

Разные задачи повышенного уровня сложности на многогранники, цилиндры, косинус и шар.

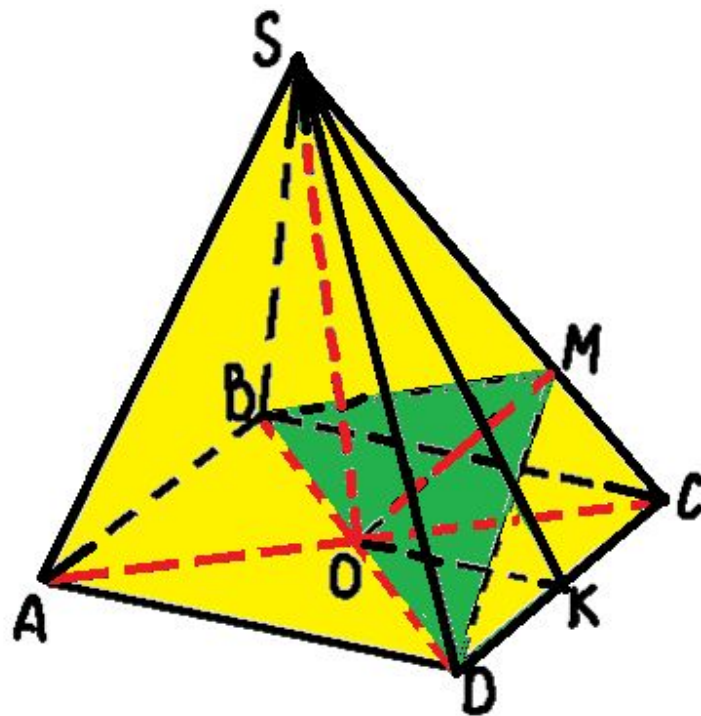
Выполнил:

ученик 10 «Б» класса
МБОУ лицей №3 г. Воронежа
Козловский Никита.

Руководитель:

Орлова О.В.
учитель высшей категории,
учитель математики
МОУ СОШ с углубленным изучением
отдельных предметов
№78 городского округа город Воронеж

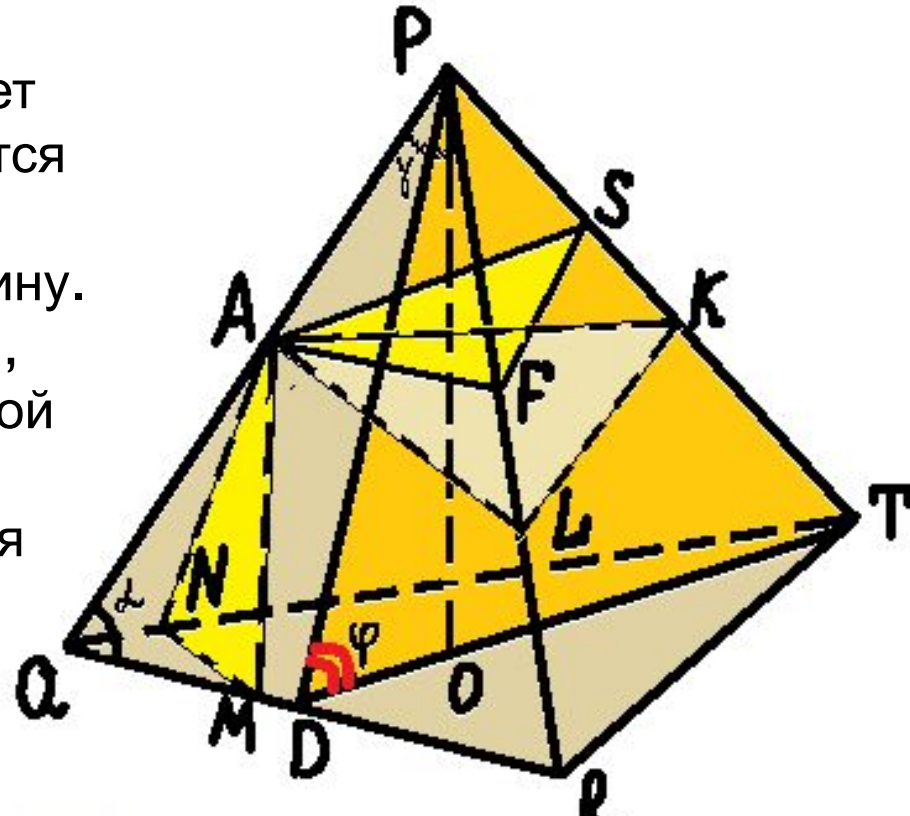
Величина двугранного угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равна α . Определить величину двугранного угла между боковой гранью и основанием пирамиды. Для каких α задача имеет решение?



