# Разнообразные подходы к решению текстовых задач

# Цель **методической разработки:**

систематизация различных подходов к изучению раздела математики по решению текстовых задач, используемых на уроках математики в 5-6 классах, алгебры в 7-11 классах.

# Задачи:

- Проведение теоретического анализа различных подходов к решению задач в современной науке.
- Обобщение различных приемов решения текстовых задач.
- Обобщение методики решения  задач на движение, работу, проценты, смеси, сплавы и т.д.
- Определение сложностей, которые испытывают учащиеся при решении текстовых задач, и пути их решения.

# Основные цели решения текстовых задач в школьном курсе математики:

- научить переводить реальные предметные ситуации в различные математические модели,
- обеспечить действенное усвоение учащимися основных методов и приемов решения учебных математических задач.

# Текстовые задачи в различных учебниках алгебры 9 класса

| | Текстовые задачи | На работу | Движение по окружности | Смеси, сплавы | Раздел «Для внекл. работы» |
|---|---|---|---|---|---|
| Ю.Н.Макарычев | 65 | 15 | - | - | |
| Ш.А.Алимов | 55 | 7 | - | 2 | 20 |
| А.Г.Мордкович | 73 | 14 | 1 | 3 | |

# Этапы решения текстовых задач:

- Анализ содержания задачи.
- Поиск пути решения задачи и составление плана ее решения.
- Осуществление плана решения задачи.
- Проверка решения задачи.

# Приемы, используемые на этапе «Анализ задачи»

- **представление той жизненной ситуации, которая описана в задаче.** Цель такого воспроизведения — выявление основных количественных и качественных характеристик ситуации, представленной в задаче.
- **постановка специальных вопросов и поиск ответов на них** — включает следующий «стандартный» набор вопросов, ответы на которые позволяют детально разобраться в содержании задачи: О чем говорится в задаче? Что известно в задаче? Что требуется найти в задаче? Что в задаче неизвестно? и др.
- **переформулировка текста задачи** — состоит в замене данного в задаче описания некоторой ситуации другим описанием, сохраняющим все отношения, связи, но более явно их выражающим. При необходимости строится вспомогательная модель задачи: краткая запись условия, таблица, рисунок, чертеж и т.п.
- **моделирование ситуации, описанной в задаче, с помощью реальных предметов, предметных моделей или графических моделей.**

# Приемы, используемые на этапе «Поиск пути решения задачи и составление плана ее решения».

- **анализ задачи по тексту** или **по ее вспомогательной модели**;
- от вопроса задачи к данным (**аналитический путь**) или от данных к вопросу (**синтетический путь**);
- **комбинированный** (анализ и синтез), анализ часто производят «про себя»;
- **разбиение задачи на смысловые части**;
- **введение подходящих обозначений** в том случае, когда данные (или искомые) в задаче не обозначены.

Задача 1. **Ваня, Петя и Сережа пошли на рыбалку и поймали вместе 51 рыбку. Ваня поймал рыбок в 2 раза больше, чем Петя, а Сережа на 3 рыбки больше, чем Петя. Сколько рыбок поймал каждый мальчик?**

Ваня - ?, в 2 раза больше

Петя - ? р.

Сережа - ?, на 3 р. больше

51р.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Ваня* | 2 | 4 | 6 | 8 | 20 | 22 | | 24 |
| *Петя* | 1 | 2 | 3 | 4 | 10 | 11 | | 12 |
| *Сережа* | 4 | 5 | 6 | 7 | 13 | 14 | | 15 |
| *Всего* | 7 | 11 | 15 | 19 | 43 | 47 | *Должно быть 51* | 51 |

# Пусть

| | |
|---|---|
| *Ваня* | $2x$ рыбок |
| *Петя* | $x$ рыбок |
| *Сережа* | $(x + 3)$ рыбок |
| *Всего* | *51* рыбка |

$x + 2x + x + 3 = 51.$

$x = 12.$

Следовательно,

Петя поймал 12 рыбок,

Ваня 24 рыбки,

Сережа 15 рыбок.

# Алгоритм

- Обозначим неизвестную величину через *x*.
- Выразим через нее другие величины.
- Найдем зависимость между ними и на основании ее составим уравнение.
- Решим уравнение.
- Найдем ответ на вопрос задачи.
- Проверим правильность решения задачи.
- Запишем ответ.

$$\text{Чтобы}\left\{\begin{array}{l} A = N \cdot t \\ N = A : t \\ t = A : N \end{array}\right\}\text{Если}$$

$$\text{Чтобы}\left\{\begin{array}{l} S = a \cdot b \\ a = S : b \\ b = S : a \end{array}\right\}\text{Если}$$

$$\text{Чтобы}\left\{\begin{array}{l} s = v \cdot t \\ v = s : t \\ t = s : v \end{array}\right\}\text{Если,}$$

б – м = ***на***,
б – ***на*** = м,
м + ***на*** = б,

м · ***в*** = б,
б : ***в*** = м,
б : м = ***в***,

б – большая величина,
м – меньшая величина,
***на*** – на сколько больше или меньше,
***в*** – во сколько раз больше или меньше.

