

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

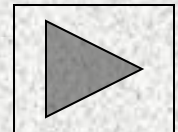
8 класс

Учитель математики

ПВПШ№1

Сеноженская Г. С.

- Определение квадратного уравнения
- Виды квадратных уравнений
- Решение квадратных уравнений



Квадратные уравнения—это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Квадратные уравнения находят широкое применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных уравнений и неравенств. В школьном курсе математики изучают формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые квадратные уравнения. Однако имеются и другие способы решения квадратных уравнений, которые позволяют очень быстро и рационально решать многие уравнения. Разберём некоторые из них.



*Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$,
x-переменная,
a, b, c - некоторые числа,
 $a \neq 0$, называется квадратным
уравнением.*

Примеры:

$$8x^2+3x-5=0, 4x^2+6x=0, 3x^2-4=0.$$



Виды квадратных уравнений

Неполные

$$ax^2+bx=0$$

$$ax^2=0$$

$$ax^2+c=0$$

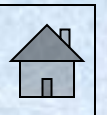
Полные

$$ax^2+bx+c=0,$$

$$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0,$$

$$x^2+px+g=0$$

*приведённое
вадратное
уравнение*



Решение неполных квадратных уравнений

$$ax^2 + bx = 0,$$

$$ax^2 = -c,$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$3x^2 - 12 = 0,$$

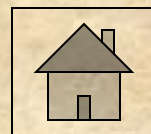
$$3x^2 = 12,$$

$$x^2 = 12 : 3,$$

$$x^2 = 4,$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$$

Ответ: -2; 2.



$$ax^2=0,$$

$$x^2=0,$$

$$x=0.$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

$$ax^2+bx=0,$$

$$x(ax^2+b)=0,$$

$$x=0, \quad ax+b=0,$$

$$2x^2=0,$$

$$x^2=0,$$

$$x=0.$$

ОТВЕТ: 0.

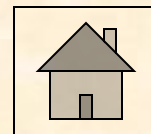
$$5x^2-2x=0,$$

$$x(5x-2)=0,$$

$$x=0, \quad 5x-2=0,$$

$$x = \frac{2}{5}.$$

ОТВЕТ: 0; $\frac{2}{5}$



Способы решения квадратных уравнений

- разложение левой части на множители;
- метод выделения полного квадрата;
- с применением формул корней квадратного уравнения;
- с применением теоремы Виета;
- способом «переброски»;
- по сумме коэффициентов квадратного уравнения;
- графический.



Разложение левой части на множители

$$x^2+10x-24=0,$$

$$x^2+12x-2x-24=0,$$

$$x(x+12)-2(x+12)=0,$$

$$(x-2)(x+12)=0,$$

$$x-2=0, \quad x+12=0,$$

$$x=-12.$$

Ответ: -12; 2.

Решите уравнения:

$$x^2-4x+4=0,$$

$$x^2+6x+9=0,$$

$$x^2+4x+3=0,$$

$$x^2+2x-3=0.$$



Метод выделения полного квадрата

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 32 - 32 - 7 = 0$$

$$(x+3)^2 - 16 = 0$$

$$(x+3)^2 = 16$$

$$x+3 = -4, \quad x+3 = 4$$

$$x = -7 \quad x = 1$$

Ответ: -7; 1.

$$0 = \left(\frac{\xi}{\zeta} - x \frac{\xi}{\zeta} - \zeta x \right) \zeta$$

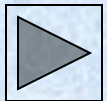
$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{10} \cdot x + \left(\frac{3}{10} \right)^2 - \left(\frac{3}{10} \right)^2 - \frac{2}{5} = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{10} \right)^2 - \frac{49}{10} = 0$$

$$x - \frac{3}{10} = -\frac{7}{10} \quad x - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$x = \frac{2}{5} \quad x = 1$$

Ответ: 0,4; 1.



