

ЛЕКЦИЯ 6

**РЕШЕНИЕ  
ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ  
ТЕОРИИ ГРАФОВ ПОЛНЫМ  
ПЕРЕБОРОМ**

# Содержание

- Примеры решаемых полным перебором задач
- Алгоритм полного перебора и его компоненты
- Примеры применения полного перебора
- Решить самостоятельно
- Контрольные вопросы

# Примеры решаемых полным перебором задач

# Обобщенная задача Прима

- Содержательная постановка задачи: на взвешенном неориентированном графе  $G(X, U)$  выделено подмножество вершин  $X'$  для которого следует выделить подмножество  $U'$ , такое, что:
- На графе  $G(X, U')$  существует маршрут между любой парой вершин множества  $X'$ .
- Суммарный вес ребер подмножества  $U'$  минимален.

# Формальная постановка задачи

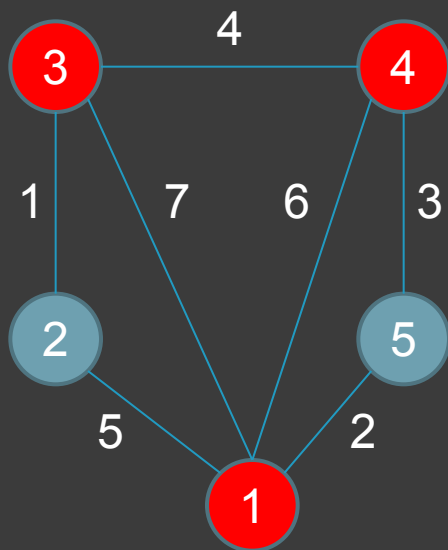
Обозначения:

- ⊙ Выделенное подмножество вершин  $X'$ ;
- ⊙  $d$ -й маршрут, соединяющий  $p$ -ю и  $q$ -ю вершины  $L^d(p, q)$ .

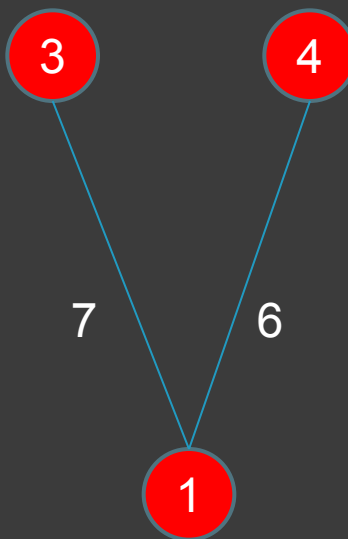
- ⊙ 
$$\begin{cases} \sum_i \sum_j r(i, j) \cdot z(i, j) \Rightarrow \min; \\ \forall x_p \in X', \forall x_q \in X': \sum_d \prod_{(i, j) \in L^d(p, q)} z(i, j) \geq 1; \\ \forall (i, j) \in U : z(i, j) = 1, 0. \end{cases}$$

# ПРИМЕР ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ПРИМА («ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ» ВЕРШИНЫ ВЫДЕЛЕНЫ КРАСНЫМ ЦВЕТОМ)

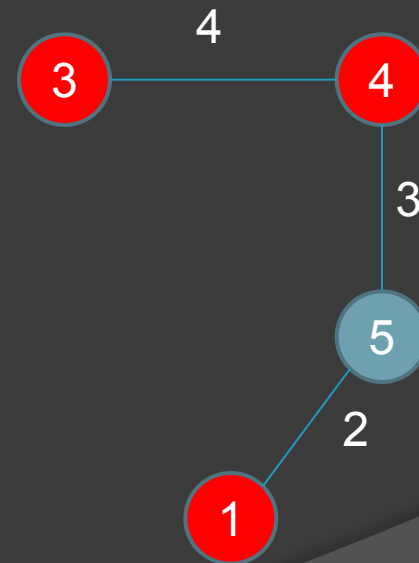
Исходный граф    Допустимое    Оптимальное  
G(X,U)            решение            решение



