

# Разные задачи повышенного уровня сложности на многогранники, цилиндры, косинус и шар.

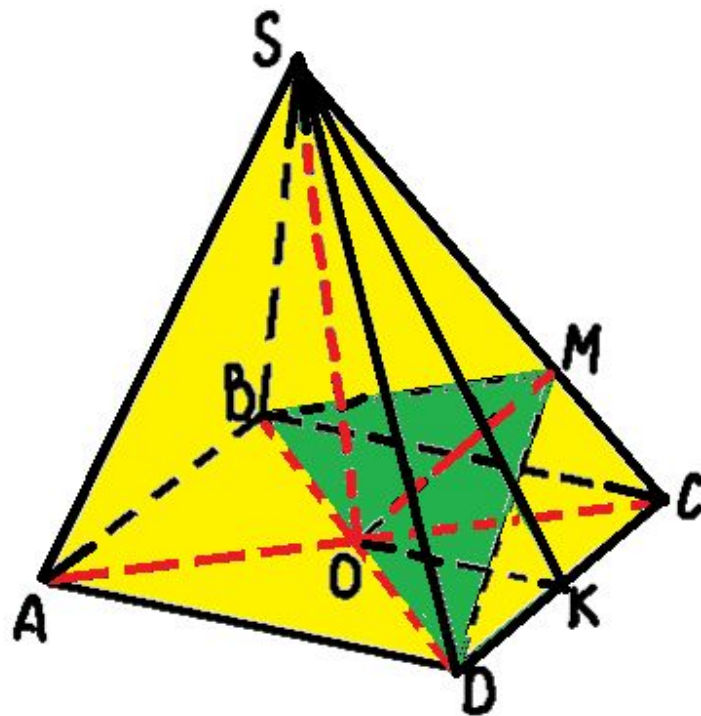
**Выполнил:**

ученик 10 «Б» класса  
МБОУ лицей №3 г. Воронежа  
Козловский Никита.

**Руководитель:**

Орлова О.В.  
учитель высшей категории,  
учитель математики  
МОУ СОШ с углубленным изучением  
отдельных предметов  
№78 городского округа город Воронеж

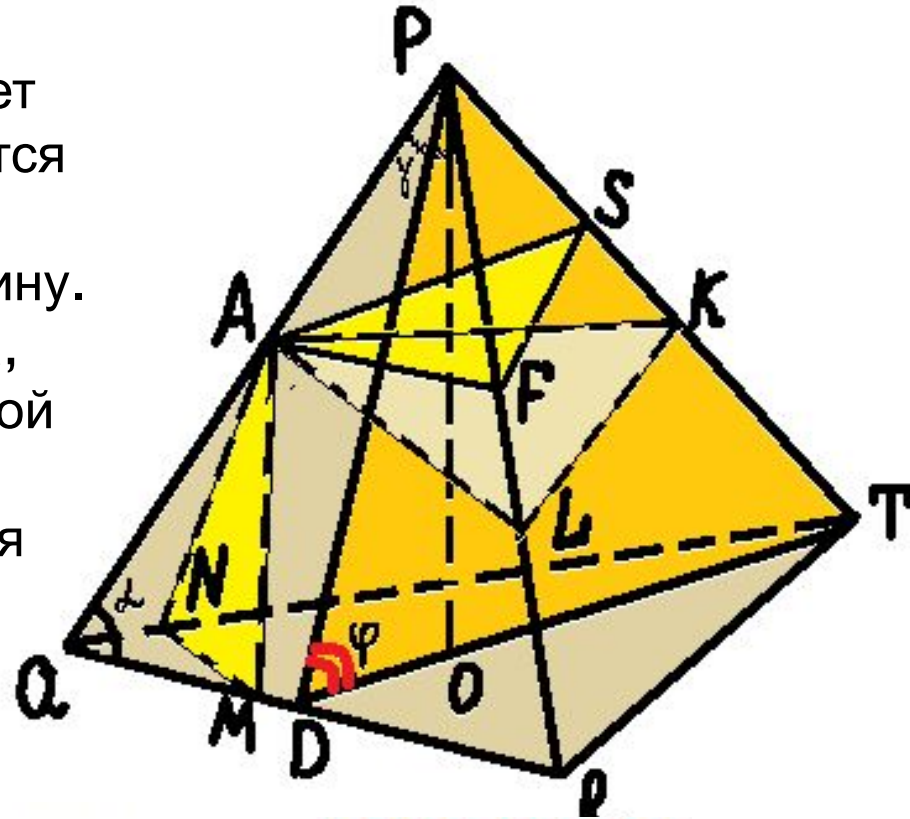
Величина двугранного угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равна  $\alpha$ . Определить величину двугранного угла между боковой гранью и основанием пирамиды. Для каких  $\alpha$  задача имеет решение?