Ответ:

$$\beta = \arccos \sqrt{-\cos \alpha}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Плоскость, проходящая через точку A бокового ребра PQ правильной треугольной пирамиды $PQRT$ и параллельная ребру TR , пересекает пирамиду так, что сечением является треугольник, все внутренние углы которого имеют одинаковую величину. Найти площадь этого треугольника, если известно, что апофема боковой грани равна k , боковая грань PTR составляет с плоскостью основания угол φ и $AQ = 0,75AP$.



Ответ: 1) при

$$0 < \varphi \leq \arccos \frac{1}{5}$$

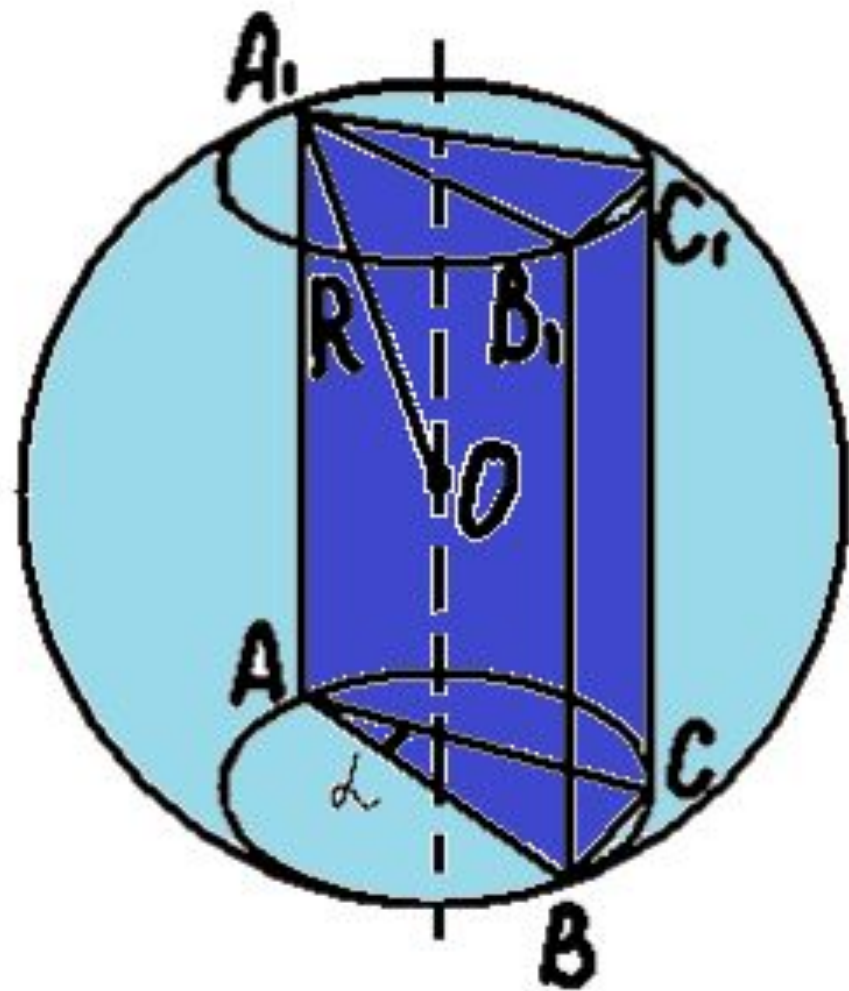
$$S_1 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2 \cos^2 \varphi \quad S_2 = \frac{3\sqrt{3}k^2(1 + 3\cos^2 \varphi)^2}{784\cos^2 \varphi}$$

2) при

$$\arccos \frac{1}{5} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$S_1 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2 \cos^2 \varphi, S_2 = \frac{48\sqrt{3}}{49} * k^2 \cos^2 \varphi \frac{(1 + 3\cos^2 \varphi)^2}{(1 - 9\cos^2 \varphi)^2} \leq a$$

