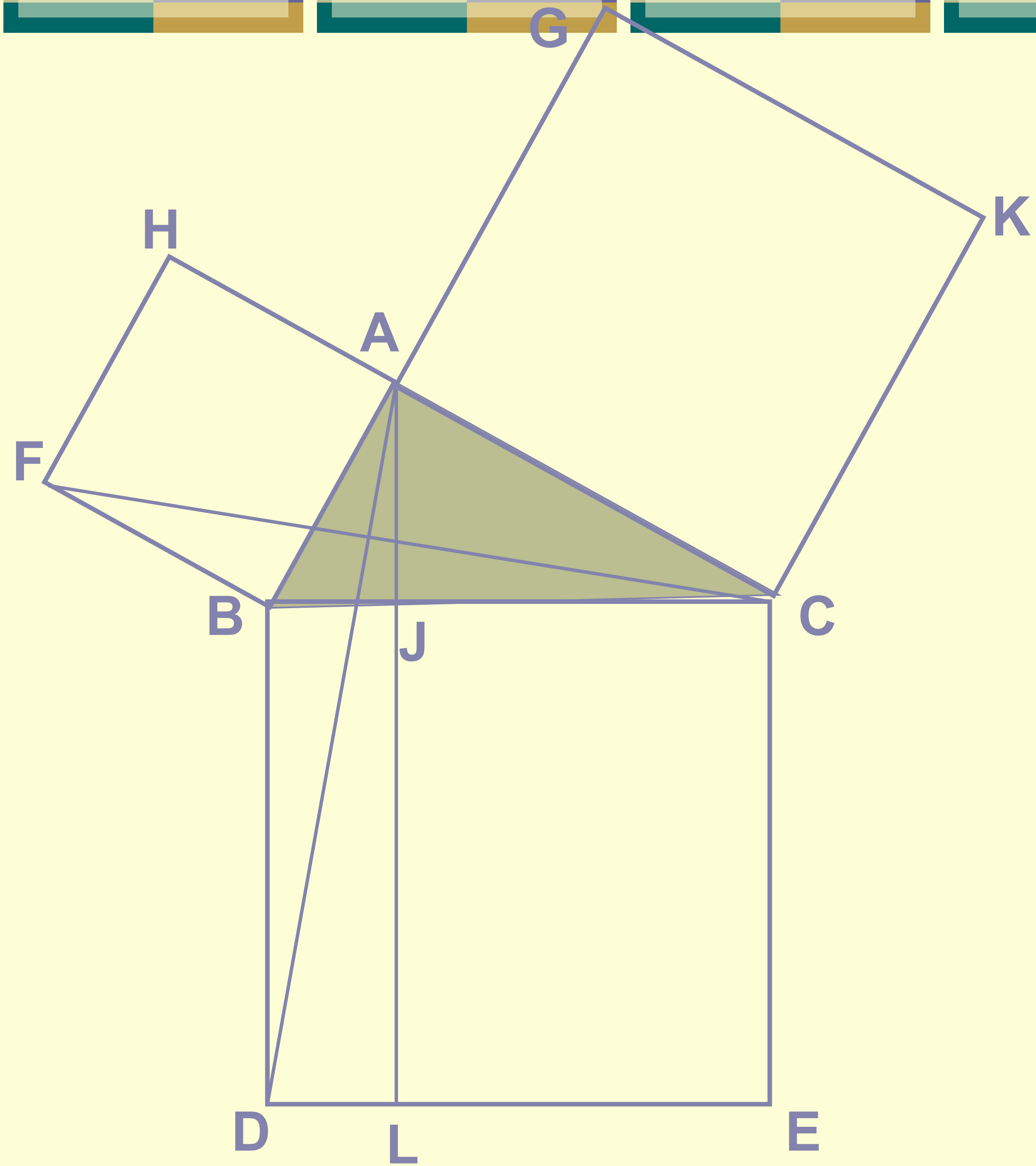
$\angle FBA + \angle ABC$

Значит,

$\angle DBA = \angle FBC$.

Но AB=FB, BC=BD.

ΔABD=ΔFBC (по двум сторонам и углу, заключенному между ними).