Ответ:

$$\beta = \arccos \sqrt{-\cos \alpha}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Плоскость, проходящая через точку  $A$  бокового ребра  $PQ$  правильной треугольной пирамиды  $PQRT$  и параллельная ребру  $TR$ , пересекает пирамиду так, что сечением является треугольник, все внутренние углы которого имеют одинаковую величину. Найти площадь этого треугольника, если известно, что апофема боковой грани равна  $k$ , боковая грань  $PTR$  составляет с плоскостью основания угол  $\varphi$  и  $AQ = 0,75AP$ .



**Ответ:** 1) при

$$0 < \varphi \leq \arccos \frac{1}{5}$$

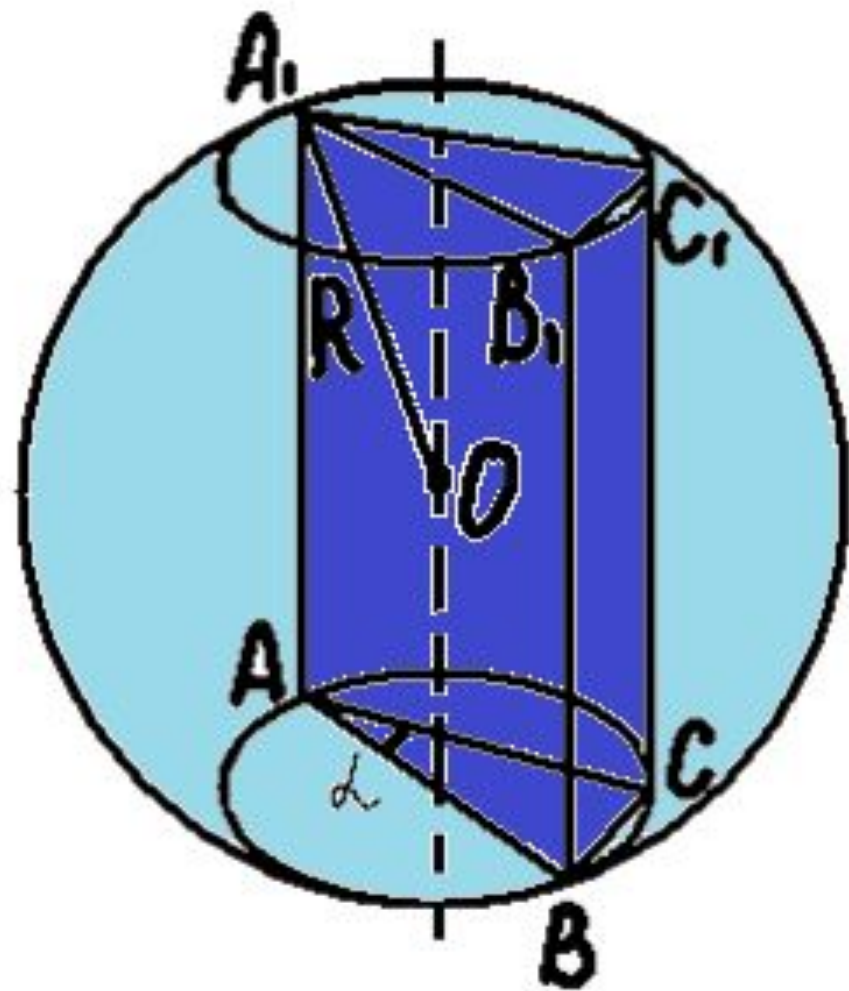
$$S_1 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2 \cos^2 \varphi \quad S_2 = \frac{3\sqrt{3}k^2(1 + 3\cos^2 \varphi)^2}{784\cos^2 \varphi}$$

2) при

$$\arccos \frac{1}{5} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$S_1 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2 \cos^2 \varphi, S_2 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2 \cos^2 \varphi \frac{(1 + 3\cos^2 \varphi)^2}{(1 - 9\cos^2 \varphi)^2} \leq a$$

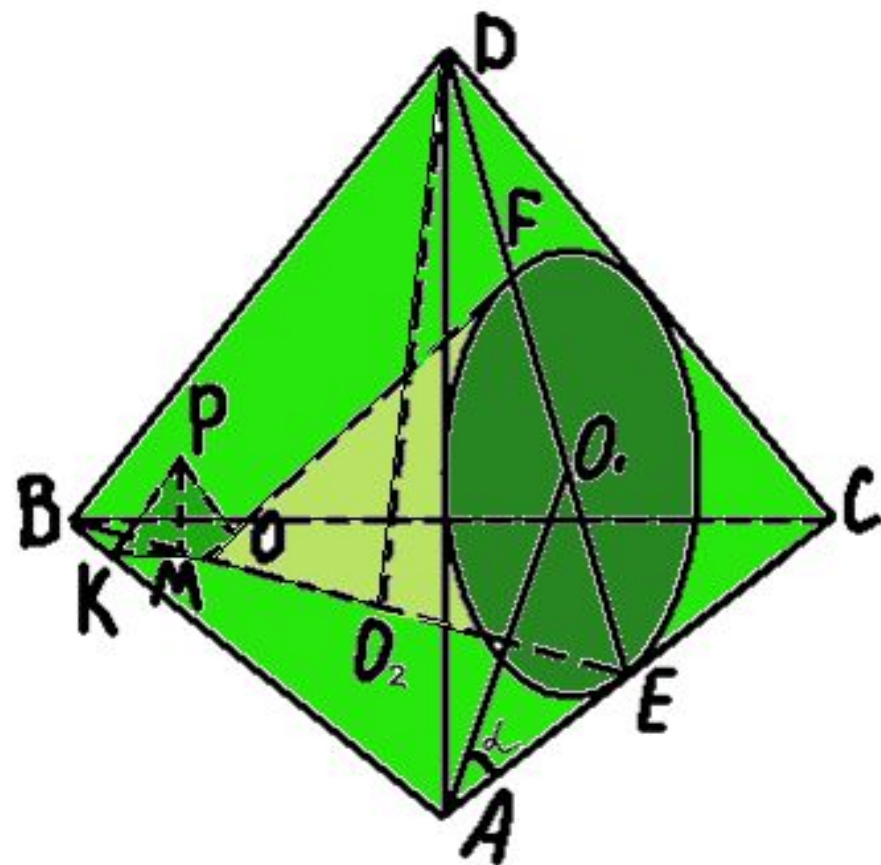
В сферу, радиус которой равен  $R$ , вписана прямая призма, основание которой – прямоугольный треугольник с острым углом  $\alpha$ , а наибольшая ее боковая грань – квадрат. Определите объем призмы.