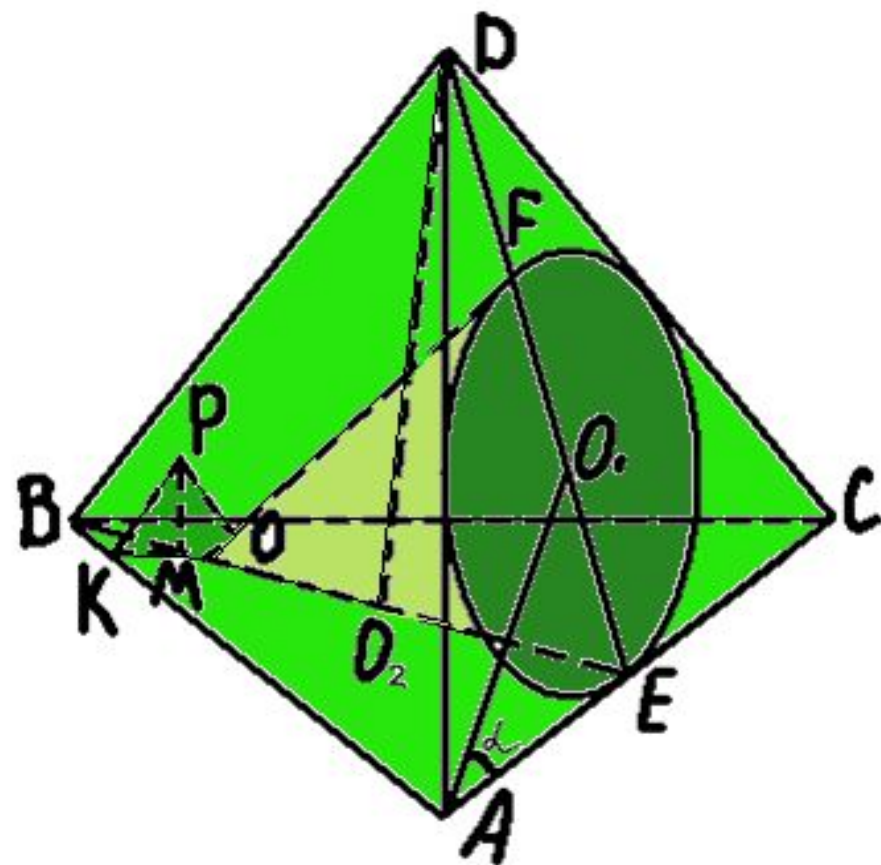
В сферу, радиус которой равен R , вписана прямая призма, основание которой – прямоугольный треугольник с острым углом α , а наибольшая ее боковая грань – квадрат. Определите объем призмы.



Ответ:

$$V = \frac{R^3 \sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha$$

В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a . Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD , а вершиной конуса является точка O , лежащая на высоте BE треугольника ABC так, что $BE:OB = 3$. Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой B .

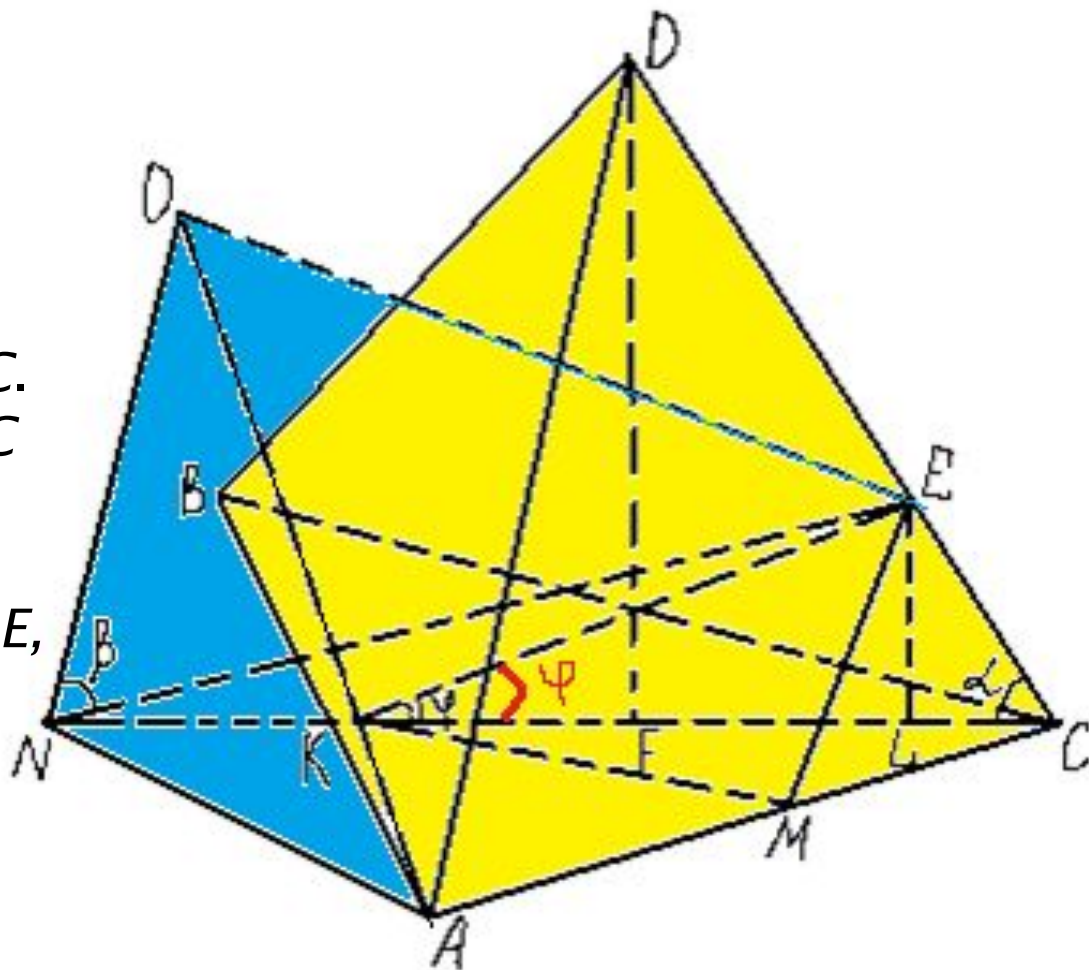


Ответ:

$$r = \frac{a}{4},$$

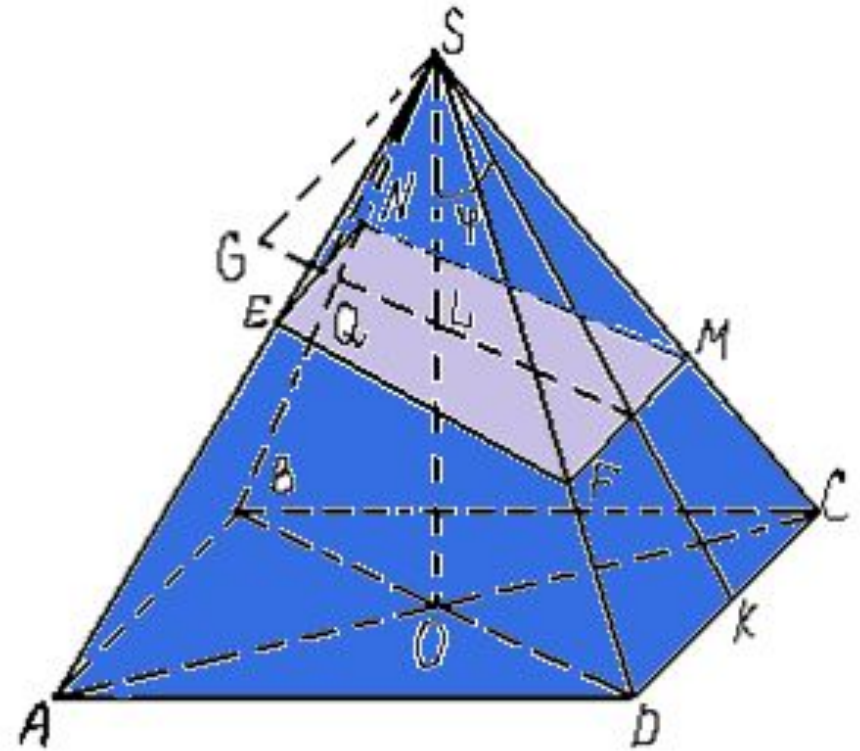
$$R = \frac{a\sqrt{13}(8 - 3\sqrt{3})}{74\sqrt{3}}$$

Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a , точка K – середина ребра AB , точка E лежит на ребре CD и $EC:ED = 1:2$, точка F – центр грани ABC . Найти угол между прямыми KC и KE , расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E, F .



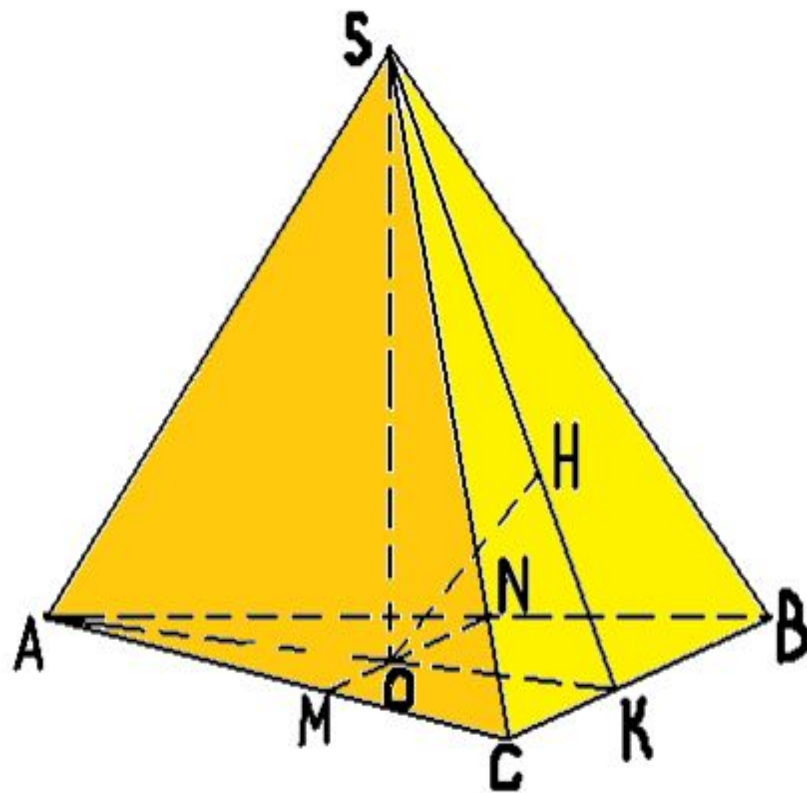
Ответ: $\arccos \frac{7}{2\sqrt{19}}; a\sqrt{\frac{2}{3}}; a\sqrt{\frac{11}{6}}$

Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2 , высота пирамиды, опущенная на основание, равна $\frac{1}{2}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2ES$, $SF = 5DF$. Через точки E и F проведена плоскость α , параллельная CD . Найти площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α ; радиус сферы с центром в точке A , касающейся плоскости α ; угол между плоскостью α и плоскостью ABC .