*Решите уравнения методом
выделения полного квадрата*

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$4x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$2x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$4x^2 - 8x + 4 = 0$$



С использованием формул корней квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0, a \neq 0,$$

$D > 0$ - два корня, $D = 0$ - один корень,

$D < 0$ - нет корней

b – чётное

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

b – чётное, $b = 2k$

$$D_1 = k^2 - ac$$

$$x_1 = \frac{-k - \sqrt{D}}{a}$$

$$x_2 = \frac{-k + \sqrt{D}}{a}$$



Примеры:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$b = 5$ – нечётное

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = \\ = 25 - 16 = 9, D > 0$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 3}{4} = 2$$

Ответ: $\frac{1}{2}; 2$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$b = 4$ – чётное,

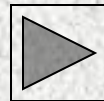
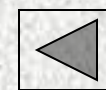
$$b = 2 \cdot 2, k = 2,$$

$$D_1 = 2^2 + 21 = 25,$$

$$x_1 = -2 - \sqrt{25} = \\ = -2 - 5 = -7.$$

$$x_2 = -2 + \sqrt{25} = \\ = -2 + 5 = 3.$$

Ответ: $-7; 3$.



Решите уравнения, применяя формулу корней квадратного уравнения

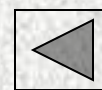
$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$6x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$3x^2 - 7x - 1 = 0$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$10x^2 - 6x + 9 = 0$$



С использованием теоремы Виета

$$x^2+px+g=0,$$

Если x_1, x_2 - корни уравнения, то

$$x_1+x_2=-p,$$

$$x_1 \cdot x_2=g$$

Решите уравнения:

$$x^2+2x-8=0$$

$$x^2+10x+9=0$$

$$x^2-12x+35=0$$

$$x^2-2x+1=0$$

$$x^2-2x-15=0$$

$D>0$, два корня,

по теореме, обратной теореме Виета, имеем:

$$x_1+x_2=2, \quad x_1=5,$$

$$x_1 \cdot x_2=-15; \quad x_2=-3.$$

Ответ: 5; -3.



Способ «переброски»

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

Умножим обе части уравнения на a

$$a^2x^2 + bax + ca = 0$$

Пусть $ax = y$, тогда

$$y^2 + by + ca = 0$$

Корни уравнения найдём по теореме, обратной теореме Виета, или по сумме коэффициентов.

$$ax_1 = y_1, ax_2 = y_2$$

$$x_1 = \frac{y_1}{a}, x_2 = \frac{y_2}{a}$$

$$2x^2 - 11x + 15 = 0 \mid \cdot 2,$$

$$2^2 \cdot x^2 - 2 \cdot 11 \cdot x + 2 \cdot 15 = 0,$$

$$2x = y,$$

$$y^2 - 11y + 30 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, имеем:

$$y_1 = 5, y_2 = 6$$

$$2x_1 = 5; 2x_2 = 6$$

$$x_1 = 2\frac{1}{2}, x_2 = 3$$

$$\text{Ответ: } 2\frac{1}{2}; 3.$$



Решите уравнения методом «переброски»

$$2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$3x^2 + x - 4 = 0$$

$$10x^2 - 11x + 3 = 0$$

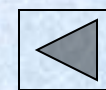
$$5x^2 - 11x + 16 = 0$$

$$3x^2 + 11x + 6 = 0$$

$$2x^2 + x - 10 = 0$$

$$4x^2 + 12x + 5 = 0$$

$$6x^2 + 5x - 6 = 0$$



По сумме коэффициентов квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0, a \neq 0.$$

1. Если $a+b+c=0$,
то $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}$

2. Если $a-b+c=0$,
то $x_1=-1, x_2=-\frac{c}{a}$

Примеры:

$$5x^2-7x+2=0$$

$$3x^2+5x-8=0$$

$$839x^2-448x-391=0$$

$$11x^2+25x-36=0$$

$$\text{Т.к. } 11+25-36=0,$$

$$\text{то } x_1=1, x_2=\frac{-36}{11}$$

$$\text{Ответ: } \frac{-36}{11}; 1.$$

$$5x^2+12x+7=0$$

$$\text{Т.к. } 5-12+7=0$$

$$x_1=-1, x_2=\frac{-7}{5}$$

$$\text{Ответ: } -1; \frac{-7}{5}.$$



Графический

$$ax^2+bx+c=0, a \neq 0$$

$$ax^2=-bx-c$$

$y=ax^2$ - графиком

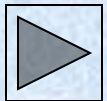
является парабола

$y=-bx-c$ - графиком

является прямая

Возможны следующие случаи:

- Прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;
- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;
- прямая и парабола не имеют общих точек,
- т.е. уравнение не имеет корней.