S = 28



S = 13



S = 9

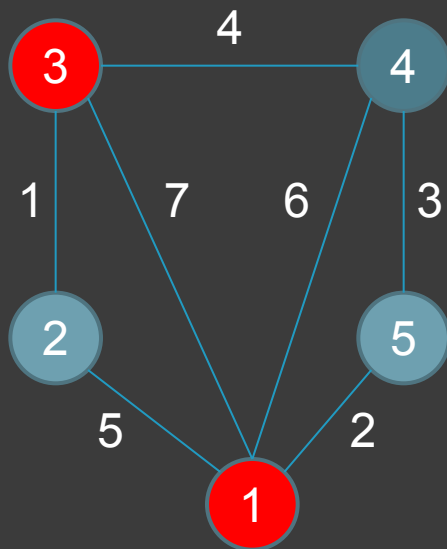
# Важный частный случай обобщенной задачи Прима

- Содержательная постановка задачи поиска **кратчайшего маршрута**: на взвешенном неориентированном графе  $G(X,U)$  выделены две вершины,  $p$ -я и  $q$ -я, для которых следует выделить подмножество ребер  $U'$ , такое, что:
- На графе  $G(X,U')$  существует маршрут между этими вершинами.
- Суммарный вес ребер подмножества  $U'$  минимален.

# ПРИМЕР задачи поиска кратчайшего маршрута

Исходный граф    Допустимое решение    Оптимальное решение

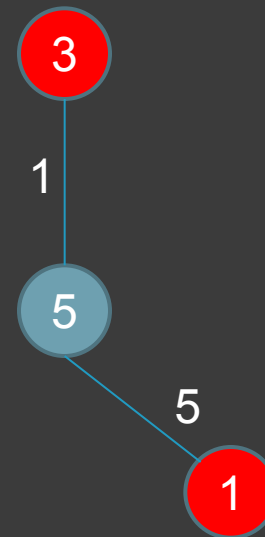
$G(X,U)$                     решение                    решение



$S = 28$



$S = 7$



$S = 6$



# Формальная постановка задачи

Обозначения:

- ⊙ Выделенное подмножество вершин  $X'$ ;
- ⊙  $d$ -й маршрут, соединяющий  $p$ -ю и  $q$ -ю вершины  $L^d(p, q)$ .

- ⊙ 
$$\begin{cases} \sum_i \sum_j r(i, j) \cdot z(i, j) \Rightarrow \min; \\ \sum_d \prod_{(i, j) \in L^d(p, q)} z(i, j) \geq 1; \\ \forall (i, j) \in U : z(i, j) = 1, 0. \end{cases}$$

# Поиск цикла минимальной длины

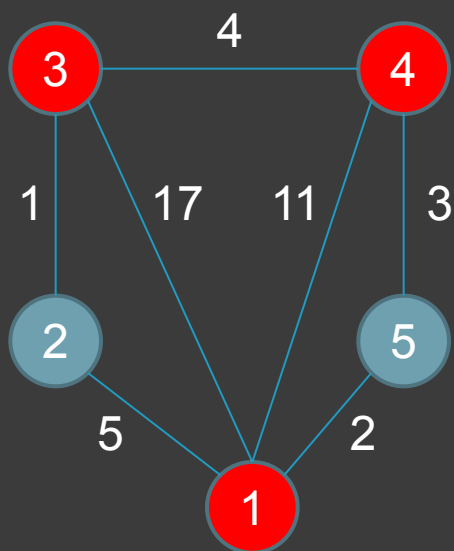
Содержательная постановка задачи.

На множестве циклов  $A(G)$ , отвечающих взвешенному графу  $G(X, U)$ , требуется выбрать такой, суммарный вес ребер которого минимален.

