# Разложение многочлена на множители

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, образуют рациональные функции, т. е. функции, которые можно представить в виде дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P\left(x\right),\ Q\left(x\right)$ – многочлены.

Если степень многочлена в числителе равна или больше степени многочлена в знаменателе, то, выполнив деление, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=W\left(x\right)+\frac{R(x)}{Q(x)}, \qquad (1)$$

где $W\left(x\right)$ – некоторый многочлен, а $R\left(x\right)$ – многочлен степени ниже, чем $Q\left(x\right)$.

В высшей алгебре доказывается, что каждый многочлен может быть представлен в виде произведения

$$Q\left(x\right)=A\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)\ldots\left(x-\gamma\right),$$

где $A$ – коэффициент при старшей степени многочлена $Q\left(x\right)$, а $\alpha,\ \beta,\ \ldots\ ,\ \gamma$ – корни уравнения $Q\left(x\right)=0$.

Множители $\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)\ldots\left(x-\gamma\right)$ называются элементарными множителями.

Если среди них имеются совпадающие, то, группируя, получаем представление

$$Q\left(x\right)=A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\ldots(x-\gamma)^t, \qquad (2)$$

где $r,\ s,\ \ldots\ ,\ t$ – целые числа, которые называются соответственно кратностями корней $\alpha,\ \beta,\ \ldots\ ,\ \gamma$, причем $r+s+\ldots+t=n$, $n$ – степень многочлена $Q\left(x\right)$.

Среди корней представления могут быть и комплексные, причем, если есть комплексный корень $\alpha=a+bi$, то есть и комплексно сопряженный к нему корень $\bar{\alpha}=a-bi$. Т.е. если есть множитель $(x-(a+bi))^r$, то есть и множитель $(x-(a-bi))^r$. Перемножим эти множители

$$(x-(a+bi))^r(x-(a-bi))^r=\left[x^2-x\left(a+bi\right)-x\left(a-bi\right)+\left(a+bi\right)\left(a-bi\right)\right]^r=$$
$$=\left(x^2-2xa+a^2+b^2\right)^r=\left(x^2+2px+q\right)^r,$$

где $p=-a,\ \ q=a^2+b^2,\ \ p^2-q<0$, $p$ и $q$ – вещественные числа.

Поступая аналогично с остальными комплексными корнями, запишем представление в виде

$$Q\left(x\right)=A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\ldots\left(x^2+2px+q\right)^t\left(x^2+2ux+v\right)^m\ldots, \qquad (3)$$

где $\alpha,\ \beta,\ \ldots\ ,\ p,\ q,\ u,\ v,\ \ldots$ – вещественные числа.

# Разложение рациональной дроби на элементарные

В высшей алгебре доказывается теорема

**Теорема.** *Если рациональная функция $\frac{R(x)}{Q(x)}$ имеет степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, а многочлен $Q\left(x\right)$ представлен в виде (3), то эту функцию можно единственным образом представить в виде*

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r}+\ldots\quad\ldots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+2px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+2px+q)^2}+\ldots+\frac{B_tx+C_t}{(x^2+2px+q)^t}+\ldots, \qquad (4)$$

*где* $A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_r,\ \ldots\ B_1,\ C_1,\ B_2,\ C_2,\ \ldots\ B_t,\ C_t,\ \ldots$ *– некоторые вещественные числа.*

Выражение (4) называется *разложением рациональной функции на элементарные дроби.*

Равенство (4) имеет место для всех $x$, не являющихся вещественными корнями многочлена $Q\left(x\right)$.

Чтобы определить числа $A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_r,\ \ldots\ B_1,\ C_1,\ B_2,\ C_2,\ \ldots\ B_t,\ C_t,\ \ldots$, умножим обе части разложения на $Q\left(x\right)$. Поскольку равенство между многочленом и многочленом, который получится в правой части, должно быть справедливо для всех $x$, то коэффициенты, стоящие при равных степенях, должны быть равны между собой. Приравнивая их, получаем систему уравнений первой степени, из которой найдем неизвестные числа $A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_r,\ \ldots\ B_1,\ C_1,\ B_2,\ C_2,\ \ldots\ B_t,\ C_t,\ \ldots$.