Ответ:

$$V = \frac{R^3 \sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha$$

В правильной треугольной пирамиде  $ABCD$  сторона основания  $ABC$  равна  $a$ . Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник  $ACD$ , а вершиной конуса является точка  $O$ , лежащая на высоте  $BE$  треугольника  $ABC$  так, что  $BE:OB = 3$ . Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой  $B$ .



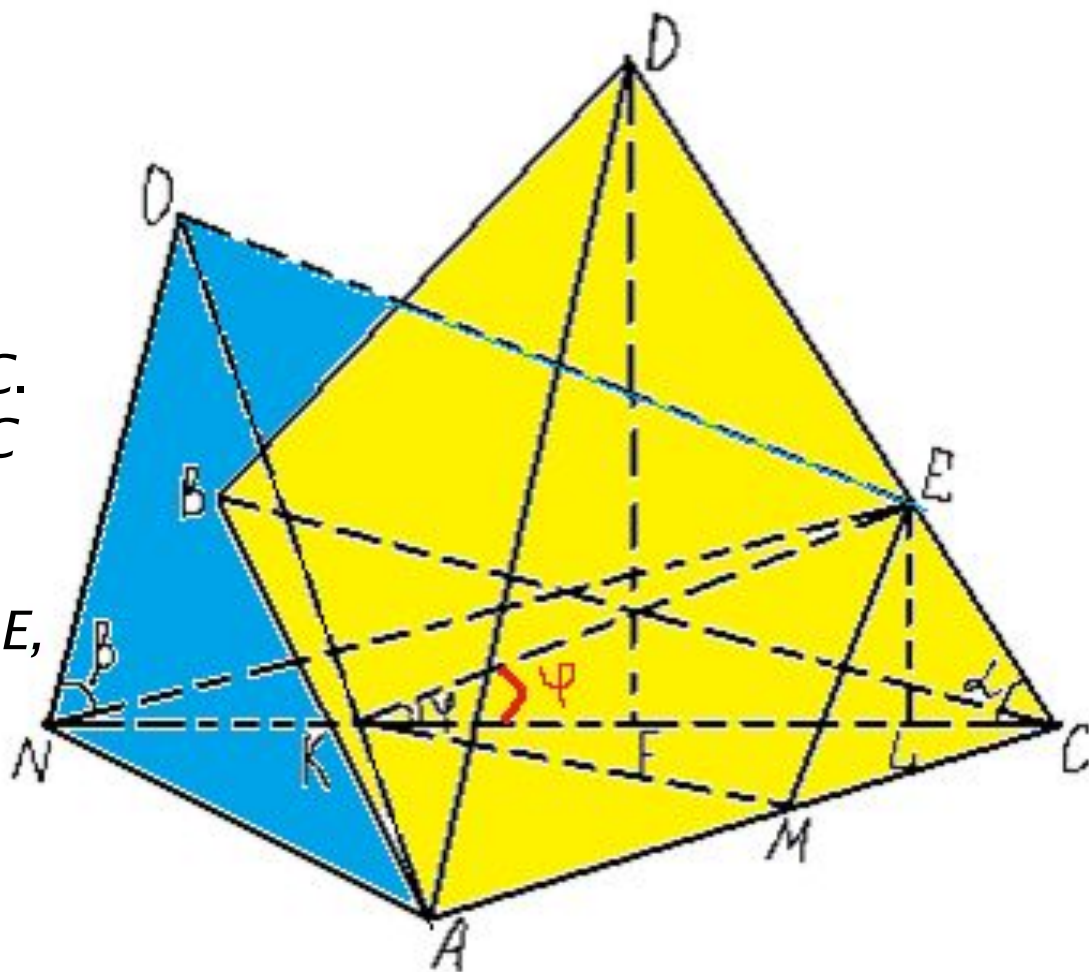
Ответ:

$$r = \frac{a}{4},$$

$$R = \frac{a\sqrt{13}(8 - 3\sqrt{3})}{74\sqrt{3}}$$

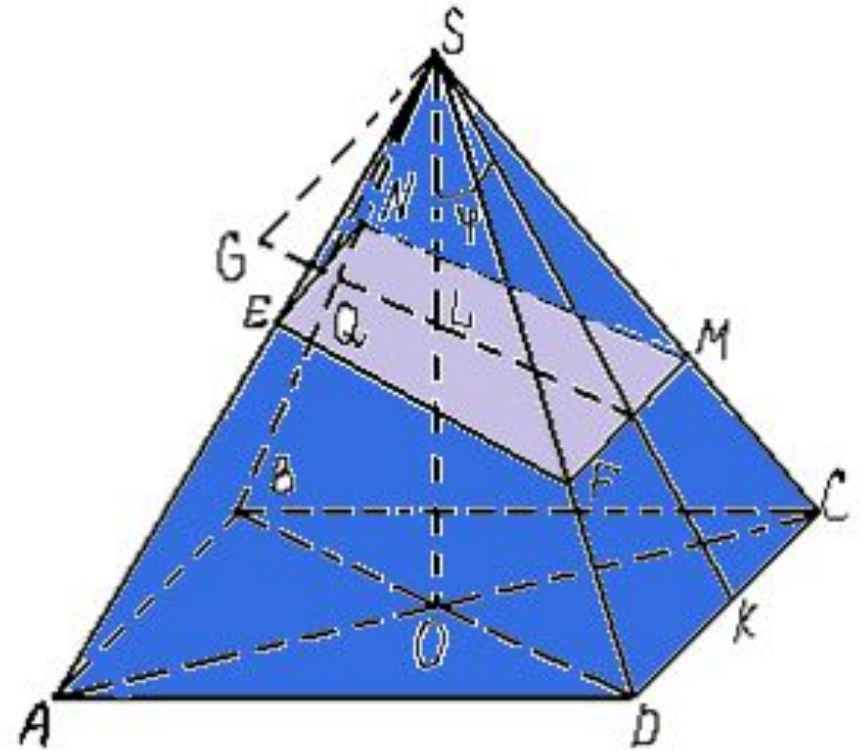


Ребро правильного тетраэдра  $ABCD$  равно  $a$ , точка  $K$  – середина ребра  $AB$ , точка  $E$  лежит на ребре  $CD$  и  $EC:ED = 1:2$ , точка  $F$  – центр грани  $ABC$ . Найти угол между прямыми  $KC$  и  $KE$ , расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки  $A, B, E, F$ .



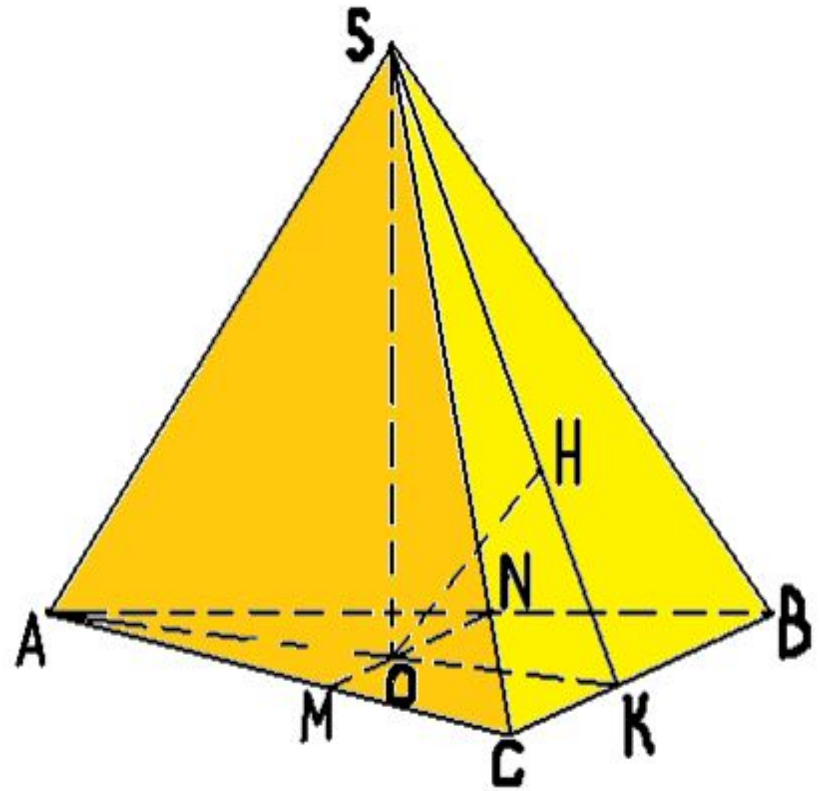
Ответ:  $\arccos \frac{7}{2\sqrt{19}}; a\sqrt{\frac{2}{3}}; a\sqrt{\frac{11}{6}}$

Сторона основания  $ABCD$  правильной пирамиды  $SABCD$  равна  $2$ , высота пирамиды, опущенная на основание, равна  $\frac{1}{2}$ . На ребрах  $SA$  и  $SD$  расположены точки  $E$  и  $F$  так, что  $AE = 2ES$ ,  $SF = 5DF$ . Через точки  $E$  и  $F$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная  $CD$ . Найти площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью  $\alpha$ ; радиус сферы с центром в точке  $A$ , касающейся плоскости  $\alpha$ ; угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ABC$ .