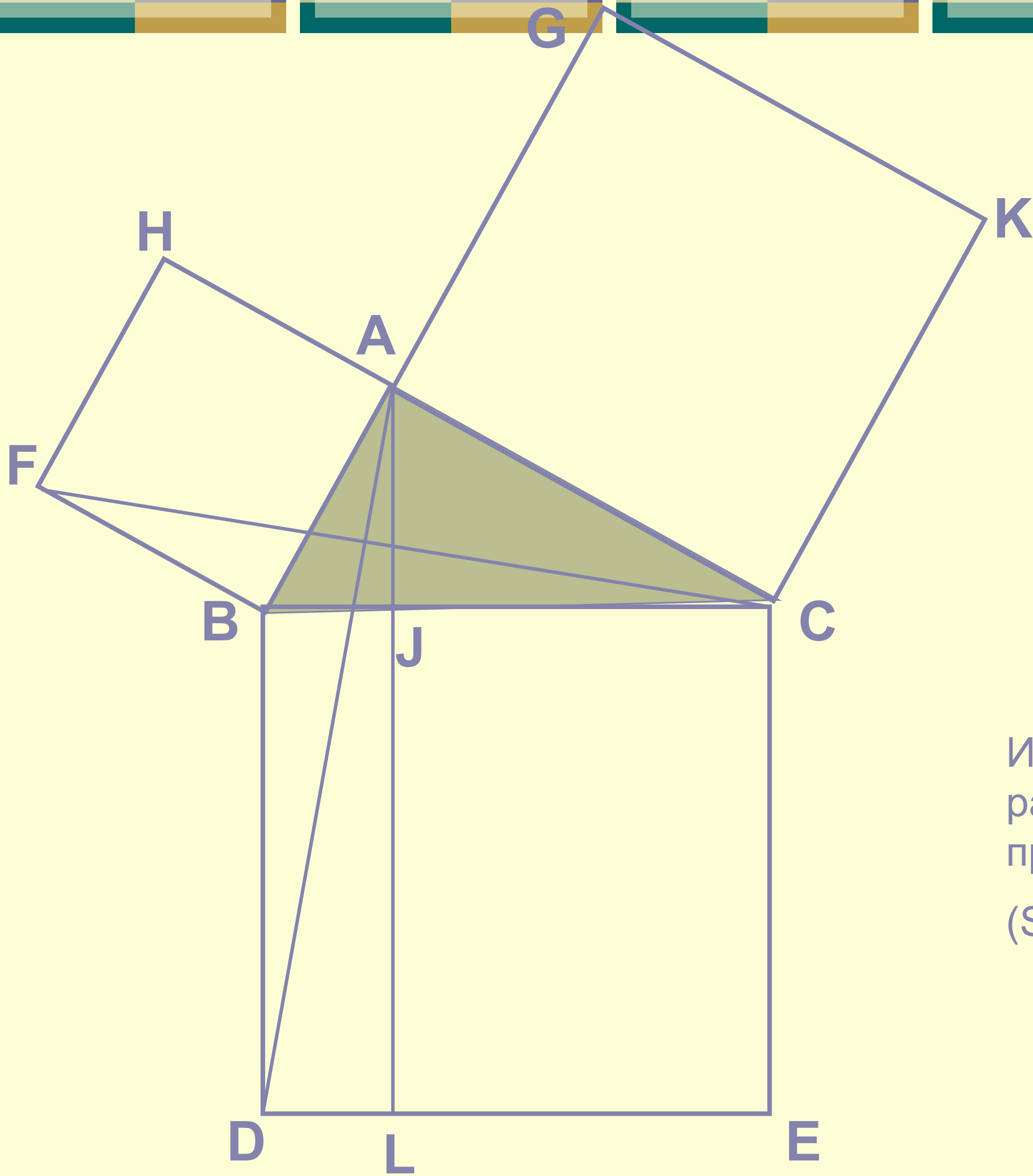
В треугольнике ABD высота, проведенная из вершины A на сторону BD, равна длине отрезка BJ.

S_{ABD}=½ BJ · BD,

S_{BJLD}=BJ · BD.