Такой метод отыскания коэффициентов разложения рациональной функции называется *методом неопределенных коэффициентов.*

## Пример разложения

**Пример 1.** Разложить на элементарные дроби рациональную дробь $\frac{x}{(x+1)(x-2)^2}$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Для нахождения чисел $A,\ B,\ C$ приравняем числитель полученной дроби числителю исходной дроби и применим метод произвольных значений (подставим произвольные значения $x$ в правую и левую части равенства):

$$x = A(x-2)^2 + B\,(x+1)\,(x-2) + C\,(x+1).$$

При $x = -1$: $\ -1 = 9A \ \Rightarrow \ A = -\frac{1}{9}$.

При $x = 2$: $\ 2 = 3C \ \Rightarrow \ C = \frac{2}{3}$.

При $x = 1$: $\ 1 = A - 2B + 2C \ \Rightarrow \ B = \frac{1}{2}(A + 2C - 1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9} + \frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{9}$.

Итак,

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = -\frac{1}{9(x+1)} + \frac{1}{9(x-2)} + \frac{2}{3(x-2)^2}.$$

# Интегрирование элементарных дробей

Из изложенного следует, что задача интегрирования рациональной функции (1) сводится к интегрированию многочлена $W(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ \ldots \ + a_m$, интеграл от которого является табличным:

$$\int W(x)\,dx = a_0\frac{x^{m+1}}{m+1} + a_1\frac{x^m}{m} + \ \ldots \ + a_m x + C$$

и интегрированию рациональной функции $\frac{R(x)}{Q(x)}$, что приводит к нахождению интегралов следующих четырех типов:

I. $\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\ln|x-\alpha| + C$

II. $\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}dx = A\frac{(x-\alpha)^{-r+1}}{-r+1} + C$

III. $\int \frac{Bx+C}{x^2+2px+q}dx$

IV. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^t}dx$

при этом многочлен $x^2 + 2px + q$ не имеет действительных корней и $p^2 - q < 0$.

Вычислим интеграл III-го типа $\int \frac{Bx+C}{x^2+2px+q}dx$.

Выделим в знаменателе полный квадрат

$$x^2 + 2px + q = (x+p)^2 + q - p^2$$

и введем подстановку $x + p = t$, из которой $x = t - p$ и $dx = dt$. Положим $q - p^2 = h^2 > 0$, получим интеграл

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+2px+q}dx = \int \frac{B(t-p)+C}{t^2+h^2}dt = B\int \frac{t}{t^2+h^2}dt + (C-Bp)\int \frac{dt}{t^2+h^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{dt^2}{t^2+h^2} + (C-Bp)\int \frac{dt}{t^2+h^2} = \frac{B}{2}\ln(t^2+h^2) + \frac{C-Bp}{h}\operatorname{arctg}\frac{t}{h} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln\left((x+p)^2 + h^2\right) + \frac{C-Bp}{h}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{h}.$$

## Интеграл 4-го типа

Для вычисления интеграла IV-го типа сначала введем подстановку $x+p=t$ (как и в интеграле III-го типа), получим интеграл

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^r}dx = \int \frac{B(t-p)+C}{(t^2+h^2)^r}dt,$$

затем вынесем в знаменателе $h^2$ за скобки и введем еще одну переменную $z=\frac{t}{h}$, тогда $t=zh$ и $dt=hdz$, и интеграл примет вид

$$\int \frac{B(t-p)+C}{(t^2+h^2)^r}dt = \frac{1}{h^{2r}}\int \frac{B(zh-p)+C}{(z^2+1)^r}hdz = \frac{B}{h^{2r-2}}\int \frac{zdz}{(z^2+1)^r} + \frac{C-Bp}{h^{2r-1}}\int \frac{dz}{(z^2+1)^r}.$$