Ответ:  $\frac{77}{36}$ ;  $\frac{40\sqrt{2}}{33}$ ;  
 $\arccos \frac{7}{11}$ .

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  ребро основания боковое ребро  $M$  - середина ребра  $AC$ . Найти: а) расстояние от точки  $M$  до плоскости  $SBC$ ; наибольшее возможное значение угла между прямой  $SM$  и плоскостью  $SBC$ .

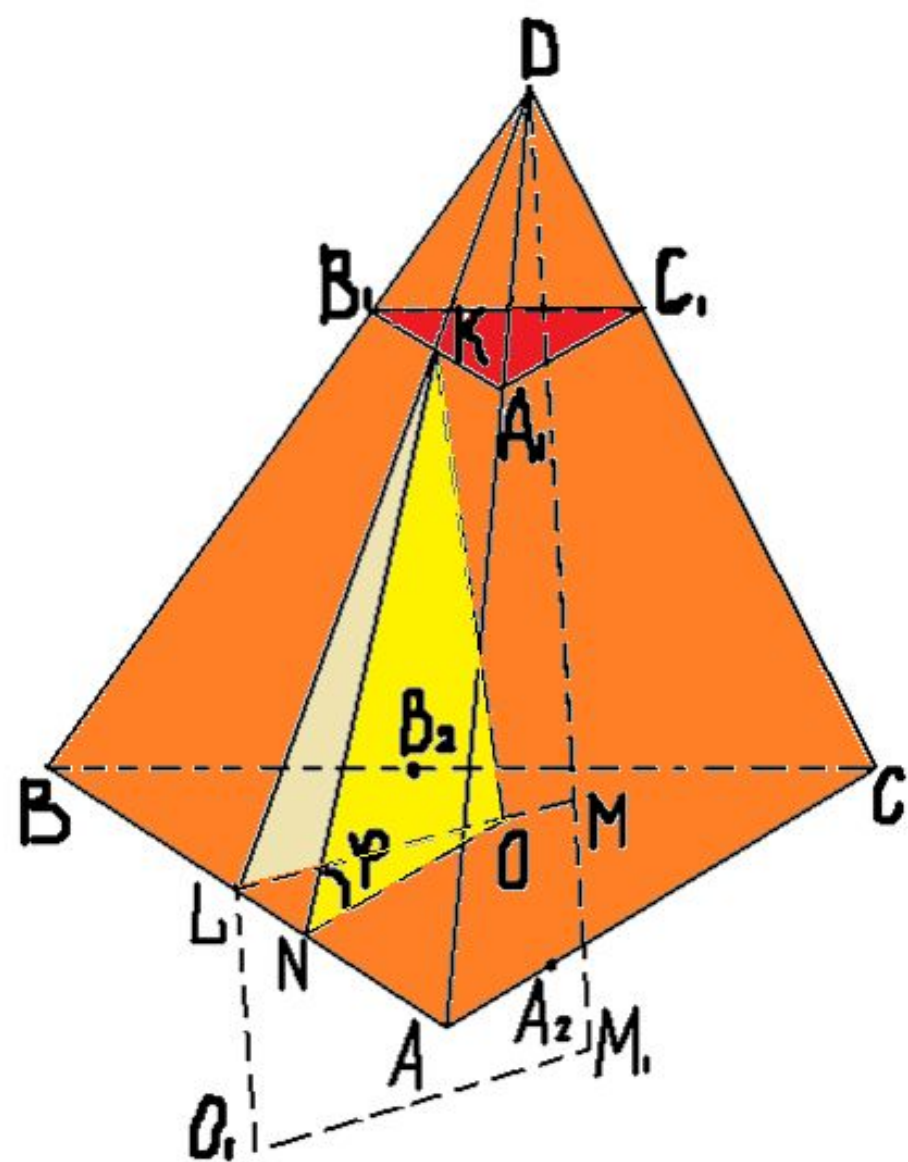


Ответ:

$$p = \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}; \varphi_{\max} = \arcsin \frac{3}{4}.$$



