

ЛЕКЦИЯ 6

**РЕШЕНИЕ
ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ ГРАФОВ ПОЛНЫМ
ПЕРЕБОРОМ**

Содержание

- Примеры решаемых полным перебором задач
- Алгоритм полного перебора и его компоненты
- Примеры применения полного перебора
- Решить самостоятельно
- Контрольные вопросы

Примеры решаемых полным перебором задач

Обобщенная задача Прима

- Содержательная постановка задачи: на взвешенном неориентированном графе $G(X, U)$ выделено подмножество вершин X' для которого следует выделить подмножество U' , такое, что:
- На графе $G(X, U')$ существует маршрут между любой парой вершин множества X' .
- Суммарный вес ребер подмножества U' минимален.

Формальная постановка задачи

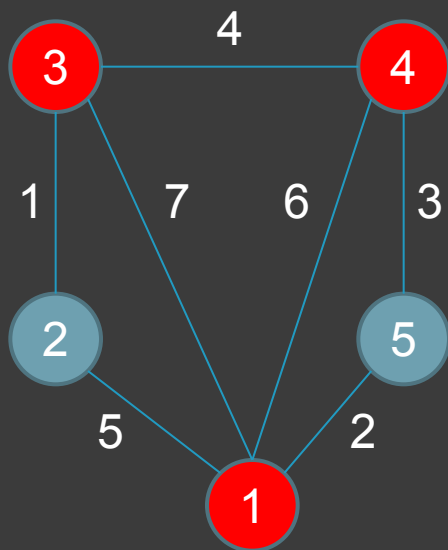
Обозначения:

- ⊙ Выделенное подмножество вершин X' ;
- ⊙ d -й маршрут, соединяющий p -ю и q -ю вершины $L^d(p, q)$.

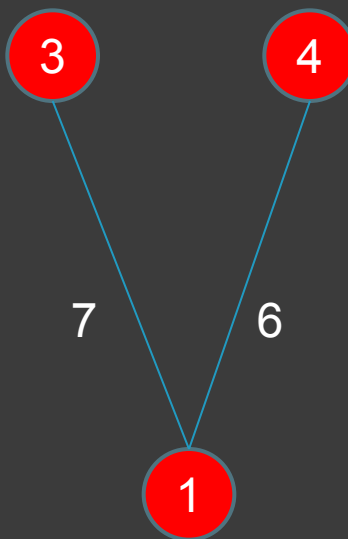
- ⊙
$$\begin{cases} \sum_i \sum_j r(i, j) \cdot z(i, j) \Rightarrow \min; \\ \forall x_p \in X', \forall x_q \in X': \sum_d \prod_{(i, j) \in L^d(p, q)} z(i, j) \geq 1; \\ \forall (i, j) \in U : z(i, j) = 1, 0. \end{cases}$$

**ПРИМЕР ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ПРИМА
(«ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ» ВЕРШИНЫ ВЫДЕЛЕНЫ
КРАСНЫМ ЦВЕТОМ)**

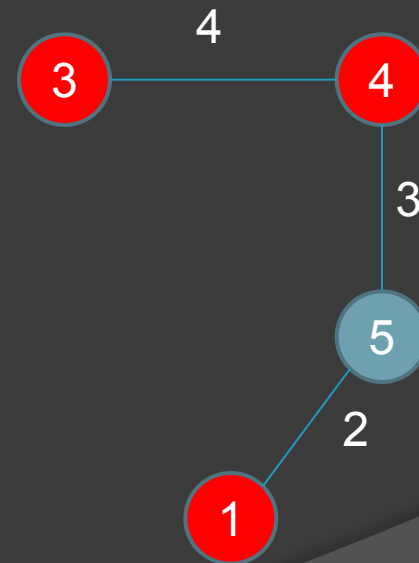
Исходный граф Допустимое Оптимальное
G(X,U) решение решение