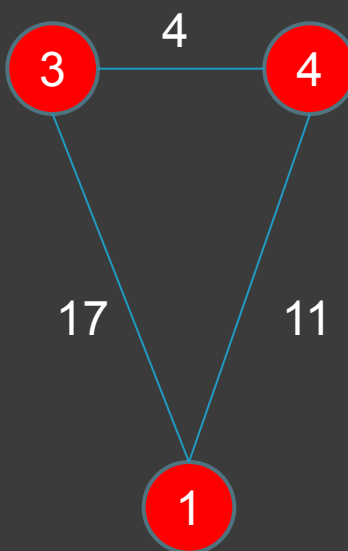
# Пример задачи поиска минимального цикла

Исходный граф    Допустимое решение    Оптимальное решение

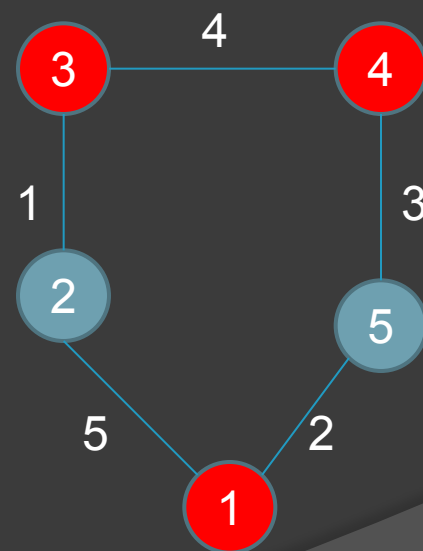
$G(X,U)$                     решение                    решение