Ответ: $\frac{77}{36}$; $\frac{40\sqrt{2}}{33}$;
 $\arccos \frac{7}{11}$.

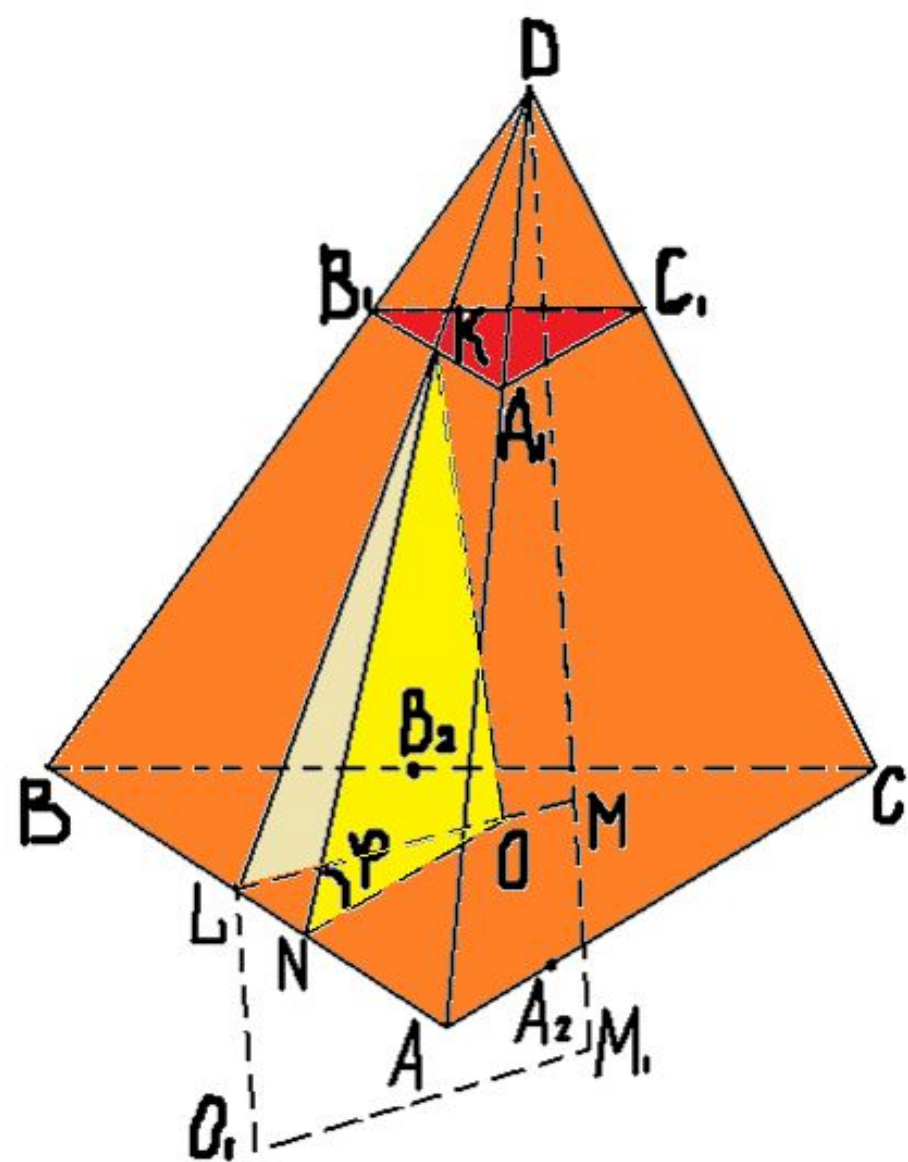
В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребро основания боковое ребро M - середина ребра AC . Найти: а) расстояние от точки M до плоскости SBC ; наибольшее возможное значение угла между прямой SM и плоскостью SBC .



Ответ:

$$p = \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}; \varphi_{\max} = \arcsin \frac{3}{4}.$$