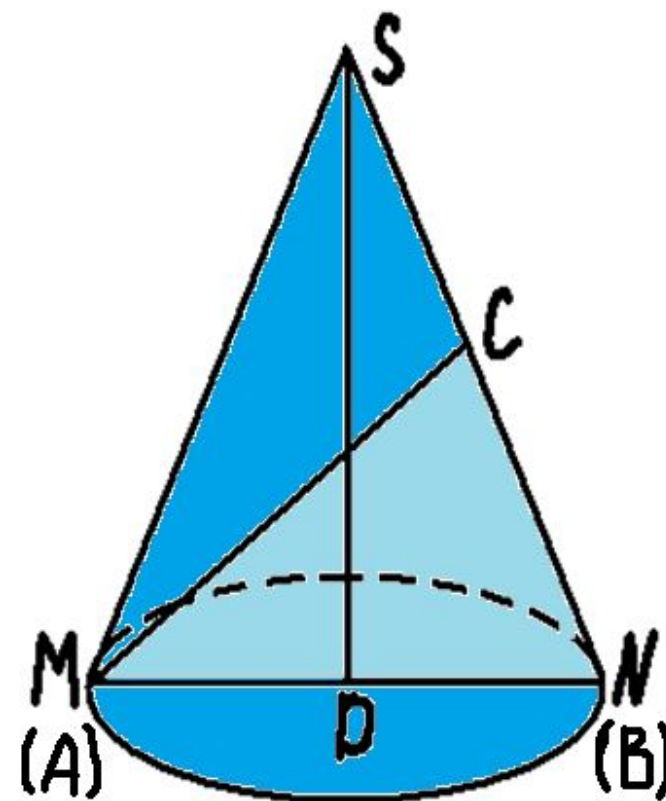
Даны пирамида  $ABCD$  и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань  $ABC$ . Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$ , а ее центр лежит на грани  $ABD$ . Радиус цилиндра равен  $3$  объем пирамиды  $ABCD$  равен  $337$ , ребро  $AD = 4$ . Найти двугранный угол между гранями  $ABC$  и  $ABD$  и радиус описанной около  $ABCD$  сферы.



$$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{2}}{4}; R = \sqrt{\frac{337}{2}}$$

Ответ:

Через вершину  $S$  прямого кругового конуса проведена плоскость, пересекающая окружность основания конуса в точках  $A$  и  $B$ . Медианы  $AC$  и  $SB$  треугольника  $ASB$  имеют длину  $m_1$  и  $m_2$  соответственно. Определить величину угла при вершине  $S$  в осевом сечении конуса, если известно, что площадь  $\triangle ASB$  имеет наибольшее возможное значение.

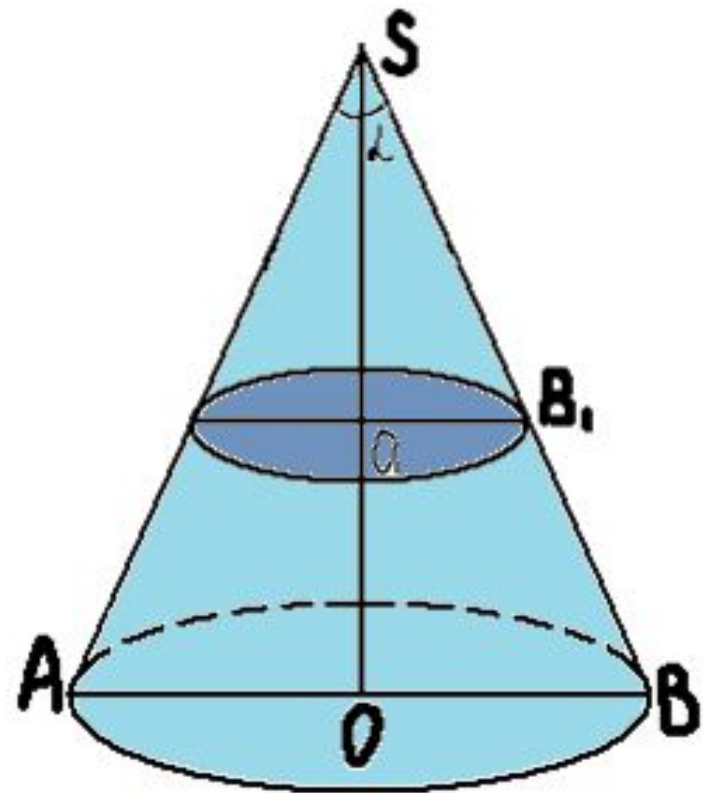


Ответ:

$$\frac{1}{2} < \frac{m_1}{m_2} < \sqrt{\frac{5}{2}}, \alpha = 2 \arctg \frac{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}{3m_2};$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad \alpha \in \left[ \frac{\pi}{2}; \pi \right]$$

В прямой круговой конус вписана правильная шестиугольная призма так, что, нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания лежат на боковой поверхности конуса. Известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение. Найдите объем призмы, если известно, что длина образующей конуса равна  $l$ , а угол при вершине осевого сечения конуса равен  $\alpha$ .