S = 28



S = 13



S = 9

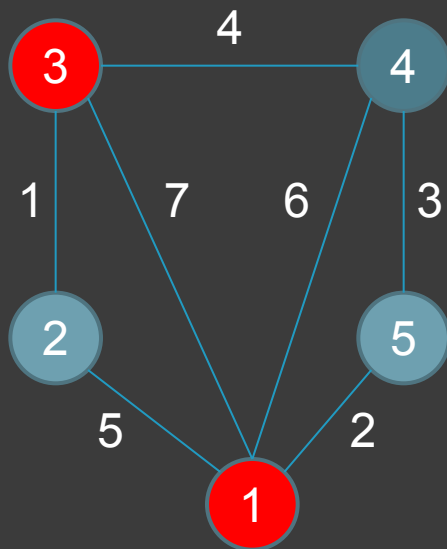
Важный частный случай обобщенной задачи Прима

- Содержательная постановка задачи поиска **кратчайшего маршрута**: на взвешенном неориентированном графе $G(X,U)$ выделены две вершины, p -я и q -я, для которых следует выделить подмножество ребер U' , такое, что:
- На графе $G(X,U')$ существует маршрут между этими вершинами.
- Суммарный вес ребер подмножества U' минимален.

ПРИМЕР задачи поиска кратчайшего маршрута

Исходный граф Допустимое решение Оптимальное решение

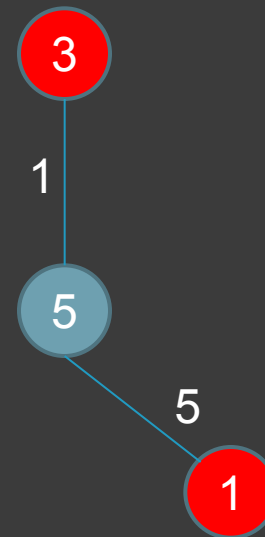
$G(X,U)$ решение решение



$S = 28$



$S = 7$



$S = 6$

Формальная постановка задачи

Обозначения:

- ⊙ Выделенное подмножество вершин X' ;
- ⊙ d -й маршрут, соединяющий p -ю и q -ю вершины $L^d(p, q)$.

- ⊙
$$\begin{cases} \sum_i \sum_j r(i, j) \cdot z(i, j) \Rightarrow \min; \\ \sum_d \prod_{(i, j) \in L^d(p, q)} z(i, j) \geq 1; \\ \forall (i, j) \in U : z(i, j) = 1, 0. \end{cases}$$

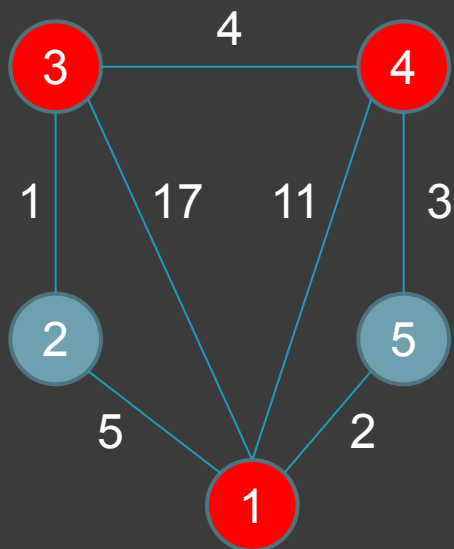
Поиск цикла минимальной длины

Содержательная постановка задачи.

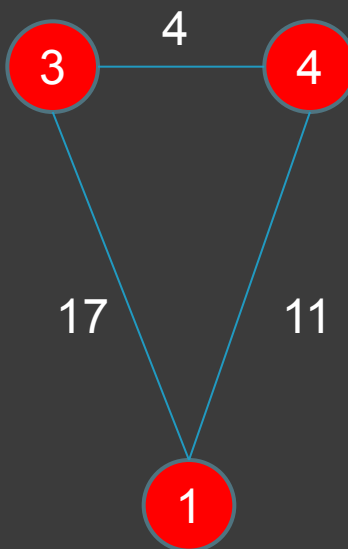
На множестве циклов $A(G)$, отвечающих взвешенному графу $G(X, U)$, требуется выбрать такой, суммарный вес ребер которого минимален.