Первый интеграл вычисляем, внося $z$ под знак дифференциала и применяя табличный интеграл для степенной функции:

$$\int \frac{zdz}{(z^2+1)^r} = \frac{1}{2(-r+1)}\left(z^2+1\right)^{-r+1}.$$

Рассмотрим метод нахождения первообразной для второго интеграла:

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^r} = \int \frac{(z^2+1-z^2)dz}{(z^2+1)^r} = \int \frac{dz}{(z^2+1)^{r-1}} - \int \frac{z^2dz}{(z^2+1)^r}.$$

Обозначим $I_r = \int \frac{dz}{(z^2+1)^r}$, тогда

$$I_r = I_{r-1} - \int \frac{z^2dz}{(z^2+1)^r} = I_{r-1} - \frac{1}{2}\int \frac{zd(z^2+1)}{(z^2+1)^r} = I_{r-1} - \frac{1}{2}\int zd\frac{1}{(-r+1)(z^2+1)^{r-1}} =$$

Применим формулу интегрирования по частям

$$= I_{r-1} + \frac{1}{2(r-1)}\int \underbrace{z}_{u}\, \underbrace{d\frac{1}{(z^2+1)^{r-1}}}_{v} = I_{r-1} + \frac{1}{2(r-1)}\left(\frac{z}{(z^2+1)^{r-1}} - \int \frac{dz}{(z^2+1)^{r-1}}\right) =$$

$$= I_{r-1}\left(1-\frac{1}{2(r-1)}\right) + \frac{z}{2(r-1)(z^2+1)^{r-1}}.$$

Получили рекуррентную формулу для вычисления интеграла $I_r = \int \frac{dz}{(z^2+1)^r}$:

$$I_r = I_{r-1}\left(1-\frac{1}{2(r-1)}\right) + \frac{z}{2(r-1)(z^2+1)^{r-1}}.$$

## Пример применения рекуррентной формулы

Применяя рекуррентную формулу $I_r = I_{r-1}\left(1 - \frac{1}{2(r-1)}\right) + \frac{z}{2(r-1)(z^2+1)^{r-1}}$, вычислим интеграл $I_2$.

$$I_2 = \int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \underbrace{\int \frac{dz}{z^2+1}}_{I_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2(2-1)}\right) + \frac{z}{2(2-1)(z^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + \frac{z}{2(z^2+1)} + C.$$

Теперь можно найти и $I_3$:

$$I_3 = \int \frac{dz}{(z^2+1)^3} = \underbrace{\int \frac{dz}{(z^2+1)^2}}_{I_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2(3-1)}\right) + \frac{z}{2(3-1)(z^2+1)^2} =$$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + \frac{z}{2(z^2+1)}\right) + \frac{z}{6(z^2+1)^2} + C.$$

# Примеры нахождения первообразных

**Пример 2.** Вычислить интеграл $\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2} dx$.

Р е ш е н и е. Уравнение $x^2-2x+5=0$ не имеет действительных корней, так как дискриминант $D=4-20=-16<0$.

Преобразуем подынтегральное выражение, выделив полный квадрат в знаменателе

$$\frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2} = \frac{5x+3}{\left((x-1)^2-1+5\right)^2} = \frac{5x+3}{\left((x-1)^2+4\right)^2} = \frac{5x+3}{16\left(\frac{(x-1)^2}{4}+1\right)^2}$$

Введем новую переменную $z=\frac{x-1}{2}$, тогда $x=2z+1$, $dx=2dz$, и интеграл примет вид

$$\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2} dx = \int \frac{5(2z+1)+3}{16\left(z^2+1\right)^2} 2dz = \frac{5}{4} \int \frac{zdz}{\left(z^2+1\right)^2} + \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2},$$

