Различные подходы к построению теории действительных чисел

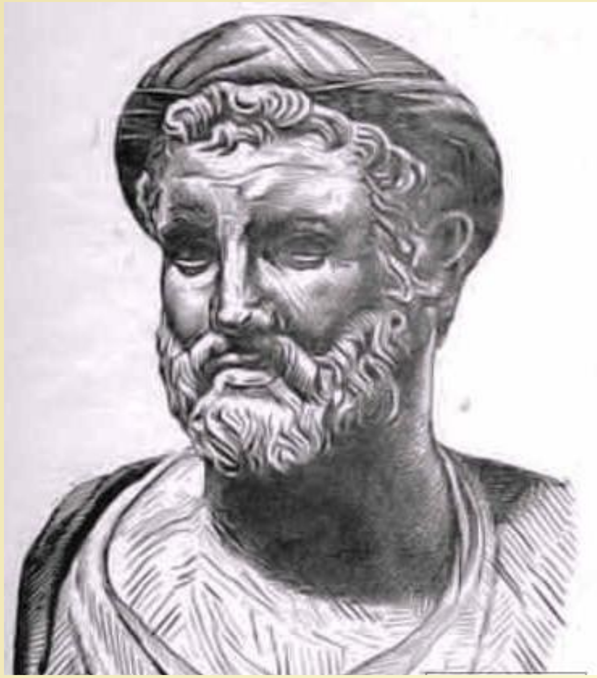
Подготовила:
студентка 5 курса
Платошина Татьяна Сергеевна
Научный руководитель:
к.п.н.,доцент Воробьева Н.Г

Цели :

- 1. Рассмотреть различные подходы к построению теории действительных чисел, свойства действительных чисел и ту роль, которую они сыграли в развитии математики.

Задачи:

- Проанализировать построение множества действительных чисел в историческом аспекте.
- Рассмотреть подходы к построению теории действительных чисел по Кантору, Вейерштрассу, Дедекинду.
- Выделить подходы к построению действительных чисел в школьном курсе математике.



"Всё есть число"

ифагор

"Мы никогда не стали бы разумными,
если бы исключили число из человеческой природы"

Платон

Развитие теории действительных чисел по Кантору

Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор- немецкий математик (3 марта 1845, Санкт-Петербург — 6 января 1918, Галле (Заале))

Его научная деятельность:

- Диссертация 1867 г. «О неопределенных уравнениях второй степени»
- Работа «О преобразовании тернарных квадратичных форм»
- В 1895—1897г издана работа «К обоснованию учения о трансфинитных множествах»
- Занимался математикой , философией, теорией множеств.
- Ввел понятие взаимно-однозначного соответствия между элементами множеств, дал определения бесконечного и вполне-упорядоченного множеств и доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных, ввел понятие кардинальных и порядковых чисел и их арифметику, рассмотрел теорию о трансфинитных числах

Теория действительных чисел по Кантору

- Основной шаг, который делает Кантор в построении теории вещественного числа заключается в том, что он рассматривает всякую последовательность рациональных чисел , удовлетворяющую условию Коши как определяющую некоторое вещественное число.

- Две фундаментальные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ могут определять одно и то же вещественное число. Это имеет место при условии

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists \mathrm{N}(\varepsilon)\ \ \forall \mathrm{n} > \mathrm{N}(\varepsilon)\ \ \left|\mathrm{a}_{\mathrm{n}} - b_n\right| < \varepsilon$$

- Таким образом, на множестве всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел устанавливается отношение эквивалентности, и в соответствии с общим принципом все фундаментальные последовательности разбиваются на классы эквивалентности. Смысл этого разбиения таков, что последовательности из одного класса определяют одно и то же вещественное число, а последовательности из разных — разные. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между вещественными числами, и классам фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Теперь мы можем сформулировать основное определение теории вещественных чисел Кантора.

- **Вещественное число** есть класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

- Из определения вытекает, что всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел сходится к некоторому вещественному числу. Этот принцип лежал в основе определения вещественного числа.
- множество вещественных чисел содержит пределы всех фундаментальных последовательностей своих элементов. Это свойство множества вещественных чисел называется полнотой.

Развитие теории действительных чисел по Вейерштрассу

- **Карл Тео́дор Вильге́льм Ве́йерштрасс**

(31 октября 1815 — 19 февраля 1897) — выдающийся немецкий математик, «отец современного анализа».

- Исследования Вейерштрасса существенно обогатили математический анализ, теорию специальных функций, вариационное исчисление, дифференциальную геометрию и линейную алгебру.
- Он сформулировал логическое обоснование анализа на основе построенной им теории действительных (вещественных) чисел и так называемого ε-δ-языкаон строго определил на этом языке понятие непрерывности.
- он дал строгое доказательство основных свойств непрерывных функций.предела, сходимости ряда и равномерной сходимости функций.

Теория действительных чисел по Вейерштрассу.

- В основе теории вещественного числа используется предположение , что всякая десятичная дробь является разложением некоторого, рационального или иррационального, вещественного числа α:

$$\alpha \approx \pm a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$$

- **Действительным числом** называется десятичный ряд вида :

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots$$

- где a_0-любое целое число, а числитель a_i-целые числа, ограниченные соотношением $0 \le \grave{a}_{\mathrm{i}} \le 9$
т. е использоваться могут все цифры, причем исключено повторение 0 бесконечное множество раз.

Основная теорема, характеризующая непрерывность множества действительных чисел

Если имеются два множества R_1 и R_2 рациональных чисел, обладающих двумя свойствами:

- Каждое число множества R_1 не больше каждого числа множества R_2
- Для любого данного положительного действительного числа ε найдутся числа q в множестве R_2 и p в множестве R_1 такие, что $q - p < \varepsilon$ то можно сконструировать действительное число A и притом единственное, которое не меньше каждого числа множества R_1 и не больше каждого числа множества R_2

Развитие теории действительных чисел по Дедекинду

- Ю́лиус Вильге́льм Ри́хард Дедеки́нд (6 октября 1831 — 12 февраля 1916) — немецкий математик.
- В 1852 году Дедекинд получает докторскую степень за работу над диссертацией по теории интегралов Эйлера.
- Ввел в математику в самом общем виде теоретико-множественное понятие отображения.
- В 1872 году выходит его первая работа
- « Непрерывность и иррациональность».
- В 1887 выходит вторая работа «Что такое числа и для чего они служат?».

Теория действительных чисел по Дедекинду

Сечением Дедекинда в поле рациональных чисел называется разбиение всего множества рациональных чисел на два непустых подмножества так, что

- каждое число, вошедшее в первое подмножество, меньше каждого числа, вошедшего во второе подмножество.
- каждое рациональное число должно входить в одно из этих двух подмножеств.

<u>Рассмотрим три вида сечений Дедекинда.</u>

- Первый вид, когда в первом подмножестве есть наибольшее число, а во втором нет наименьшего числа, что будем передавать в виде (R1;R2)= $\bar{r}_1$, где $\bar{r}_1$ - есть последнее в подмножестве R1.

- Второй вид сечения, когда в первом подмножестве нет наибольшего числа, а во втором есть наименьшее число ($R_1;R_2$)=r , где r- наименьшее из R_2
- Третий вид сечения: когда в первом подмножестве нет наибольшего числа, а во втором подмножестве нет наименьшего числа.
- **Действительным числом** называется любое из трех видов сечений Дедекинда в поле рациональных чисел.
- **Иррациональном числом** называется действительное число, определяемое сечением Дедекинда в поле рациональных чисел только третьего вида.

Спасибо за внимание!