$S = 43$



$S = 32$

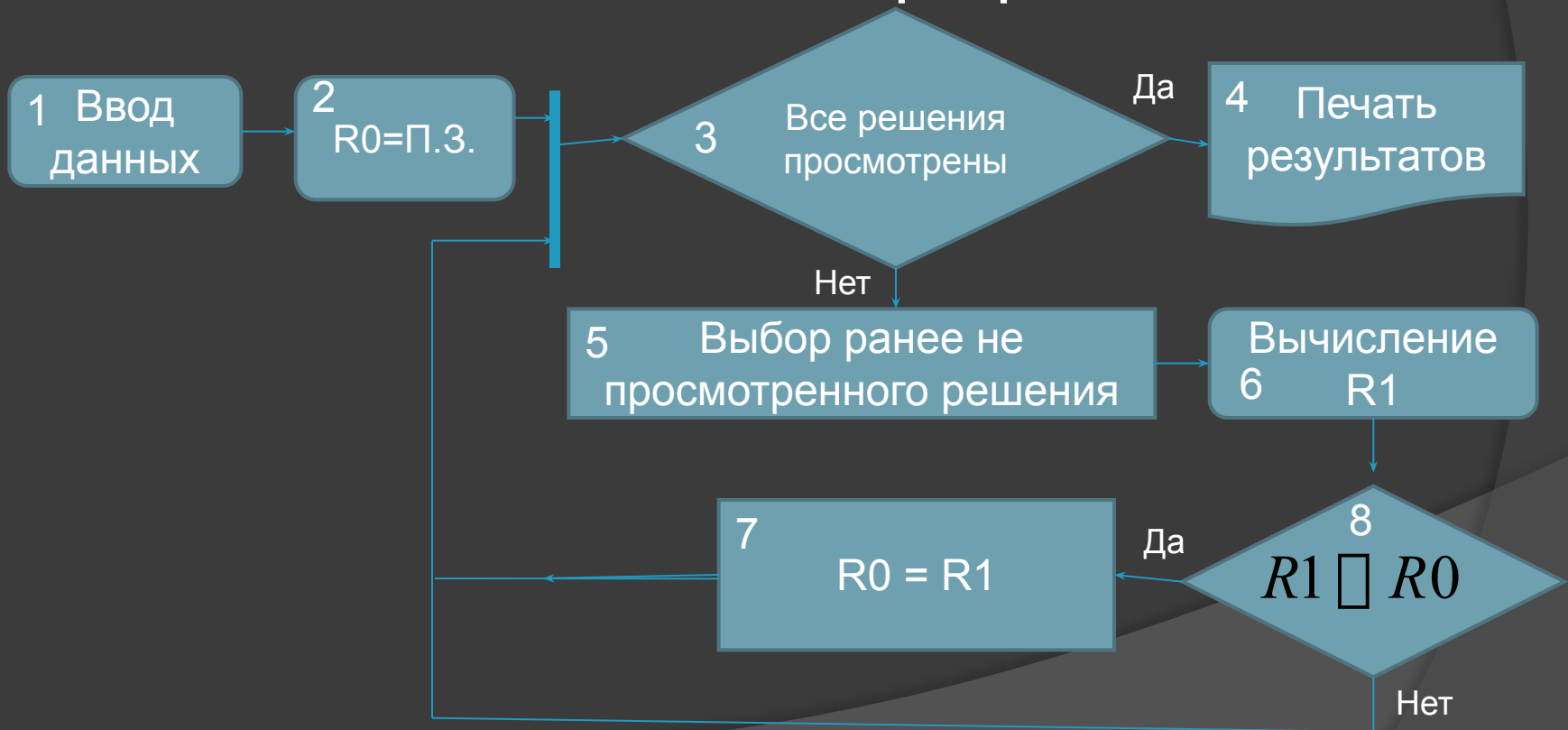


$S = 15$

# Алгоритм полного перебора и его КОМПОНЕНТЫ

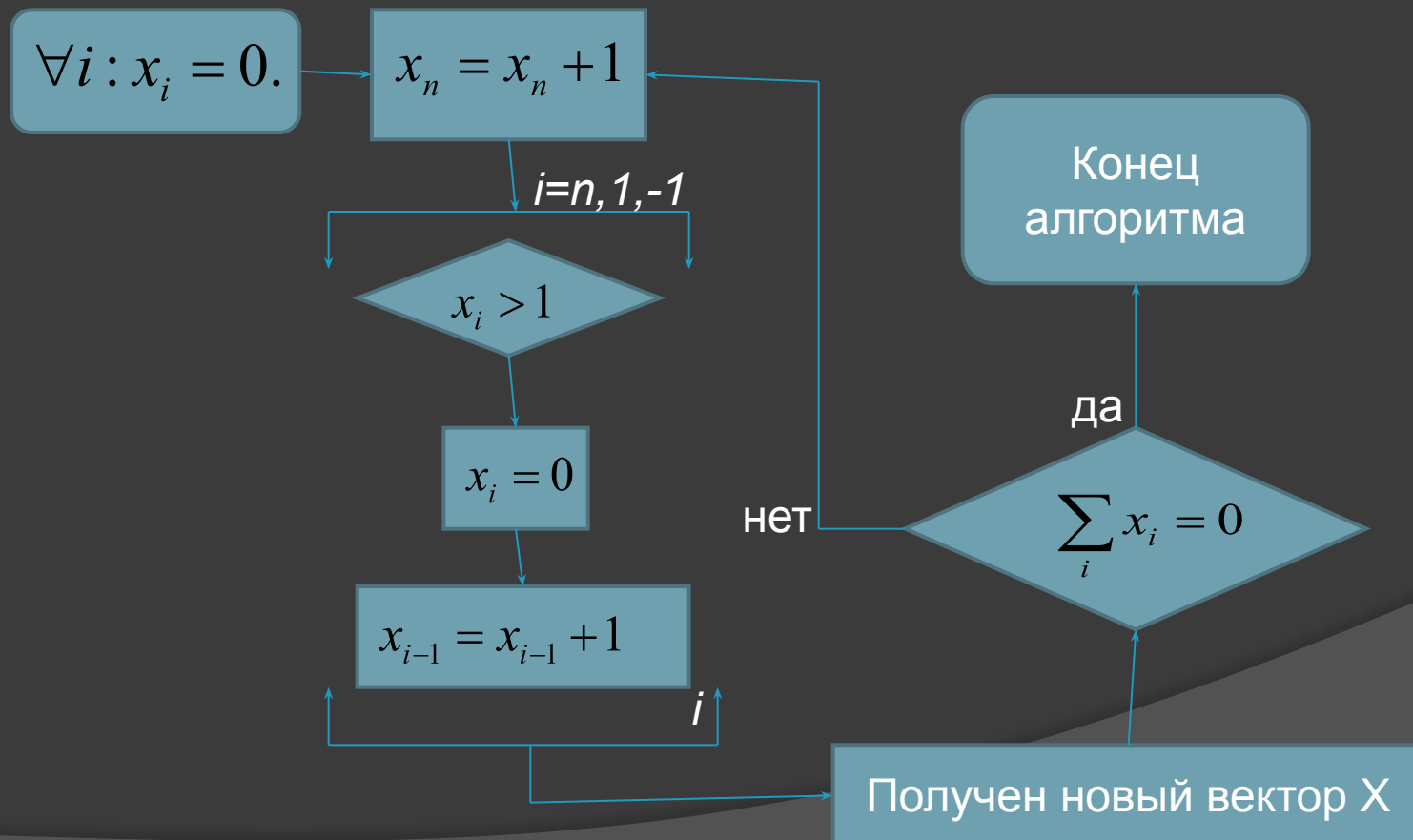
# АЛГОРИТМ ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА

Алгоритм решения любой экстремальной задачи на графах



# Бинарный счетчик

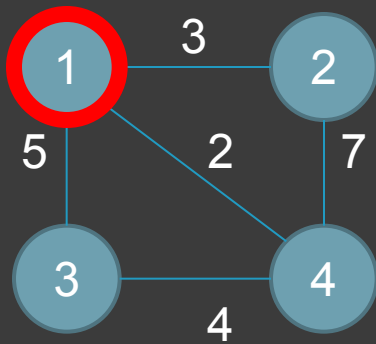
## Шаг 5 предыдущего алгоритма



# Примеры применения полного перебора

# Пример 1: задача о минимаксных маршрутах

Граф  $G(X, U)$ :



Базовая  
вершина

$i = 1, 2, 3, \dots, 32.$

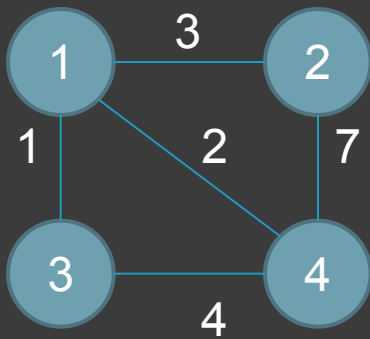
$i$	$x(1,3)$	$x(2,4)$	$x(1,2)$	$x(1,4)$	$x(3,4)$	$R$
1	0	0	0	0	0	$\infty$
2	0	0	0	0	1	$\infty$
3	0	0	0	1	0	$\infty$
4	0	0	0	1	1	$\infty$
5	0	0	1	0	0	$\infty$
6	0	0	1	0	1	$\infty$
7	0	0	1	1	0	$\infty$
<b>8</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>6</b>
9	0	1	0	0	0	$\infty$
10	0	1	0	0	1	$\infty$

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.



