

Разложение многочленов на множители

7 класс

Что такое разложение многочлена на множители и зачем оно нужно

$$(3x - 5)(x + 4) = 3x^2 + 12x - 5x - 20 = 3x^2 + 7x - 20$$

$$(3x - 5)(x + 4) = 3x^2 + 7x - 20$$

или

$$3x^2 + 7x - 20 = (3x - 5)(x + 4)$$

Обычно в таких случаях говорят, что многочлен удалось *разложить на множители*.

Что такое разложение многочлена на множители и зачем оно нужно

Решить уравнение:

$$3x^2 + 7x - 20 = 0$$

$$(3x - 5)(x + 4) = 0$$

Если *произведение* двух множителей *равно нулю*, то один из множителей *равен нулю*:

$$3x - 5 = 0$$

или

$$x + 4 = 0$$

$$3x = 5$$

$$x = -4$$

$$x = 5/3$$

Ответ: -4; 5/3.

Что такое разложение многочлена на множители и зачем оно нужно

$$\frac{53^2 - 47^2}{61^2 - 39^2} = \frac{(53 - 47)(53 + 47)}{(61 - 39)(61 + 39)} = \frac{6 \cdot 100}{22 \cdot 100} = \frac{3}{11}$$

Из материалов ЕГЭ по математике:

$$\begin{aligned} \frac{(977^2 - 113^2)}{1090} &= \frac{(977 - 113)(977 + 113)}{1090} = \\ &= \frac{864 \cdot 1090}{1090} = 864 \end{aligned}$$

Вынесение общего множителя за скобки

Вынести за скобки общий множитель:

$$3x + 12y = 3(x + 4y)$$

$$a^5 - a^3 = a^3(a^2 - 1)$$

$$5x^4 + 10x^2 = 5x^2(x^2 + 2)$$

$$9m^4 + 6m^2 - 15m^3 = 3m^2(3m^2 + 2 - 5m)$$

$$16a^4c^5 - 12a^2c^4 = 4a^2c^4(4a^2c - 3)$$

Вынесение общего множителя за скобки

*Алгоритм отыскания общего множителя
нескольких одночленов:*

- 1. Найти наибольший общий делитель коэффициентов всех одночленов, входящих в многочлен, – он и будет общим числовым множителем (разумеется, это относится только к случаю целочисленных коэффициентов).*
- 2. Найти переменные, которые входят в каждый член многочлена, и выбрать для каждой из них наименьший (из имеющихся) показатель степени.*
- 3. Произведение коэффициента, найденного на первом шаге, и степеней, найденных на втором шаге, является общим множителем, который целесообразно вынести за скобки.*

Вынесение общего множителя за скобки

***Замечание.** В ряде случаев полезно выносить за скобку в качестве общего множителя и дробный коэффициент.*

Вынести за скобки общий множитель:

$$5,6x + 1,4y = 1,4(4x + y)$$

$$0,65a^5 - 0,13a^3 = 0,13a^3(5a^2 - 1)$$

$$\frac{4}{9}a - \frac{2}{9}b + \frac{11}{9}c = \frac{1}{9}(4a - 2b + 11c)$$

Вынесение общего множителя за скобки

Разложить на множители:

$$-x^4y^3 - 2x^3y^2 + 5x^2 = -x^2(x^2y^3 + 2xy^2 - 5)$$

$$5a^4 - 10a^3 + 15a^5 = 5a^3(a - 2 + 3a^2)$$

$$\begin{aligned} 2x(x-2) + 5(x-2)^2 &= 2x(x-2) + 5(x-2)(x-2) = \\ &= (x-2)(2x + 5(x-2)) = (x-2)(2x + 5x - 10) = \\ &= (x-2)(7x - 10) \end{aligned}$$

Способ группировки

Разложить на множители многочлен:

$$\begin{aligned}2a^2 + 6a + ab + 3b &= (2a^2 + 6a) + (ab + 3b) = \\ &= 2a(a + 3) + b(a + 3) = (a + 3)(2a + b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}xy - 6 + 3x - 2y &= (xy + 3x) + (-6 - 2y) = \\ &= x(y + 3) - 2(3 + y) = (y + 3)(x - 2)\end{aligned}$$

Способ группировки

Разложить на множители многочлен:

$$ab^2 - 2ab + 3a + 2b^2 - 4b + 6 =$$

$$= (ab^2 - 2ab + 3a) + (2b^2 - 4b + 6) =$$

$$= a(b^2 - 2b + 3) + 2(b^2 - 2b + 3) =$$

$$= (b^2 - 2b + 3)(a + 2)$$

Способ группировки

Разложить на множители многочлен:

$$x^2 - 7x + 12 = \quad x^2 - 3x - 4x + 12 =$$

$$= (x^2 - 3x) + (-4x + 12) = \quad x \underline{(x - 3)} - 4 \underline{(x - 3)} =$$

$$= \underline{(x - 3)}(x - 4)$$

Способ группировки

Решить уравнение:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

$$x - 3 = 0$$

или

$$x - 4 = 0$$

$$x = 3$$

$$x = 4$$

Ответ: 3; 4.

Способ группировки

Решить уравнение:

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 3x - 6 &= (x^3 - 2x^2) + (3x - 6) = \\ &= x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 3) \end{aligned}$$

$$(x - 2)(x^2 + 3) = 0$$

$$x - 2 = 0$$

или

$$x^2 + 3 = 0$$

$$x = 2$$

нет решений

Ответ: 2.

Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращённого умножения

Формулы сокращенного умножения:

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ – квадрат суммы

2. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ – квадрат разности

3. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – разность квадратов

4. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов

5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов

6. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ – куб суммы

7. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$ – куб разности

Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращённого умножения

Разложить на множители:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$36x^2 - 64 = (6x)^2 - 8^2 = (6x - 8)(6x + 8)$$

$$\begin{aligned} & (3x - 2)^2 - 49 = (3x - 2)^2 - 7^2 = \\ & = ((3x - 2) - 7)((3x - 2) + 7) = (3x - 9)(3x + 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 81a^8 - 625c^4 = (9a^4)^2 - (25c^2)^2 = \\ & = (9a^4 - 25c^2)(9a^4 + 25c^2) = ((3a^2)^2 - (5c)^2)(9a^4 + 25c^2) = \\ & = (3a^2 - 5c)(3a^2 + 5c)(9a^4 + 25c^2) \end{aligned}$$

Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращённого умножения

Разложить на множители:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$27x^3 - 64 = (3x)^3 - 4^3 = (3x - 4)(9x^2 + 12x + 16)$$

$$\begin{aligned} 216n^3 + m^6 &= (6n)^3 + (m^2)^3 = \\ &= (6n + m^2)(36n^2 - 6m^2n + m^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{12} - c^6 &= (a^4)^3 - (c^2)^3 = (a^4 - c^2)(a^8 + a^4c^2 + c^4) = \\ &= ((a^2)^2 - c^2)(a^8 + a^4c^2 + c^4) = \\ &= (a^2 - c)(a^2 + c)(a^8 + a^4c^2 + c^4) \end{aligned}$$

Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращённого умножения

Разложить на множители:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$25x^2 - 20x + 4 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 2 + 2^2 = (5x - 2)^2$$

$$\begin{aligned} n^4 + 4mn^2 + 4m^2 &= (n^2)^2 + 2n^2 \cdot 2m + (2m)^2 = \\ &= (n^2 + 2m)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16a^8 - 8a^4c^3 + c^6 &= (4a^4)^2 - 2 \cdot 4a^4 \cdot c^3 + (c^3)^2 = \\ &= (4a^4 - c^3)^2 \end{aligned}$$