Значит,

S_{ABD}=½ S_{BJLD}



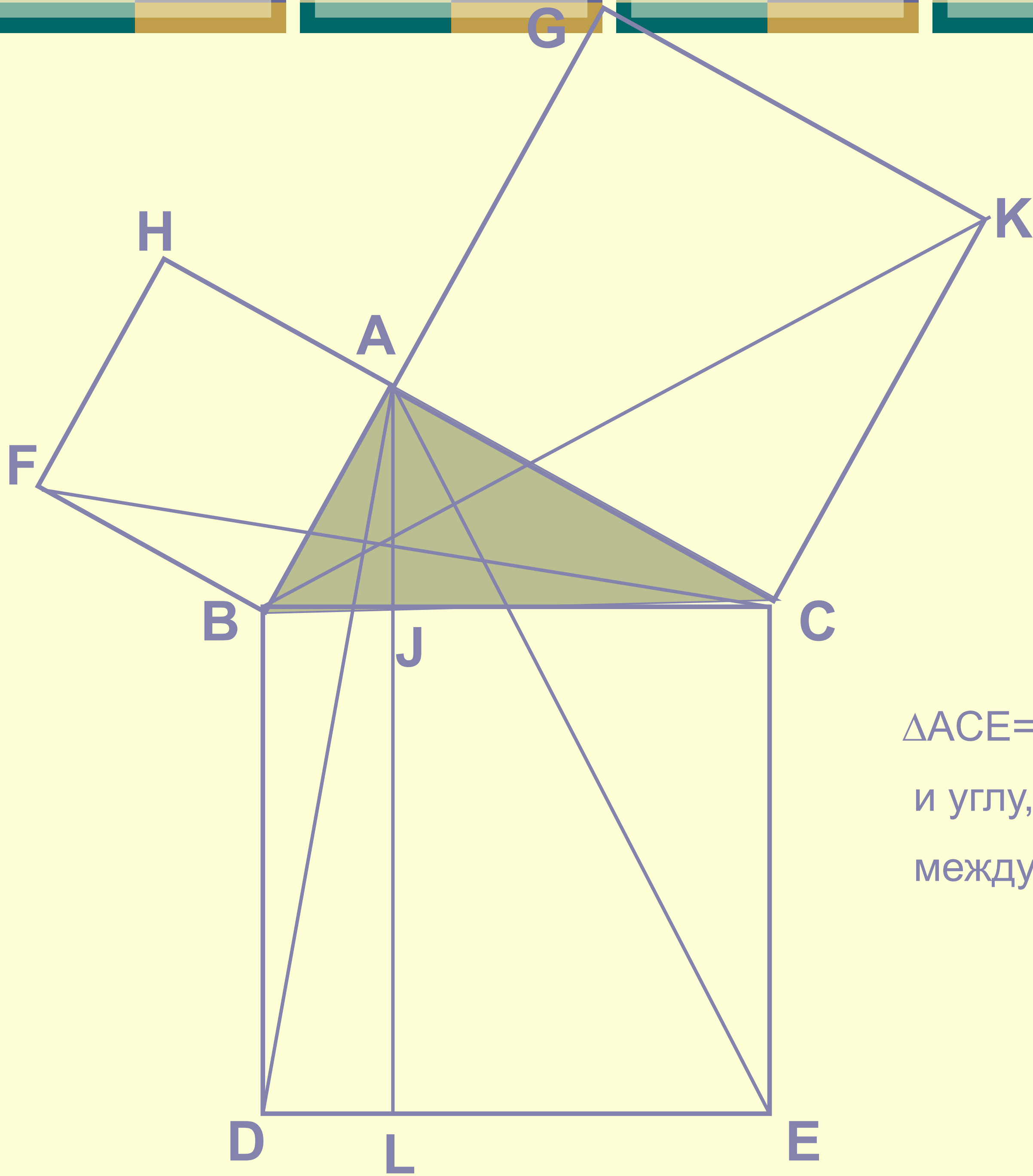
В треугольнике FBC высота, проведенная из вершины C на сторону BF, равна длине отрезка AB.

$S_{FBC}=½ AB \cdot BF$,
$S_{ABFH}=AB \cdot BF$.

Значит,
$S_{FBC}=½ S_{ABFH}$

Итак, квадрат ABFH равновелик прямоугольнику BJLD.