Пример задачи поиска минимального цикла

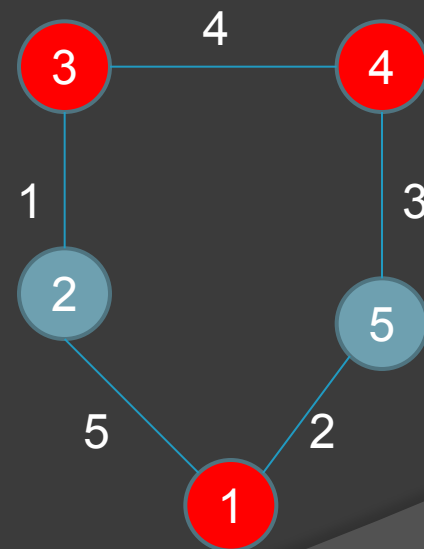
Исходный граф Допустимое Оптимальное
 $G(X,U)$ решение решение



$S = 43$



$S = 32$

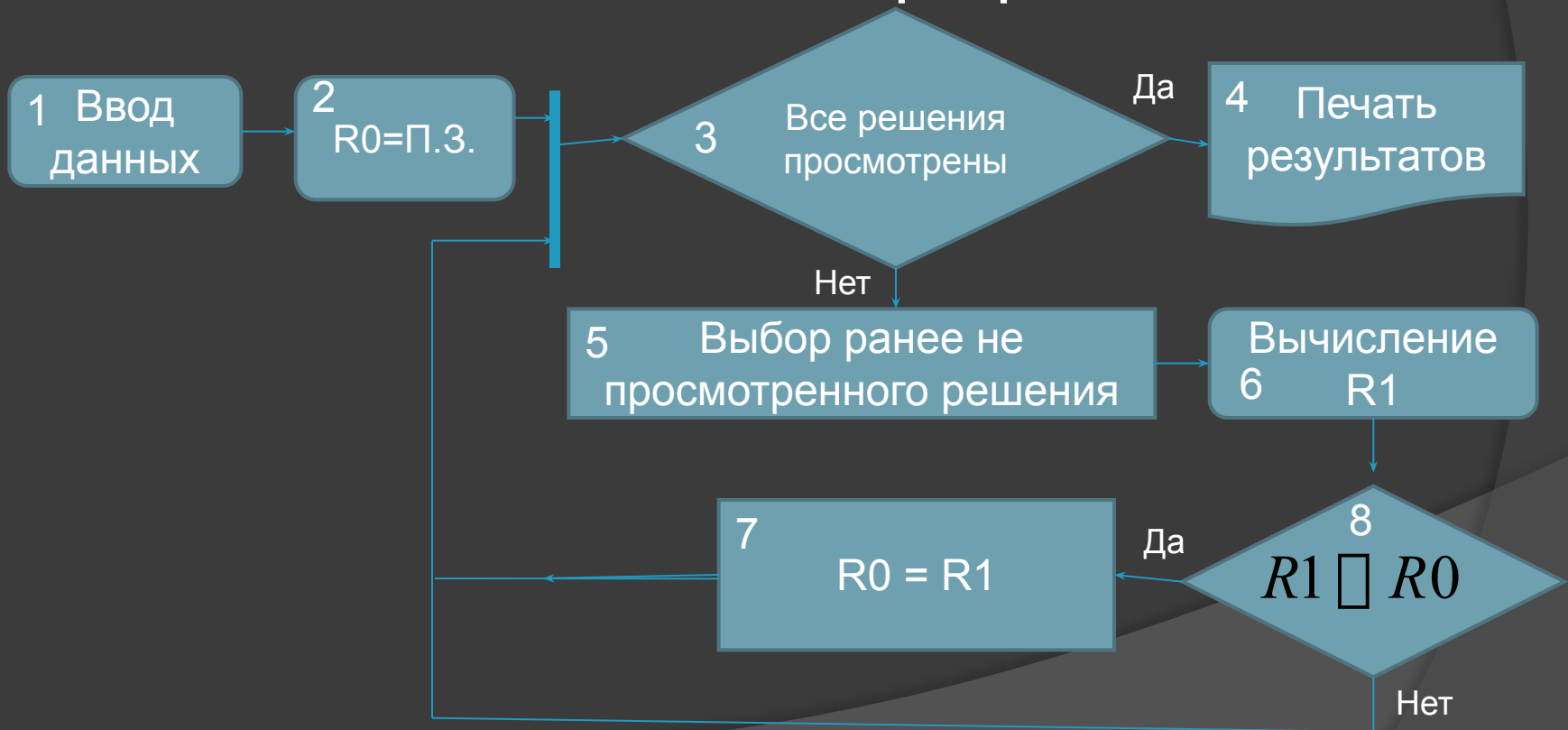


$S = 15$

Алгоритм полного перебора и его КОМПОНЕНТЫ

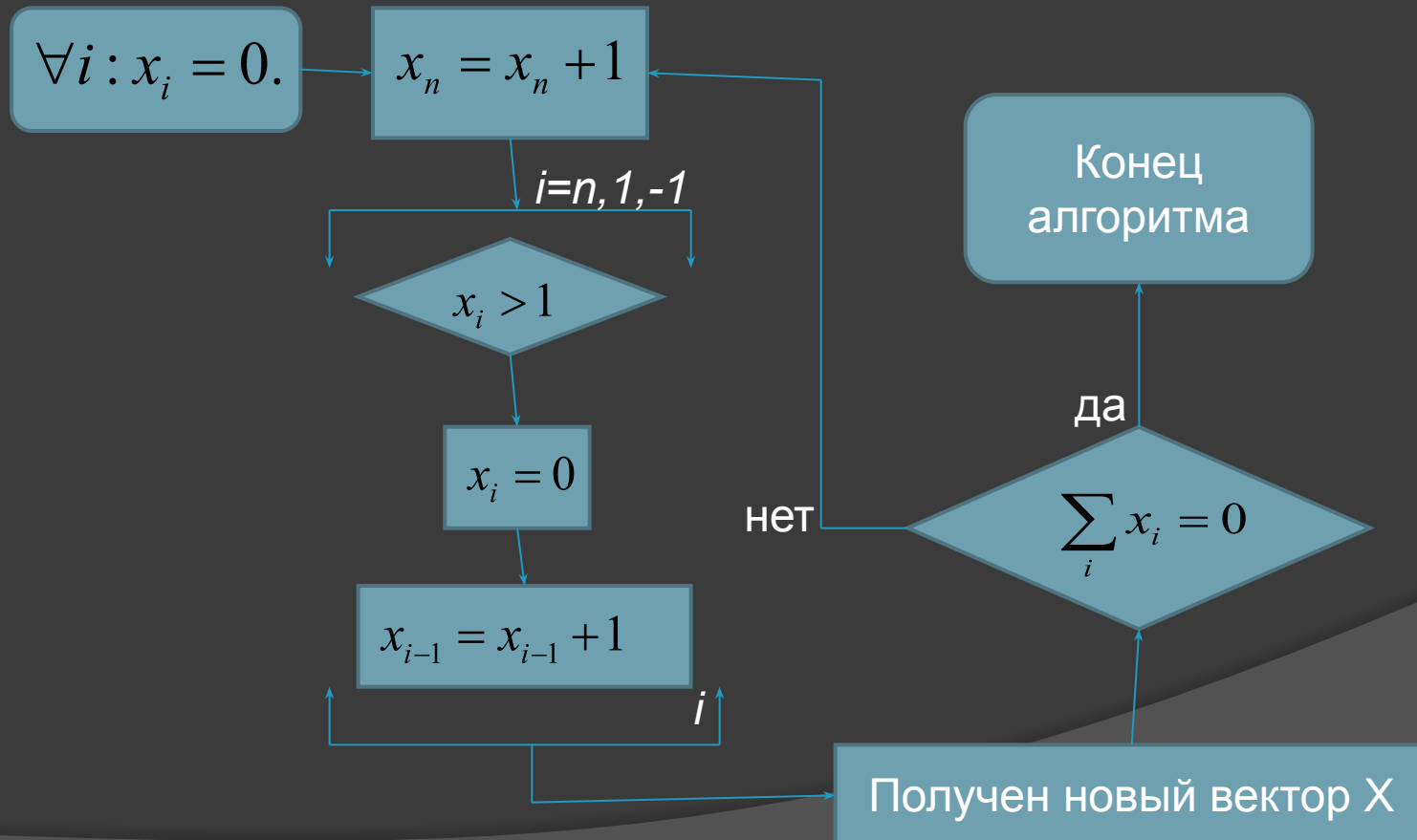
АЛГОРИТМ ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА

Алгоритм решения любой экстремальной задачи на графах



Бинарный счетчик

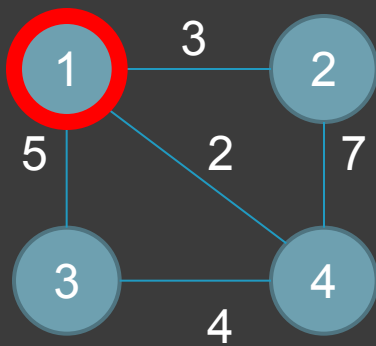
Шаг 5 предыдущего алгоритма



Примеры применения полного перебора

Пример 1: задача о минимаксных маршрутах

Граф $G(X, U)$:



Базовая
вершина

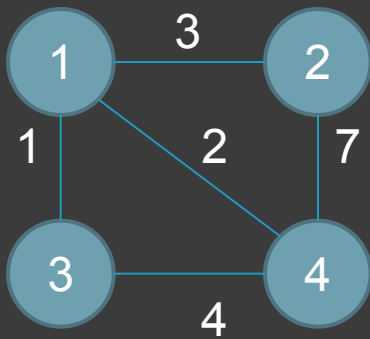
$i = 1, 2, 3, \dots, 32.$

i	$x(1,3)$	$x(2,4)$	$x(1,2)$	$x(1,4)$	$x(3,4)$	R
1	0	0	0	0	0	∞
2	0	0	0	0	1	∞
3	0	0	0	1	0	∞
4	0	0	0	1	1	∞
5	0	0	1	0	0	∞
6	0	0	1	0	1	∞
7	0	0	1	1	0	∞
8	0	0	1	1	1	6
9	0	1	0	0	0	∞
10	0	1	0	0	1	∞

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.

Пример 2: задача Прима

Граф $G(X, U)$:



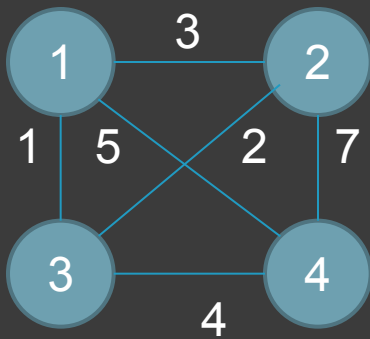
$i = 1, 2, 3, \dots, 32.$

i	$x(1,3)$	$x(2,4)$	$x(1,2)$	$x(1,4)$	$x(3,4)$	R
1	0	0	0	0	0	∞
2	0	0	0	0	1	∞
3	0	0	0	1	0	∞
4	0	0	0	1	1	∞
5	0	0	1	0	0	∞
6	0	0	1	0	1	∞
7	0	0	1	1	0	∞
8	0	0	1	1	1	9
9	0	1	0	0	0	∞
10	0	1	0	0	1	∞

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.

Пример 3: поиск кратчайшего цикла

Граф $G(X, U)$:



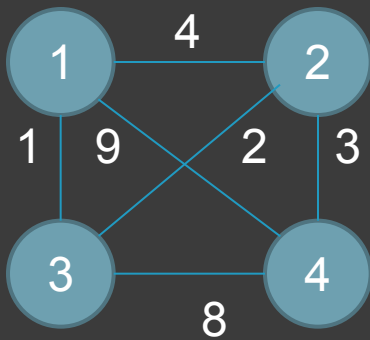
$i = 1, 2, 3, \dots, 64$.
 При $i=8$ найден
 цикл, длина
 которого равна
 12.