Задача 2. ***Пристани А и В расположены на реке, причем В – на 80 км ниже по течению, чем А. Катер прошел путь из А в В и обратно за 8 ч 20 мин. За какое время катер прошел расстояние от А до В и расстояние от В до А, если известно, что скорость в стоячей воде равна 20 км/ч?***

Р е ш е н и е.

**Первый этап.**

***Составление математической модели.***

Пусть *x* км/ч – скорость течения реки.

Получим уравнение

$$\frac{80}{20+x} + \frac{80}{20-x} = \frac{25}{3}.$$

| | $v$ (км/ч) | $t = s : v$ (ч) | | $s$ (км) |
|---|---|---|---|---|
| По течению | 20+x | $\frac{80}{20+x}$ | 8ч20мин | 80 |
| Против течения | 20-x | $\frac{80}{20-x}$ | | 80 |

**Второй этап.** ***Работа с составленной моделью.***

Решив уравнение, находим $x = 4$.

**Третий этап.** ***Ответ на вопрос задачи.***

$\frac{80}{24} = 3\frac{1}{3}$ ч, $\frac{80}{16} = 5$ ч.

Задача 3. ***Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за 12 ч. Если бы сначала первый рабочий сделал половину этой работы, а затем другой остальную часть, то вся работа была бы выполнена за 25 ч. За какое время мог бы выполнить эту работу каждый рабочий в отдельности?***

| | $N=A:t$ | $t$ (ч) | $A$ |
|---|---|---|---|
| I | $\frac{1}{x}$ | $x$ | 1 |
| II | $\frac{1}{y}$ | $y$ | 1 |

**Р е ш е н и е.**

**Первый этап**. ***Составление математической модели.***

Примем всю работу за 1.

Производительность труда I рабочего $\frac{1}{x}$, а II - $\frac{1}{y}$. За 12 ч, работая отдельно, I рабочий выполнит $\frac{1}{x}\cdot 12$ всей работы, а II рабочий - $\frac{1}{y}\cdot 12$ всей работы, т.е. $\frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1$

$\frac{x}{2}$ ч – время, которое потребуется I рабочему, чтобы сделать половину работы, $\frac{y}{2}$ ч – время, которое потребуется II рабочему, чтобы сделать половину работы, тогда $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25$.

**Второй этап.** ***Работа с составленной моделью.*** Решив систему

$$\begin{cases}\frac{12}{x}+\frac{12}{y}=1,\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25;\end{cases}$$

находим решение: $x = 20$, $y = 30$ .

**Третий этап.** ***Ответ на вопрос задачи.*** 20 ч и 30 ч.

Задача 4. ***Сплав меди и цинка содержал 82 % меди. После добавления в сплав 18 кг цинка процентное содержание меди в сплаве понизилось до 70%. Сколько меди и сколько цинка было первоначально?***

**Р е ш е н и е.**

**Первый этап**. ***Составление математической модели.***

Пусть первоначальная масса сплава $x$ кг.

| Старый сплав | |
|---|---|
| медь | цинк |
| 82% | |
| $0{,}82x$ кг | |

$x$ кг

+

| цинк |
|---|
| 18кг |

=

| Новый сплав | |
|---|---|
| медь | цинк |
| 70% | |
| $0{,}7(x+18)$ кг | |

$(x+18)$ кг

Расчет ведем по меди, масса меди в сплаве остается неизменной. Получим уравнение $0{,}82x = 0{,}7(x+18)$. Корень уравнения $x = 105$.

Тогда меди в первоначальном сплаве 86,1 кг, цинка – 18,9 кг.

# Сложности при решении текстовых задач

составление математической модели

составление уравнений и неравенств, связывающих данные величины и переменные, которые вводят учащиеся

нахождение соответствия между различными величинами, применительно к которым формулируется вопрос задачи

решение уравнений, системы уравнений или неравенств

# Сложности при решении текстовых задач и пути их решения.

1. Составление математической модели

непонимание физических, химических, экономических терминов, законов, зависимости

непонимание связи между расстоянием, скоростью и временем при равномерном движении или между работой, производительностью труда и временем и т.п.

затруднения в определении скорости сближения объектов при движении навстречу, в одном направлении или при движении по окружности

Тщательно изучить и правильно истолковать содержание задачи, выразив искомые величины через известные величины и введенные переменные.

Не зацикливаться на периодичности маршрута
при движении по окружности, а мыслить только в категориях *время, путь, скорость*.