Ответ: при

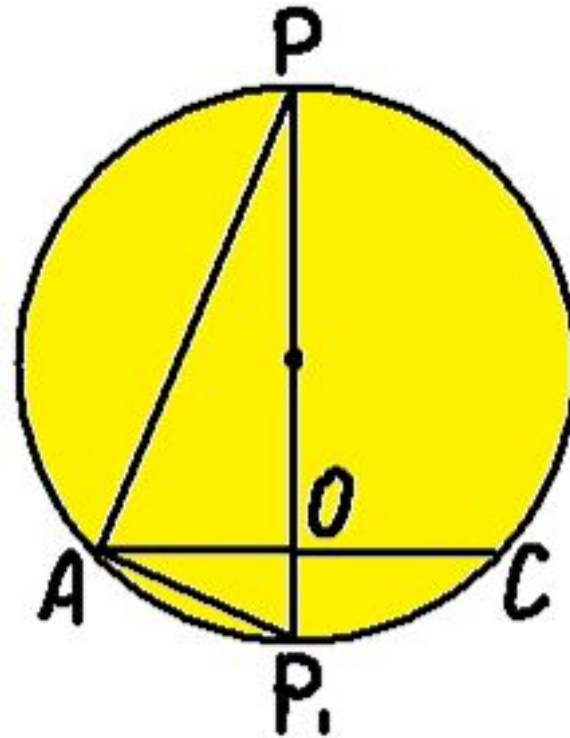
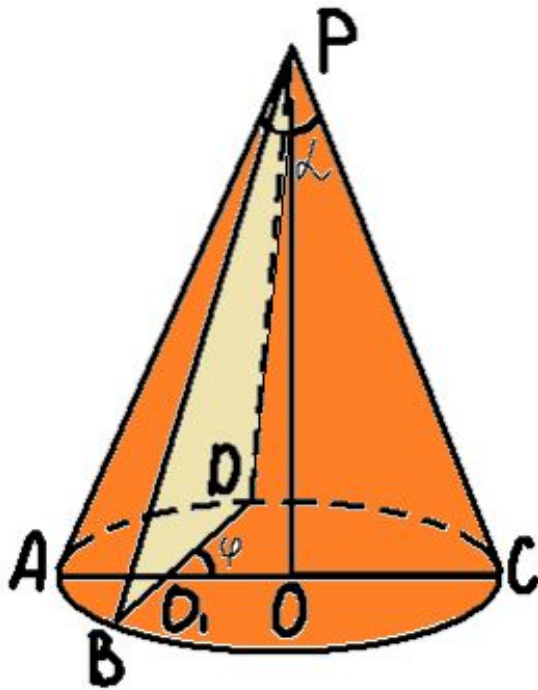
$$0 < \alpha < 60^\circ \Rightarrow 2l \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{l^3 \cos \frac{\alpha}{2}}{(2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3})^3} \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \right)$$

при

$$60^\circ \leq \alpha < \pi \Rightarrow V \in \emptyset$$

Радиус сферы, описанной около прямого кругового конуса с вершиной  $P$ , равен  $R$ . Прямая, проведенная в плоскости основания конуса, пересекает диаметр  $AC$  окружности основания под углом  $\varphi$ , а окружность – в точках  $B$  и  $D$ . Определить объем пирамиды  $PABCD$ , если известно, что угол в осевом сечении конуса при вершине  $P$  равен  $\alpha$ , а треугольники  $APC$  и  $DPB$  равновелики.



$$S_{\Delta ACP} = \frac{1}{2} l^2 \sin \alpha = S_1, \quad S_{\Delta BPD} = \frac{1}{2} l^2 \sin \gamma = S_2$$

a)  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$   $S_1 =$   $V_{PABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$   
 $S_2$

$h = OP$  – высота

конуса

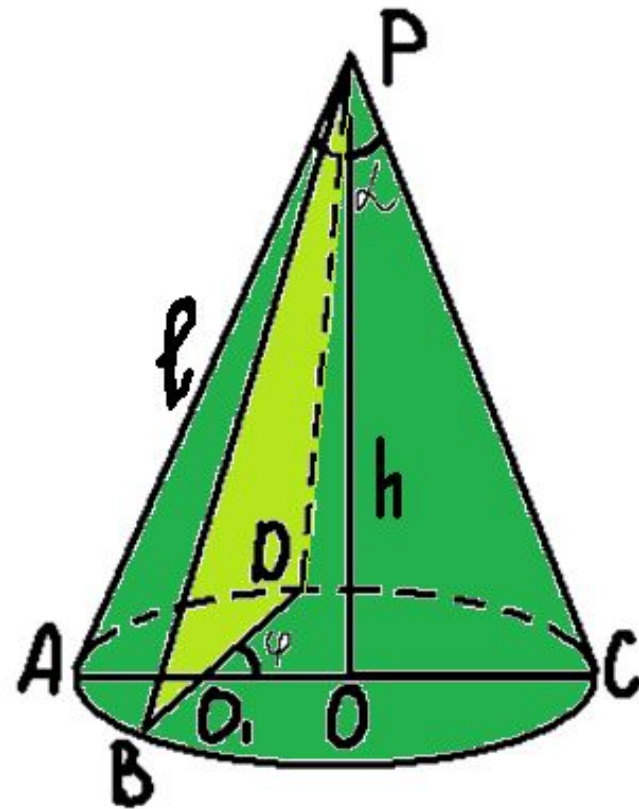
Обозначим  $AB = CD = a$  и  $AD = BC =$