	$X(2,3)$	$x(1,3)$	$X(3,4)$	$X(1,2)$	$X(1,4)$	$X(2,4)$	R
1	0	0	0	0	0	0	∞
2	0	0	0	0	0	1	∞
3	0	0	0	0	1	0	∞
4	0	0	0	0	1	1	∞
5	0	0	0	1	0	0	∞
6	0	0	0	1	0	1	∞
7	0	0	0	1	1	0	∞
8	0	0	0	1	1	1	12
9	0	0	1	0	0	0	∞
10	0	0	1	0	0	1	∞

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.

Пример 4: поиск кратчайшего маршрута из h -й вершины в g -ю

Граф $G(X,U)$:



$i = 1, 2, 3, \dots, 64.$

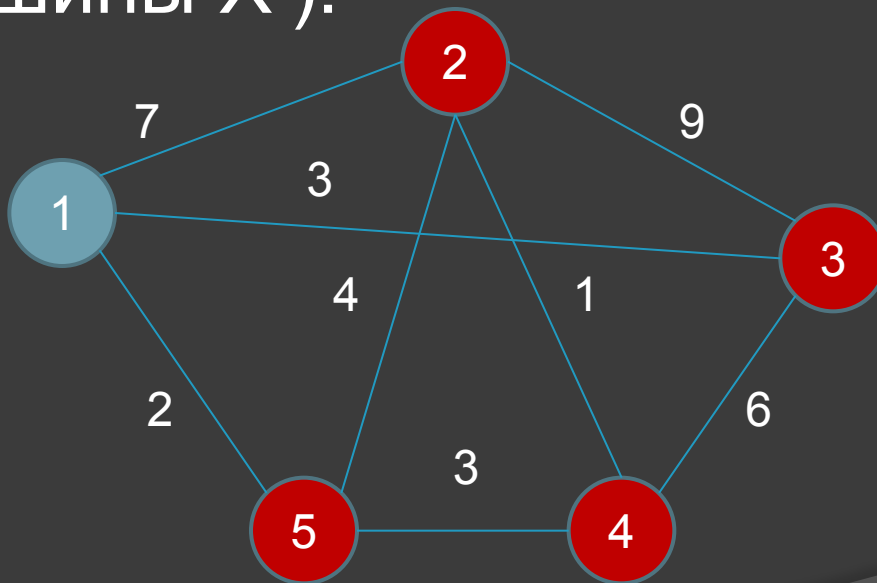
Поиск
кратчайшего
маршрута из 1-й
вершины в 4-ю.

	$X(2,3)$	$x(1,3)$	$X(3,4)$	$X(1,2)$	$X(1,4)$	$X(2,4)$	R
1	0	0	0	0	0	0	∞
2	0	0	0	0	0	1	∞
3	0	0	0	0	1	0	9
4	0	0	0	0	1	1	9
5	0	0	0	1	0	0	∞
6	0	0	0	1	0	1	7
7	0	0	0	1	1	0	9
8	0	0	0	1	1	1	7
9	0	0	1	0	0	0	∞
10	0	0	1	0	0	1	∞

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Пользуясь полным перебором решить обобщенную задачу Прима на графе $G(X, U)$ вида (красным цветом выделены вершины X'):



Контрольные вопросы

- Какие задачи дискретной оптимизации на графах можно решить полным перебором?
- Достоинства полного перебора.
- Недостатки полного перебора.
- Какова верхняя граница объема полного перебора при решении им задачи Прима на графе $G(X,U)$, если $X = n$?