$(S_{BJLD}=S_{ABFH})$



$\angle BCE = \angle ACK = 90^0$

$\angle BCE + \angle ACB =$

$\angle ACK + \angle ACB$

Значит,

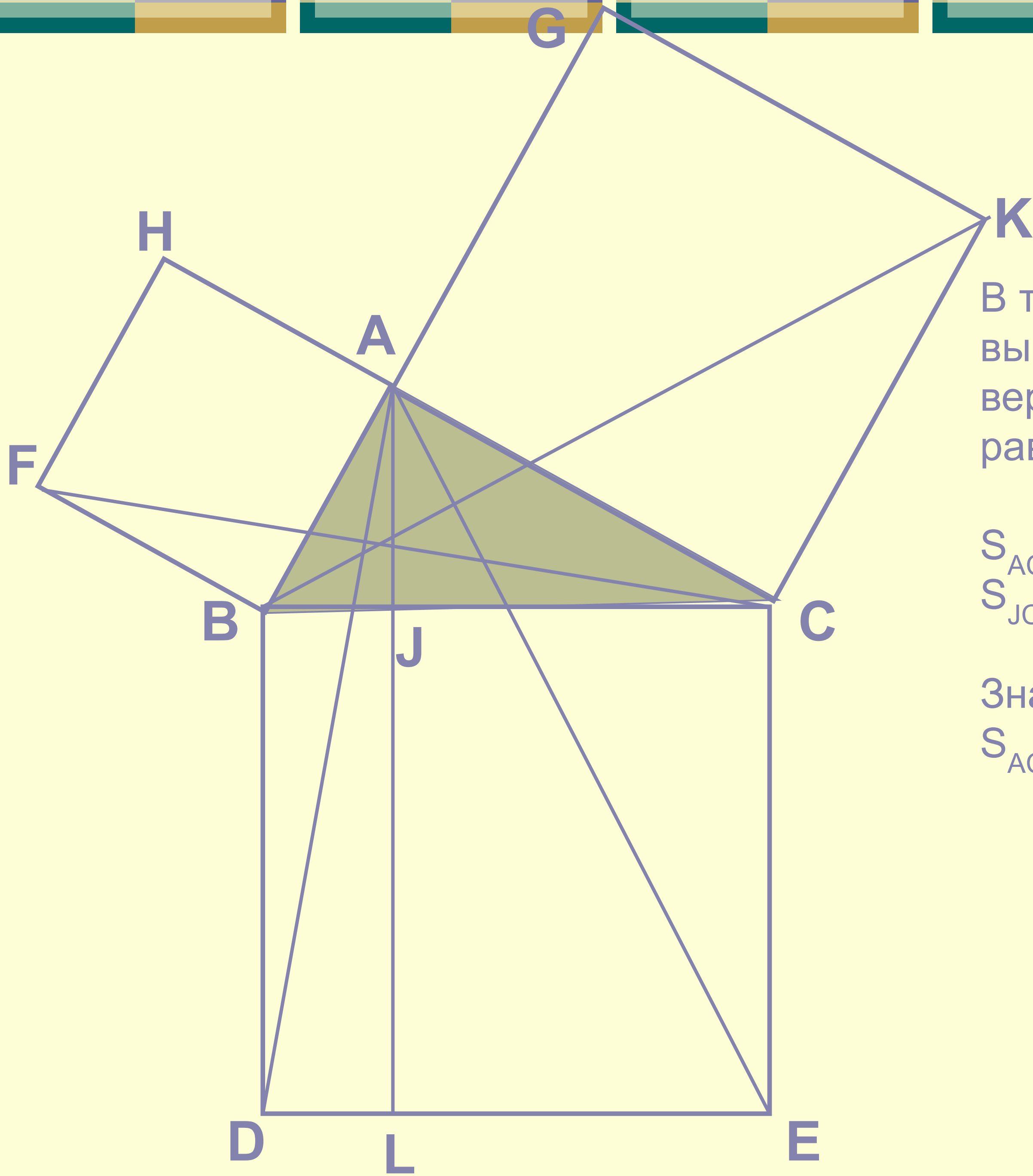
$\angle ACE = \angle BCK$.