$b$  – радиус основания, тогда

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \varphi,$$

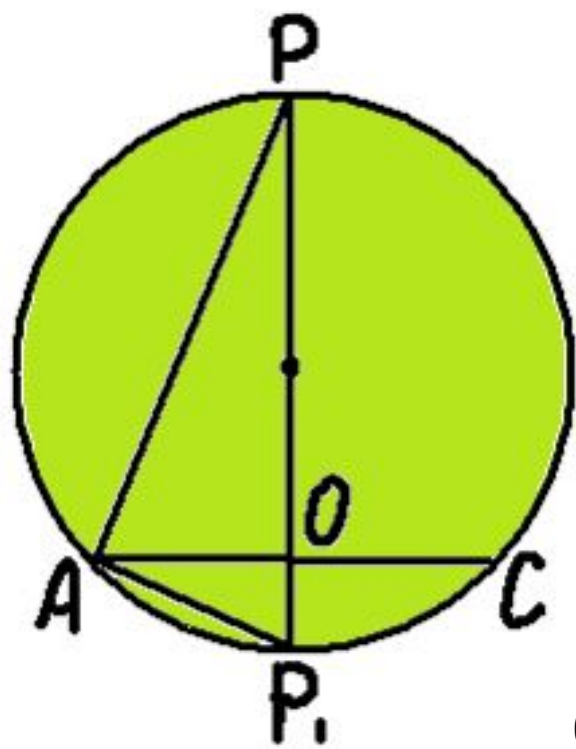
$$b^2 = 2r^2 + 2r^2 \cos \varphi,$$

$$S_{\text{осн}} = ab = \sqrt{4r^4 - 4r^4 \cos^2 \varphi} = 2r^2 \sin \varphi.$$





$$\angle APP_1 =$$



$OP = h_1$ ,  $OP_1 = h_2$ ,  $OA = r$  - радиус основания конуса

$$\angle APP_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{h_1}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}; \quad \frac{h_2}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}}; \quad h_1 + h_2 = 2R$$

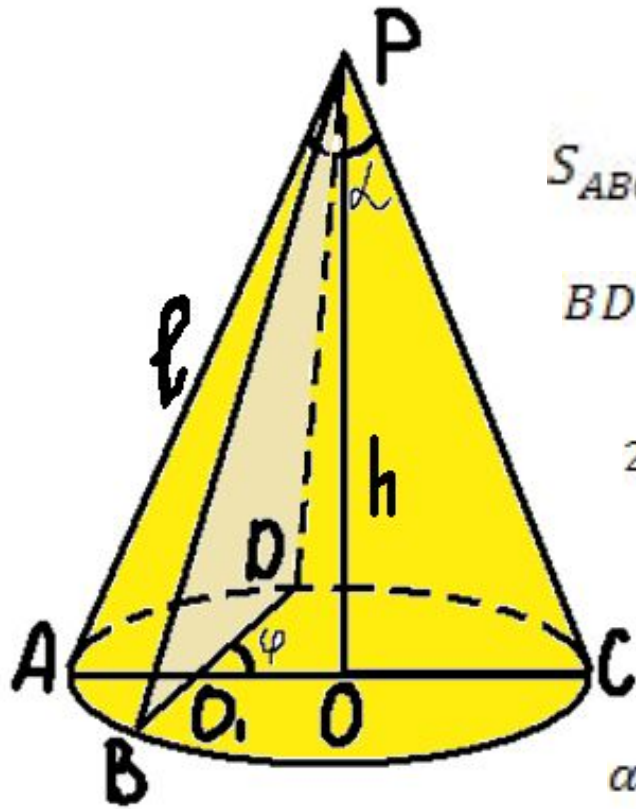
$$r = R \sin \alpha \quad h_1 = R(1 + \cos \alpha)$$

$$V = \frac{2}{3} R^3 \sin^2 \alpha \sin \varphi (1 + \cos \alpha)$$

б)  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad V = \frac{2}{3} R^3 \sin^2 \alpha \sin \varphi (1 + \cos \alpha)$

$\gamma = 180^\circ - \alpha$  т.е. в этом случае

$$h = h_1 = R(1 + \cos \alpha) \quad r = R \sin \alpha$$



$$S_{ABCD} = BD * AC * \sin\varphi * \frac{1}{2} = R\sin\varphi * BD\sin\alpha$$

$$BD^2 = 2l^2 + 2l^2\cos\alpha \quad (2r)^2 = 2l^2 - 2l^2\cos\alpha$$

$$2l^2 = \frac{2r^2}{1 - \cos\alpha} \quad BD^2 = 2R(1 + \cos\alpha)$$

$$V = \frac{2}{3} R^3 \sin\varphi \sin\alpha (1 + \cos\alpha)^2$$

$$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow V = \frac{2}{3} R^3 \sin^2\alpha \sin\varphi (1 + \cos\alpha)$$

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow V = \frac{2}{3} R^3 \sin^2\alpha \sin\varphi (1 + \cos\alpha)$$

$$V = \frac{2}{3} R^3 \sin\varphi \sin\alpha (1 + \cos\alpha)^2$$