Индивидуальные задания

На заданном взвешенном неориентированном графе $G(X,U)$ определить перебором (12 итераций):

- 1. Кратчайший маршрут между i -й и j -й вершинами.
- 2. Минимальную базу ребер, связывающих три вершины: i, j, k .
- 3. Минимальный простой цикл на графе.
- 4. Минимаксную базу ребер, связывающих все вершины графа.
- 5. Минимаксный простой цикл на графе

Величины i, j, k

№	i	j	k	№	i	j	k
1	1	3	5	13	5	4	1
2	1	2	4	14	5	4	2
3	1	3	4	15	5	4	3
4	2	3	5	16	4	1	2
5	2	4	5	17	4	2	3
6	1	2	5	18	4	2	5
7	1	2	3	19	4	1	5
8	4	3	5	20	4	3	2
9	3	2	5	21	4	3	5
10	3	1	5	22	4	3	1
11	3	1	4	23	5	2	1
12	3	2	4	24	5	3	2

Матрицы смежности

Вершин

№ 1

0	2	0	0	4
2	0	5	0	1
0	5	0	3	0
0	0	3	0	8
4	1	0	8	0

№ 2

0	2	0	0	4
2	0	6	1	0
0	6	0	3	0
0	1	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 3

0	7	2	0	3
7	0	8	0	1
2	8	0	4	0
0	0	4	0	5
3	1	0	5	0

№ 4

0	9	2	3	0
9	0	7	0	1
2	7	0	4	0
3	0	4	0	5
0	1	0	5	0

Матрицы смежности

Вершин

№ 5

0	2	0	0	4
2	0	5	6	1
0	5	0	3	0
0	6	3	0	8
4	1	0	8	0

№ 6

0	9	0	0	4
9	0	6	1	0
0	6	0	3	0
0	1	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 7

0	7	8	0	3
7	0	2	0	1
8	2	0	4	0
0	0	4	0	5
3	1	0	5	0

№ 8

0	1	2	3	0
1	0	7	0	9
2	7	0	4	0
3	0	4	0	5
0	9	0	5	0

Матрицы смежности

Вершин

№ 9

0	2	0	0	4
2	0	5	0	6
0	5	0	7	0
0	0	7	0	3
4	6	0	3	0

№ 10

0	2	0	0	4
2	0	6	1	0
0	6	0	3	0
0	1	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 11

0	7	2	0	1
7	0	3	0	9
2	3	0	4	0
0	0	4	0	5
1	9	0	5	0

№ 12

0	1	2	3	0
1	0	7	0	1
2	7	0	2	0
3	0	2	0	5
0	1	0	5	0

Матрицы смежности

Вершин

№ 13

0	6	0	0	4
6	0	5	0	8
0	5	0	7	0
0	0	7	0	1
4	8	0	1	0

№ 14

0	5	0	0	6
5	0	2	1	0
0	2	0	3	0
0	1	3	0	8
6	0	0	8	0

№ 15

0	7	9	0	3
7	0	8	0	10
9	8	0	4	0
0	0	4	0	5
3	10	0	5	0

№ 16

0	9	12	3	0
9	0	10	0	11
12	10	0	4	0
3	0	4	0	5
0	11	0	5	0

Матрицы смежности

Вершин

№ 17

0	2	0	1	4
2	0	5	0	0
0	5	0	3	0
1	0	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 18

0	2	0	5	4
2	0	6	10	0
0	6	0	3	0
5	10	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 19

0	7	6	0	10
7	0	8	0	1
6	8	0	4	0
0	0	4	0	5
10	1	0	5	0

№ 20

0	3	12	3	8
3	0	7	0	11
12	7	0	4	0
3	0	4	0	5
8	11	0	5	0

Матрицы смежности

Вершин

№ 21

0	12	0	0	14
12	0	5	0	10
0	5	0	3	0
0	0	3	0	2
14	10	0	2	0

№ 23

0	7	2	0	3
7	0	8	0	1
2	8	0	4	0
0	0	4	0	5
3	1	0	5	0

№ 22

0	4	0	0	2
4	0	6	0	0
0	6	0	3	0
0	10	3	0	8
2	0	0	8	0

№ 24

0	9	2	3	0
9	0	7	0	1
2	7	0	4	0
3	0	4	0	5
0	1	0	5	0