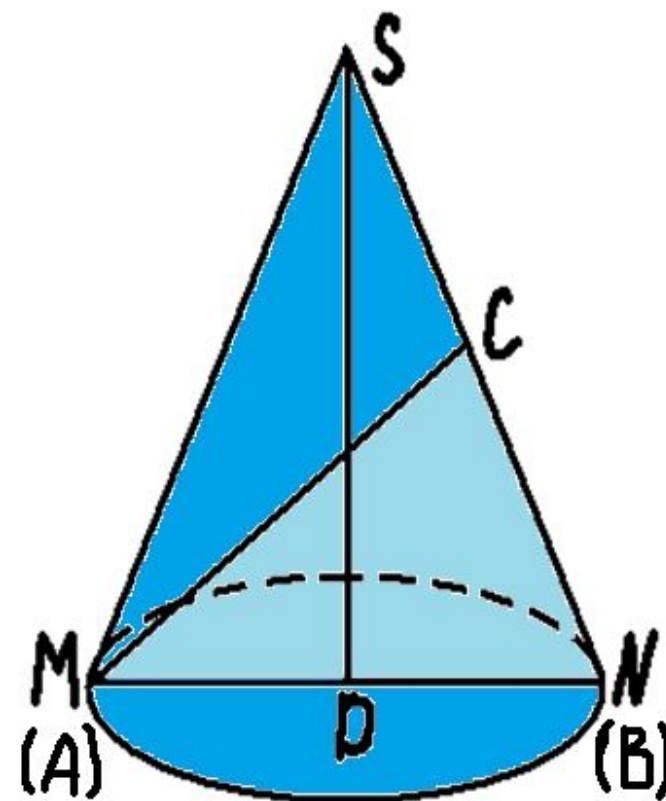
Даны пирамида $ABCD$ и цилиндр. Окружность нижнего основания цилиндра вписана в грань ABC . Окружность верхнего основания цилиндра пересекает ребра DA , DB и DC , а ее центр лежит на грани ABD . Радиус цилиндра равен 3 объем пирамиды $ABCD$ равен 337 , ребро $AD = 4$. Найти двугранный угол между гранями ABC и ABD и радиус описанной около $ABCD$ сферы.



$$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{2}}{4}; R = \sqrt{\frac{337}{2}}$$

Ответ:

Через вершину S прямого кругового конуса проведена плоскость, пересекающая окружность основания конуса в точках A и B . Медианы AC и SB треугольника ASB имеют длину m_1 и m_2 соответственно. Определить величину угла при вершине S в осевом сечении конуса, если известно, что площадь $\triangle ASB$ имеет наибольшее возможное значение.

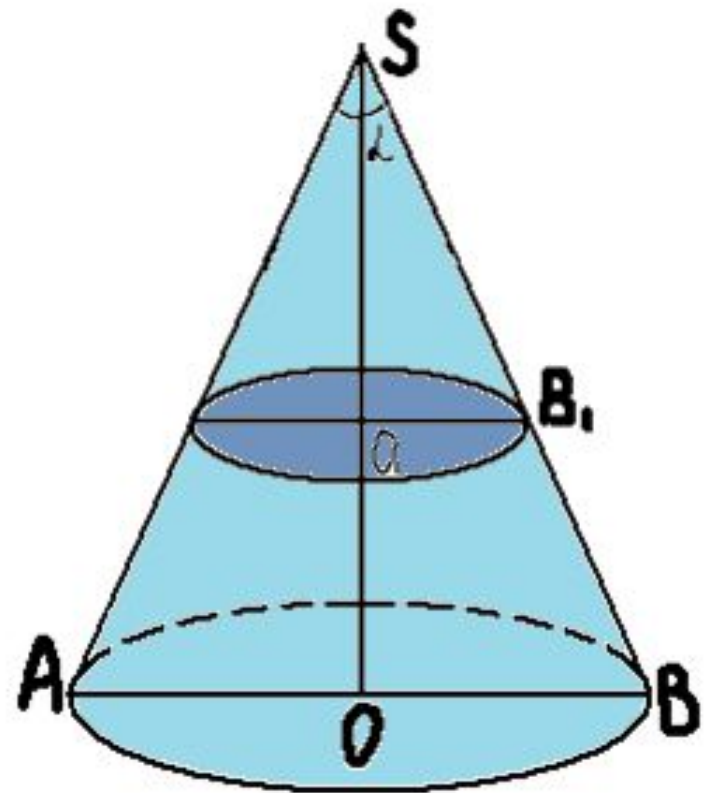


Ответ:

$$\frac{1}{2} < \frac{m_1}{m_2} < \sqrt{\frac{5}{2}}, \alpha = 2 \arctg \frac{\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}{3m_2};$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$$

В прямой круговой конус вписана правильная шестиугольная призма так, что, нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания лежат на боковой поверхности конуса. Известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение. Найдите объем призмы, если известно, что длина образующей конуса равна l , а угол при вершине осевого сечения конуса равен α .