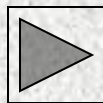
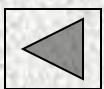
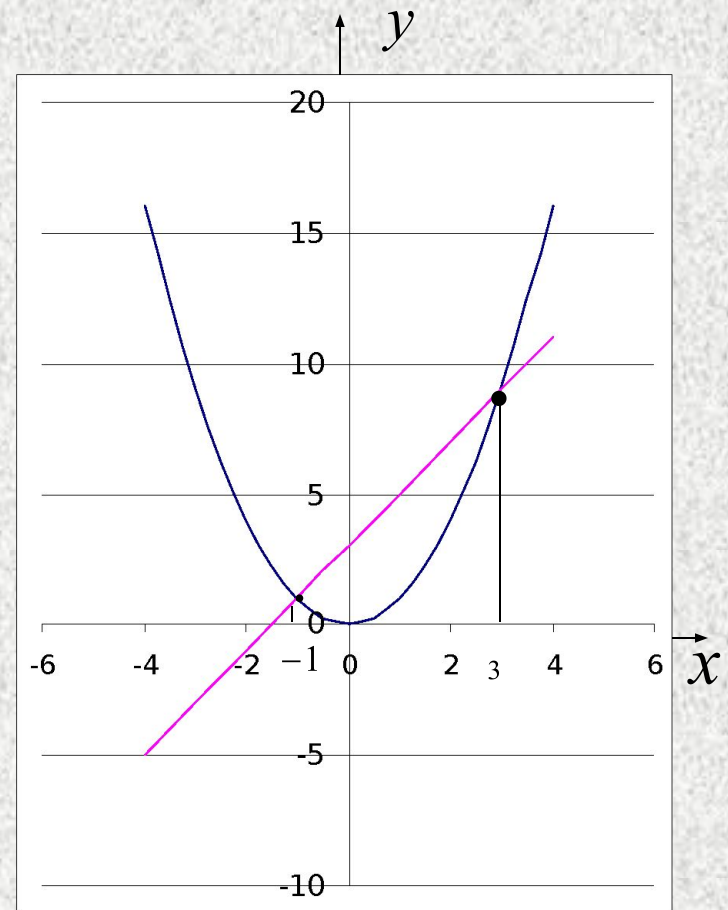
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x^2 = 2x + 3$$

$y = x^2$ - парабола

$y = 2x + 3$ - прямая

Прямая и парабола
имеют две общие
точки.

Ответ: -1; 3.