# Пример 2: задача Прима

Граф  $G(X, U)$ :



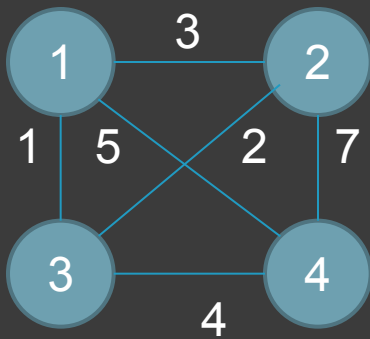
$i = 1, 2, 3, \dots, 32.$

$i$	$x(1,3)$	$x(2,4)$	$x(1,2)$	$x(1,4)$	$x(3,4)$	$R$
1	0	0	0	0	0	$\infty$
2	0	0	0	0	1	$\infty$
3	0	0	0	1	0	$\infty$
4	0	0	0	1	1	$\infty$
5	0	0	1	0	0	$\infty$
6	0	0	1	0	1	$\infty$
7	0	0	1	1	0	$\infty$
<b>8</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>9</b>
9	0	1	0	0	0	$\infty$
10	0	1	0	0	1	$\infty$

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.

# Пример 3: поиск кратчайшего цикла

Граф  $G(X, U)$ :



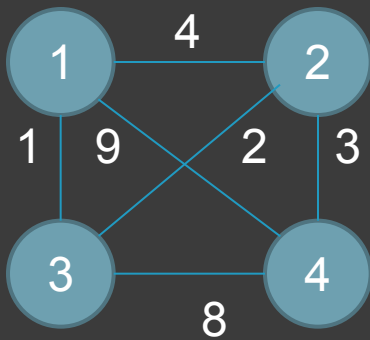
$i = 1, 2, 3, \dots, 64$ .  
 При  $i=8$  найден  
 цикл, длина  
 которого равна  
 12.

	$X(2,3)$	$x(1,3)$	$X(3,4)$	$X(1,2)$	$X(1,4)$	$X(2,4)$	R
1	0	0	0	0	0	0	$\infty$
2	0	0	0	0	0	1	$\infty$
3	0	0	0	0	1	0	$\infty$
4	0	0	0	0	1	1	$\infty$
5	0	0	0	1	0	0	$\infty$
6	0	0	0	1	0	1	$\infty$
7	0	0	0	1	1	0	$\infty$
<b>8</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>12</b>
9	0	0	1	0	0	0	$\infty$
10	0	0	1	0	0	1	$\infty$

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.

# Пример 4: поиск кратчайшего маршрута из $h$ -й вершины в $g$ -ю

Граф  $G(X,U)$ :



$i = 1, 2, 3, \dots, 64.$

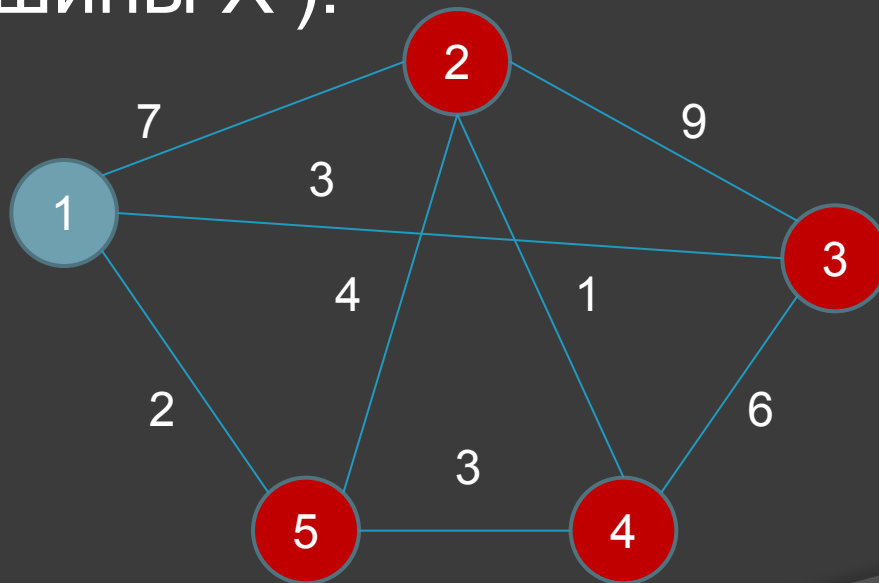
Поиск  
кратчайшего  
маршрута из 1-й  
вершины в 4-ю.