Ответ: при

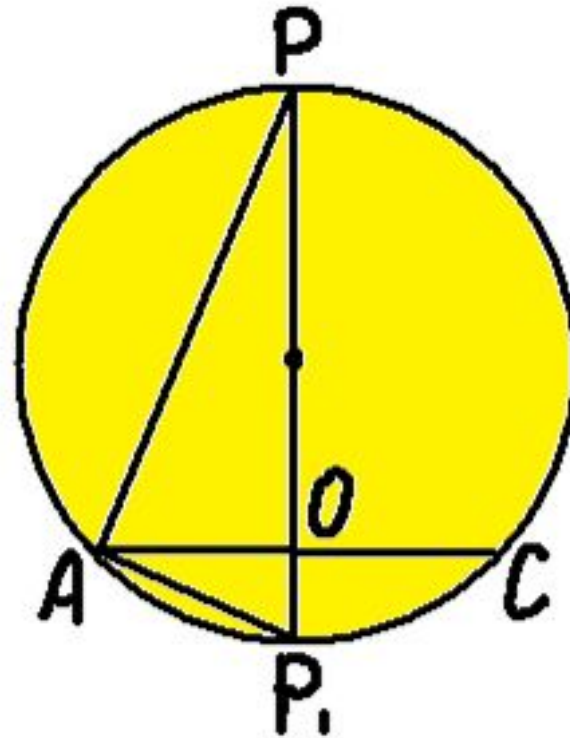
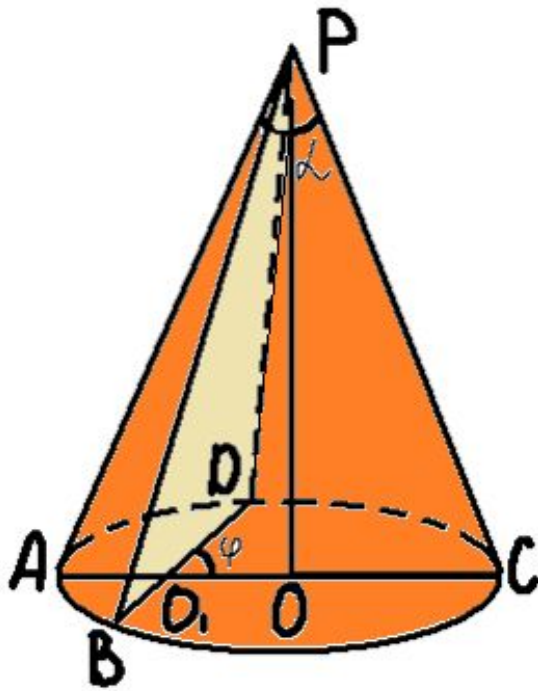
$$0 < \alpha < 60^\circ \Rightarrow 2a \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{l^3 \cos \frac{\alpha}{2}}{(2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3})^3} \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3} \right)$$

при

$$60^\circ \leq \alpha < \pi \Rightarrow V \in \emptyset$$

Радиус сферы, описанной около прямого кругового конуса с вершиной P , равен R . Прямая, проведенная в плоскости основания конуса, пересекает диаметр AC окружности основания под углом φ , а окружность – в точках B и D . Определить объем пирамиды $PABCD$, если известно, что угол в осевом сечении конуса при вершине P равен α , а треугольники APC и DPB равновелики.



$$S_{\Delta ACP} = \frac{1}{2} l^2 \sin \alpha = S_1, \quad S_{\Delta BPD} = \frac{1}{2} l^2 \sin \gamma = S_2$$

a) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $S_1 =$ $V_{PABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$
 S_2