Но AC=KC, BC=CE

ΔACE=ΔKCB (по двум сторонам

и углу, заключенному

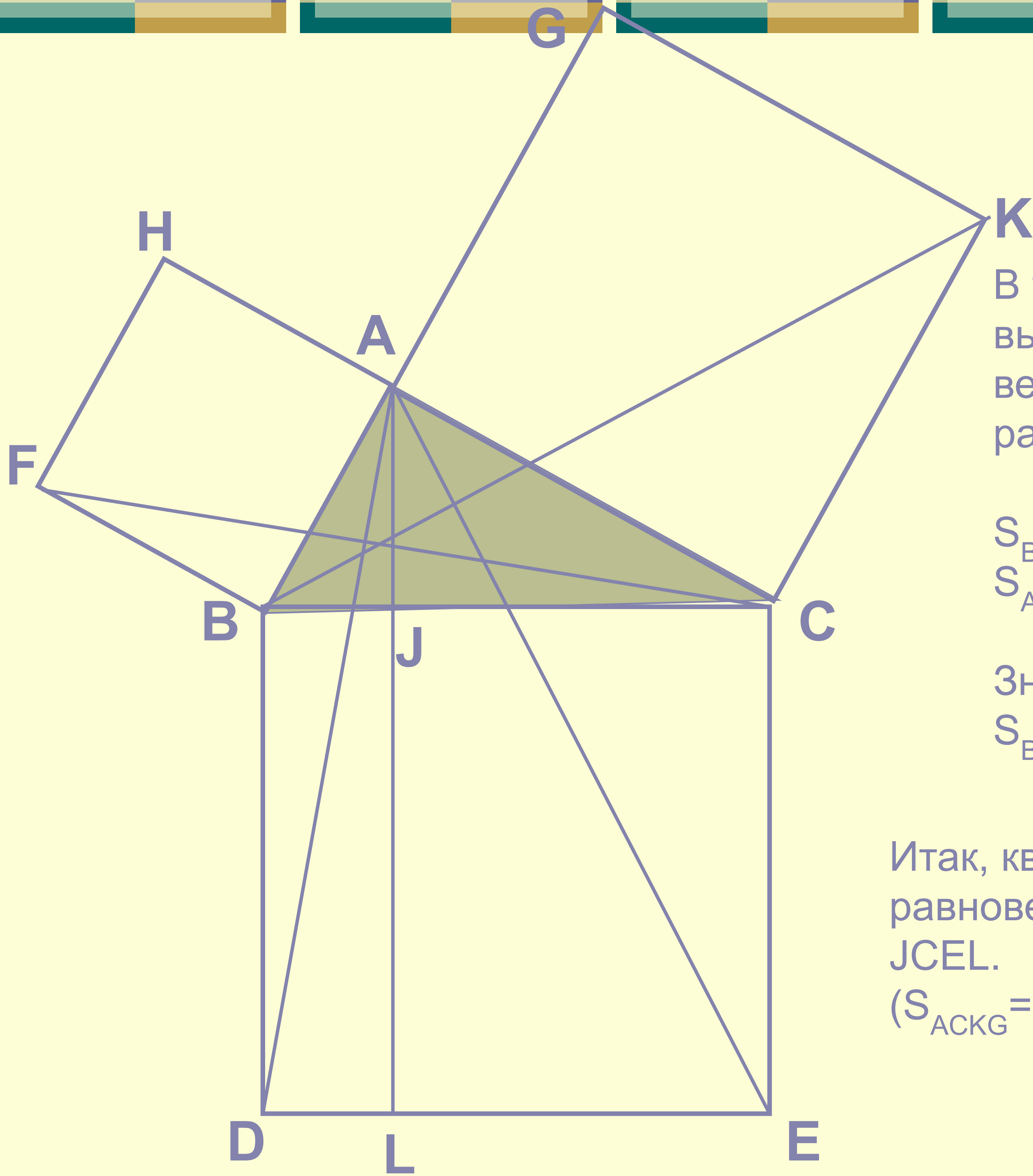
между ними).



В треугольнике ACE высота, проведенная из вершины A на сторону CE, равна длине отрезка JC.

$S_{ACE}=\frac{1}{2}\,CJ \cdot CE$,
$S_{JCEL}=CJ \cdot CE$.