$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

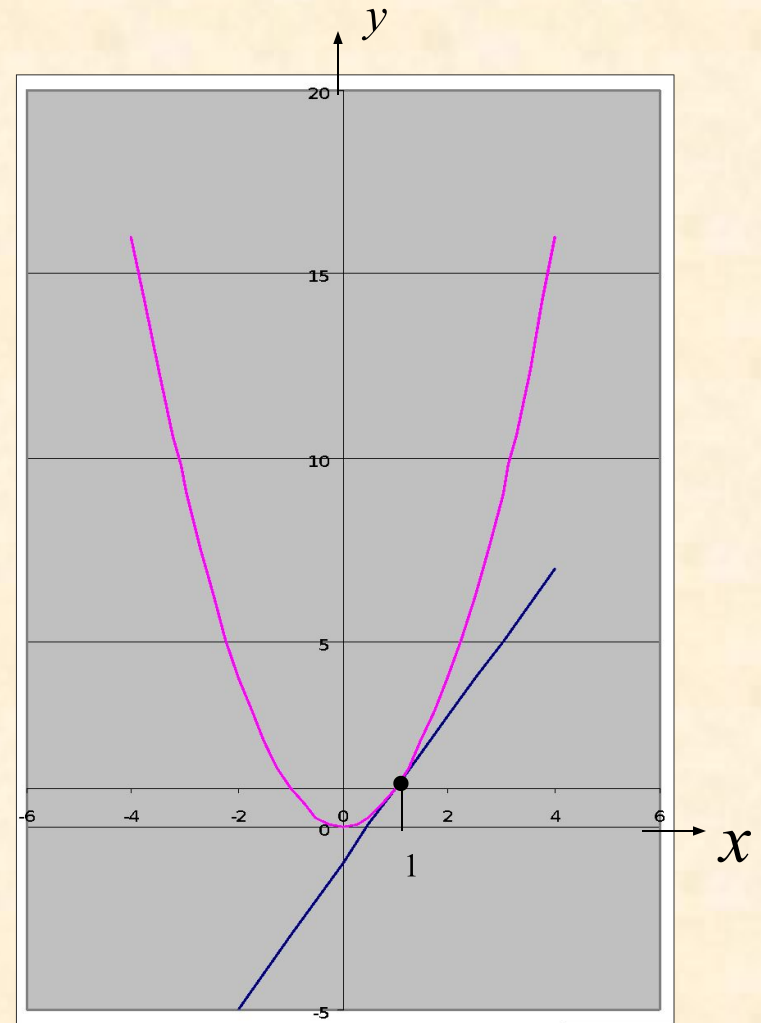
$$x^2 = 2x - 1$$

$y = x^2$ - парабола

$y = 2x - 1$ - прямая

Прямая и парабола
имеют одну общую
точку.

Ответ: 1.



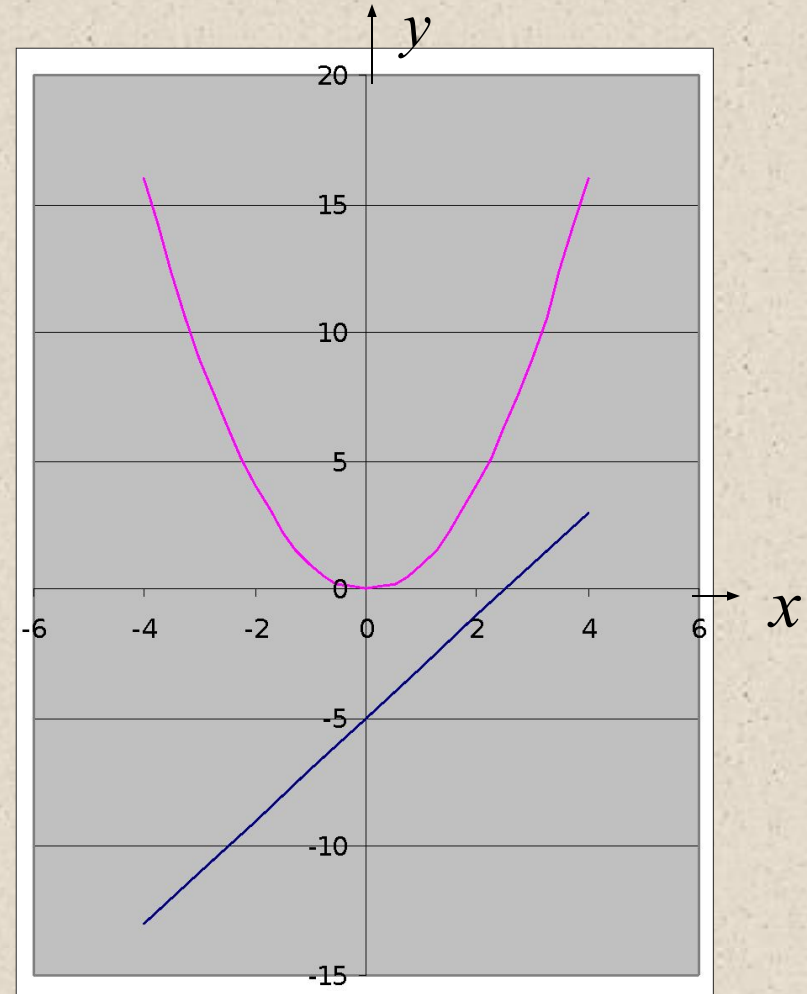
$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x^2 = 2x - 5$$

- $y = x^2$ - *парабола*
- $y = 2x - 5$ - *прямая*

*Прямая и парабола
не имеют общих
точек.*

Ответ: *корней нет.*



Решите графически уравнения

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$4x^2 - 4x - 1 = 0$$