$h = OP$ – высота

конуса

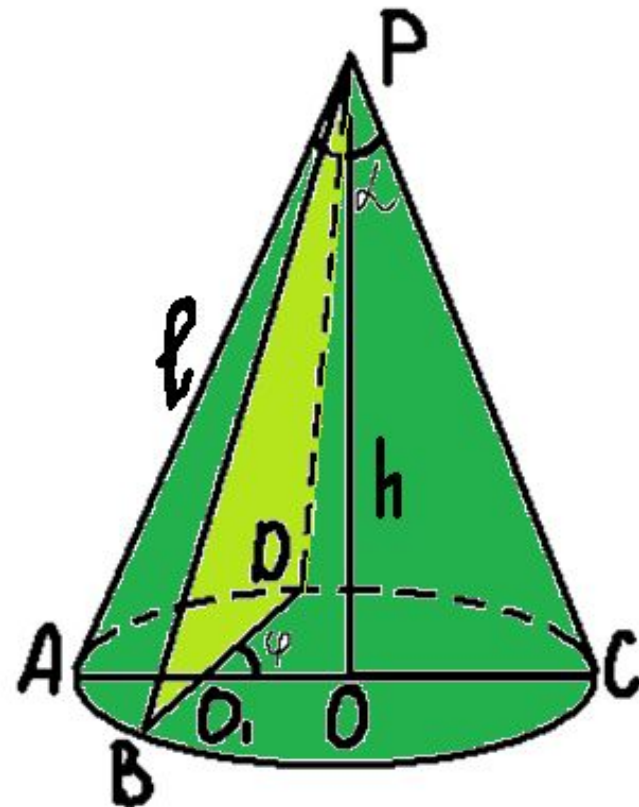
Обозначим $AB = CD = a$ и $AD = BC =$

b – радиус основания, тогда

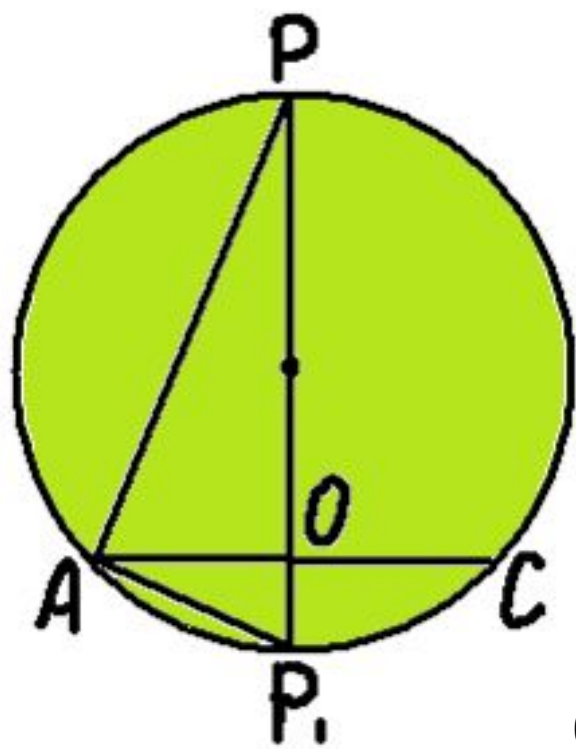
$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \varphi,$$

$$b^2 = 2r^2 + 2r^2 \cos \varphi,$$

$$S_{\text{осн}} = ab = \sqrt{4r^4 - 4r^4 \cos^2 \varphi} = 2r^2 \sin \varphi.$$



$$\angle APP_1 =$$



$OP = h_1$, $OP_1 = h_2$, $OA = r$ - радиус основания конуса

$$\angle APP_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{h_1}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}; \quad \frac{h_2}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}}; \quad h_1 + h_2 = 2R$$

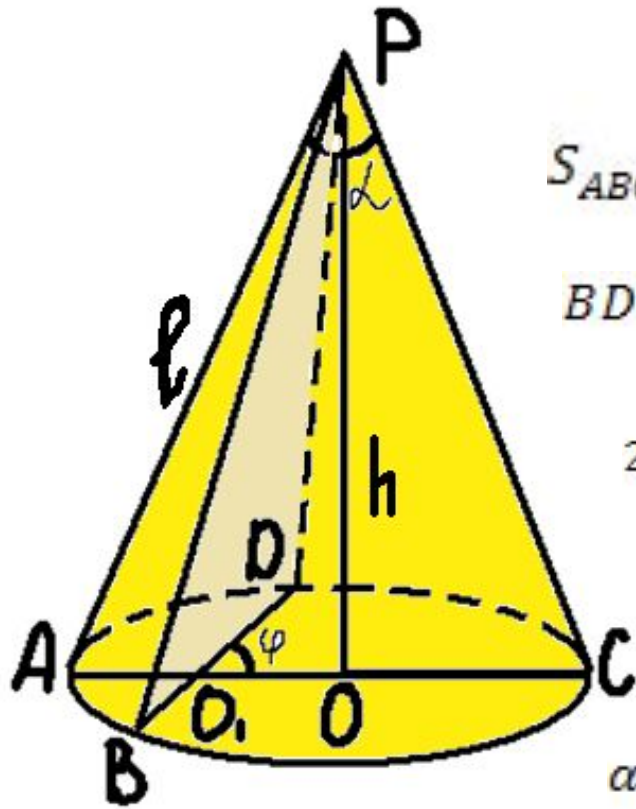
$$r = R \sin \alpha \quad h_1 = R(1 + \cos \alpha)$$

$$V = \frac{2}{3} R^3 \sin^2 \alpha \sin \varphi (1 + \cos \alpha)$$

б) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad V = \frac{2}{3} R^3 \sin^2 \alpha \sin \varphi (1 + \cos \alpha)$

$\gamma = 180^\circ - \alpha$ т.е. в этом случае

$$h = h_1 = R(1 + \cos \alpha) \quad r = R \sin \alpha$$



$$S_{ABCD} = BD * AC * \sin\varphi * \frac{1}{2} = R \sin\varphi * BD \sin\alpha$$

$$BD^2 = 2l^2 + 2l^2 \cos\alpha \quad (2r)^2 = 2l^2 - 2l^2 \cos\alpha$$

$$2l^2 = \frac{2r^2}{1 - \cos\alpha} \quad BD^2 = 2R(1 + \cos\alpha)$$

$$V = \frac{2}{3} R^3 \sin\varphi \sin\alpha (1 + \cos\alpha)^2$$

$$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow V = \frac{2}{3} R^3 \sin^2 \alpha \sin\varphi (1 + \cos\alpha)$$

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow V = \frac{2}{3} R^3 \sin^2 \alpha \sin\varphi (1 + \cos\alpha)$$

$$V = \frac{2}{3} R^3 \sin\varphi \sin\alpha (1 + \cos\alpha)^2$$