Значит,
$S_{ACE}=\frac{1}{2}\,S_{JCEL}$

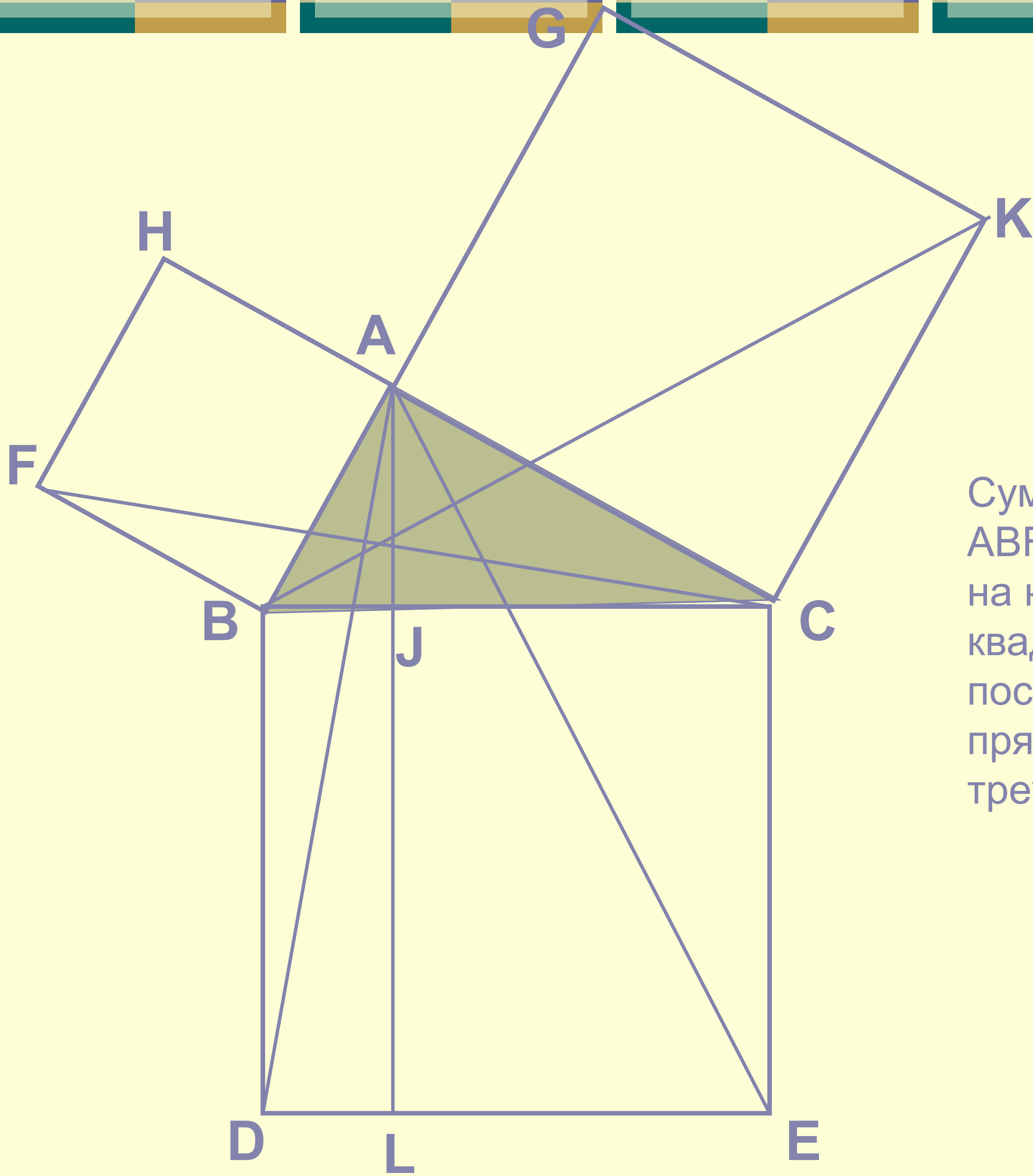


В треугольнике ВКС высота, проведенная из вершины В на сторону СК, равна длине отрезка АС.

S_{BCK}=½ AC · CK,
S_{ACKG}=AC · CK.