при этом

$$\int \frac{zdz}{\left(z^2+1\right)^2} = -\frac{1}{2\left(z^2+1\right)} \text{ и } \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2} = I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + \frac{z}{2\left(z^2+1\right)}.$$

Таким образом

$$\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2} dx = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2\left(z^2+1\right)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + \frac{z}{2\left(z^2+1\right)} + C = \frac{4z-5}{8\left(z^2+1\right)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + C.$$

Вернемся к исходной переменной $z=\frac{x-1}{2}$ (при этом $z^2+1=\frac{x^2-2x+5}{4}$):

$$\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2} dx = \frac{2x-7}{2\left(x^2-2x+5\right)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

**Пример 3.** Вычислить интеграл $\int \frac{6-x}{x(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

---

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью (степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе), разложим ее на элементарные дроби:

$$\frac{6-x}{x(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+F}{x^2+1}.$$

Приведем дроби правой части к общему знаменателю:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+F}{x^2+1} =$$
$$= \frac{A(x+1)^2(x^2+1)+B(x+1)x(x^2+1)+Cx(x^2+1)+(Dx+F)x(x+1)^2}{x(x+1)^2(x^2+1)}$$

Числитель полученной дроби равен числителю исходной дроби:

$$6 - x = A(x+1)^2\left(x^2+1\right) + B(x+1)\,x\left(x^2+1\right) + Cx\left(x^2+1\right) + (Dx+F)\,x(x+1)^2.$$

Для нахождения чисел $A, B, C, D, E, F$ приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в правой и левой частях уравнения:

$$\begin{aligned} x^4: &\quad A + D = 0 \\ x^3: &\quad 2A + B + C + 2D + F = 0 \\ x^2: &\quad 2A + B + D + 2F = 0 \\ x: &\quad 2A + B + C + F = -1 \\ x^0: &\quad A + B = 6 \end{aligned}$$

Вычтем из второго уравнения четвертое: $2D = 1 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{2}$, из первого уравнения получим $A = -\frac{1}{2}$, из последнего $B = \frac{13}{2}$.

Из третьего: $2A + B + D + 2F = -1 + \frac{13}{2} + \frac{1}{2} + 2F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -3.$

Из четвертого: $2A + B + C + F = -1 + \frac{13}{2} + C - 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{7}{2}$

Итак:

$$\frac{6-x}{x(x+1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{13}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-6}{x^2+1}.$$

Интегрируя каждое слагаемое, находим интеграл

$$\int \frac{6-x}{x(x+1)^2(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{13}{2}\ln|x+1| + \frac{7}{2(x+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\,\mathrm{arctg}\,x + C$$

Укажите вид представления рациональной дроби по методу неопределенных коэффициентов $\frac{2x^5+3x^3+3}{(x+1)(x-1)(x^2+2)}$

- $2x + A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x^2+2}$
- $2 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$
- $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$
- $2x + A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$

Укажите вид представления рациональной дроби по методу неопределенных коэффициентов

$$\frac{x^5+11x^4-12x}{(x-3)(x^2-2x+5)}$$

- ○ $x^2 + Ax + B + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x^2-2x+5}$
- ◉ $x^2 + Ax + B + \frac{C}{x-3} + \frac{Dx+E}{x^2-2x+5}$
- ○ $x + A + \frac{B}{x-3} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+5}$
- ○ $\frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$

Выберите верное представление рациональной дроби по методу неопределенных коэффициентов $\frac{3x^2-3x-2}{(x+1)^2(x-3)}$.

- ( ) $-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-3}$
- (•) $\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-3}$
- ( ) $-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x-3}$
- ( ) $\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x-3}$

Выберите верное представление рациональной дроби по методу неопределенных коэффициентов $\frac{3x^2-3x+4}{(x-2)(x^2+1)}$

- $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x^2+1}$
- $\frac{2}{x-2}+\frac{x-1}{x^2+1}$
- $-\frac{2}{x-2}-\frac{x-1}{x^2+1}$
- $\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x^2+1}$