# Сложности при решении текстовых задач и пути их решения.

**2. Составление уравнений и неравенств, связывающих данные величины и переменные, которые вводят учащиеся**

**неправильный выбор величин, относительно которых составляется уравнение**

**усложнение процесса составления уравнения из-за неправильного выбора величин**

**Важно правильно выбрать величины, относительно которых будет составлено уравнение.**

**Неправильный выбор делает процесс составления уравнения более сложным.**

# Сложности при решении текстовых задач и пути их решения.

**3. Нахождение соответствия между различными величинами, применительно к которым формулируется вопрос задачи**

**невозможность нахождения значения переменных, которые в уравнениях присутствуют и не являются необходимыми**

**большое количество неизвестных, нахождение значения которых не являются необходимыми**

**Держать в поле зрения основную цель, не боясь вводить столько вспомогательных переменных, сколько их понадобится по ходу решения.**
**Совсем необязательно ставить в качестве непременного условия сведение числа неизвестных к минимуму.**

# Сложности при решении текстовых задач и пути их решения.

4. Решение уравнений, системы уравнений или неравенств

**невозможность решения уравнения, неравенства или их системы**

**решение уравнения, неравенства или их системы нерациональным способом**

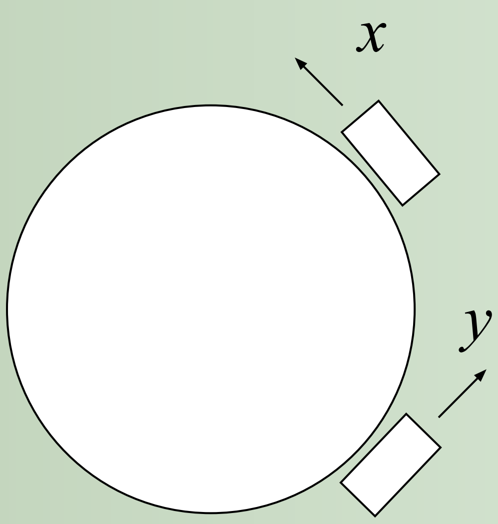
**Решение полученной системы уравнений или неравенств желательно наиболее рациональным методом.**

***Задача:** **Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, встречаются через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то встречались бы через каждые 8 мин. Если при движении в противоположных направлениях в некоторый момент времени расстояние по окружности между телами равно 40 м, то через каждые 24 с оно будет 26 м (в течение этих 24 с тела не встретятся).***

***Найдите скорости тел и длину окружности.***

**Задача:** ***Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, встречаются через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то встречались бы через каждые 8 мин. Если при движении в противоположных направлениях в некоторый момент времени расстояние по окружности между телами равно 40 м, то через каждые 24 с оно будет 26 м ( в течении этих 24 с тела не встретятся).***

***Найдите скорости тел и длину окружности.***




## Решение:

Пусть $l$ м – длина окружности,

$x$ м/мин - скорость первого тела,
а $y$ м/мин – скорость второго тела ($x > y$).

В задаче речь идет о трех ситуациях, каждую из которых можно описать уравнением.

При движении в одном направлении первое тело догоняет второе со скоростью

$(x - y)$ м/мин.

После одного из обгонов следующий обгон имеет место через столько минут, сколько понадобиться, чтобы преодолеть $l$ метров со скоростью $(x - y)$ м/мин, т.е. через 56 мин:

$$\frac{l}{x - y} = 56 \qquad (1)$$

При движении в разных направлениях тела сближаются со скоростью ($x + y$) м/мин, причем $l$ м они вместе проходят за 8 мин

$$\frac{l}{x + y} = 8 \qquad (2)$$

Если первоначальное расстояние было равно 40м, осталось пройти до встречи 26 м, то общий путь составляет

40м – 26м = 14м.

Он был преодолен со скоростью ($x + y$) м/мин за 24 с, т.е. за $\frac{24}{60}$ мин, что равно $\frac{2}{5}$ мин.

Следовательно последняя часть условия приводит к

уравнению $$\frac{14}{x+y} = \frac{2}{5} \qquad (3)$$

Разделив уравнение (2) на (1), получим

$\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{1}{7}$, отсюда $y = \dfrac{3}{4}x$.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ \dfrac{14}{x+y} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 20$$

Следовательно, $y = 15$, а из уравнения (2) $l = 280$.

Ответ: 280 м, 20 м/мин, 15 м/мин.

# Выводы:

- Для того, чтобы научиться решать задачи, надо приобрести опыт их решения путем многократного повторения операций, действий, составляющих предмет изучения.
- Редкие ученики самостоятельно приобретают такой опыт. Долг учителя - помочь учащимся приобрести опыт решения задач, научить их решать задачи.
- Помощь учителя не должна быть чрезмерной, но и не быть слишком малой.
- Навыки решения текстовых задач формируются на основе осмысленных знаний и умений.
- Для формирования навыков нужна тщательно продуманная система упражнений и задач «от простого к сложному».
- Знания учащихся по математике должны совершенствоваться с решением каждой новой задачи.
- Следует добиваться, чтобы осознанные умения и навыки ученики получали при наименьших затратах времени.
- Следует учитывать индивидуальные особенности и возможности учащихся.

Колесникова Е.В.
МОУ «СОШ № 20 г.Чебоксары»