Значит,
S_{BCK}=½ S_{ACKG}

Итак, квадрат ACKG равновелик прямоугольнику JCEL.
(S_{ACKG}=S_{JCEL})



Но $S_{BJLD} + S_{JCEL} = S_{BCED}$,

Тогда

$S_{ABFH} + S_{ACKG} = S_{BCED}$.

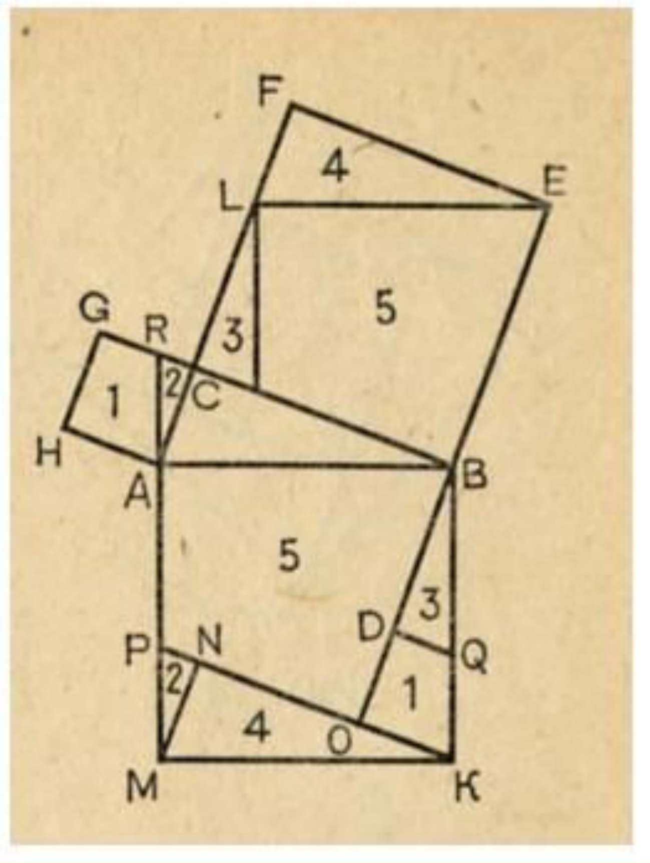
Сумма площадей квадратов ABFH и ACKG, построенных на катетах, равна площади квадрата BCED , построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника ABC.

Доказательство Анариция,

основанное на том, что равносоставленные фигуры равновелики

Если на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построить соответствующие квадраты, то квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.

Доказательство основывается на том, что равносоставленные фигуры равновелики: квадраты, построенные на катетах и гипотенузе, разбиваются на многоугольники так, что каждому многоугольнику из состава квадрата на гипотенузе соответствует равный многоугольник одного из квадратов на катетах. Достаточно посмотреть на чертеж, чтобы понять все доказательство (см. рис.).
Это доказательство дал багдадский математик и астроном X в. ан-Найризий (латинизированное имя – Анариций).



Чертеж к доказательству Анариция

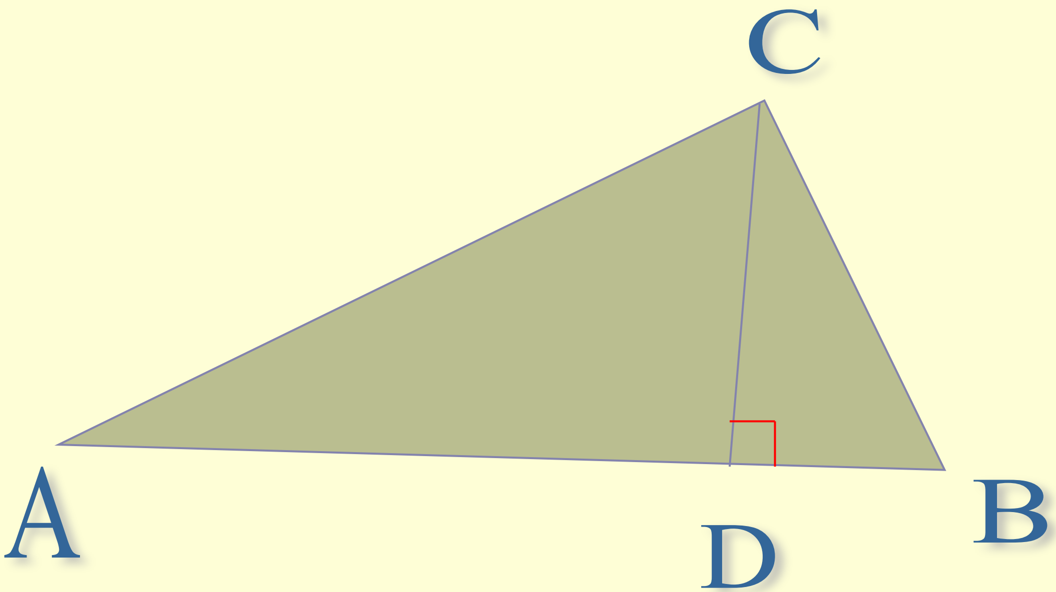
Доказательство, основанное на теории подобия

Леонардо Фибоначчи и Валлис (XVII в.) "Практическая геометрия"

Лежандр (VIII в.)

А.Ю. Давидов "Элементарная геометрия"

Доказательство, основанное на теории подобия



Из подобия треугольников *ACD* и *CAB* следует:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$$

$$AC^2 = AB \cdot AD$$

Из подобия треугольников *ABC* и *DCB* следует:

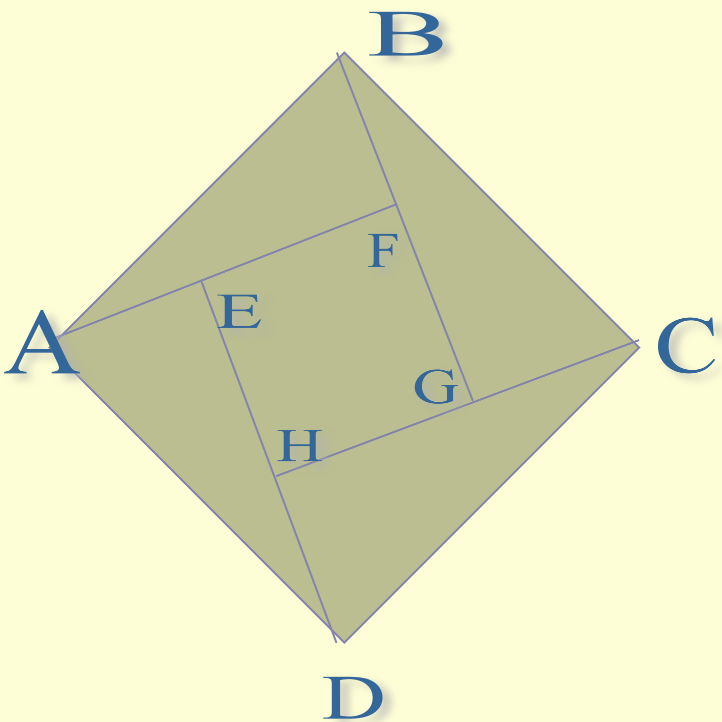
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}; BC^2 = AB \cdot BD$$

Сложив почленно равенства, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD)$$

$$AC^2 + BC^2 = AB^2$$

Алгебраический метод Бхаскары



Бхаскара(1114-1185) индийский математик и астроном

Пусть ABCD – квадрат, сторона которого равна гипотенузе прямоугольного треугольника ABF (AB=c, BF=a, AF=b)

Пусть DE перпендикулярна к AF, CH – к DE, BG – к CH.

Тогда равны треугольники AFB, BGC, CHD, DEA.

EF=FG=GH=HE=b-a.

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (b-a)^2$$

$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Пребудет вечной истина, как скоро Ее познает слабый человек! И ныне теорема Пифагора Верна, как и в его далекий век.

Обильно было жертвоприношенье Богам от Пифагора. Сто быков Он отдал на закланье и сожженье За света луч, пришедший с облаков.

Поэтому всегда с тех самых пор, Чуть истина рождается на свет, Быки ревут, ее почуя, вслед.

Они не в силах свету помешать, А могут лишь, закрыв глаза, дрожать От страха, что вселил в них Пифагор.

А. Шамиссо