	$X(2,3)$	$x(1,3)$	$X(3,4)$	$X(1,2)$	$X(1,4)$	$X(2,4)$	R
1	0	0	0	0	0	0	$\infty$
2	0	0	0	0	0	1	$\infty$
3	0	0	0	0	1	0	9
4	0	0	0	0	1	1	9
5	0	0	0	1	0	0	$\infty$
6	0	0	0	1	0	1	7
7	0	0	0	1	1	0	9
8	0	0	0	1	1	1	7
9	0	0	1	0	0	0	$\infty$
10	0	0	1	0	0	1	$\infty$

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.

# САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Пользуясь полным перебором решить обобщенную задачу Прима на графе  $G(X, U)$  вида (красным цветом выделены вершины  $X'$ ):



# Контрольные вопросы

- Какие задачи дискретной оптимизации на графах можно решить полным перебором?
- Достоинства полного перебора.
- Недостатки полного перебора.
- Какова верхняя граница объема полного перебора при решении им задачи Прима на графе  $G(X, U)$ , если  $X = n$  ?

# Индивидуальные задания

На заданном взвешенном неориентированном графе  $G(X,U)$  определить перебором (12 итераций):

- 1. Кратчайший маршрут между  $i$ -й и  $j$ -й вершинами.
- 2. Минимальную базу ребер, связывающих три вершины:  $i, j, k$ .
- 3. Минимальный простой цикл на графе.
- 4. Минимаксную базу ребер, связывающих все вершины графа.
- 5. Минимаксный простой цикл на графе

# Величины $i, j, k$

№	$i$	$j$	$k$	№	$i$	$j$	$k$
1	1	3	5	13	5	4	1
2	1	2	4	14	5	4	2
3	1	3	4	15	5	4	3
4	2	3	5	16	4	1	2
5	2	4	5	17	4	2	3
6	1	2	5	18	4	2	5
7	1	2	3	19	4	1	5
8	4	3	5	20	4	3	2
9	3	2	5	21	4	3	5
10	3	1	5	22	4	3	1
11	3	1	4	23	5	2	1
12	3	2	4	24	5	3	2

# Матрицы смежности

## Вершин

№ 1

0	2	0	0	4
2	0	5	0	1
0	5	0	3	0
0	0	3	0	8
4	1	0	8	0

№ 2

0	2	0	0	4
2	0	6	1	0
0	6	0	3	0
0	1	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 3

0	7	2	0	3
7	0	8	0	1
2	8	0	4	0
0	0	4	0	5
3	1	0	5	0

№ 4

0	9	2	3	0
9	0	7	0	1
2	7	0	4	0
3	0	4	0	5
0	1	0	5	0



# Матрицы смежности

## Вершин

№ 5

0	2	0	0	4
2	0	5	6	1
0	5	0	3	0
0	6	3	0	8
4	1	0	8	0

№ 6

0	9	0	0	4
9	0	6	1	0
0	6	0	3	0
0	1	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 7

0	7	8	0	3
7	0	2	0	1
8	2	0	4	0
0	0	4	0	5
3	1	0	5	0

№ 8

0	1	2	3	0
1	0	7	0	9
2	7	0	4	0
3	0	4	0	5
0	9	0	5	0

# Матрицы смежности

## Вершин

№ 9

0	2	0	0	4
2	0	5	0	6
0	5	0	7	0
0	0	7	0	3
4	6	0	3	0

№ 10

0	2	0	0	4
2	0	6	1	0
0	6	0	3	0
0	1	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 11

0	7	2	0	1
7	0	3	0	9
2	3	0	4	0
0	0	4	0	5
1	9	0	5	0

№ 12

0	1	2	3	0
1	0	7	0	1
2	7	0	2	0
3	0	2	0	5
0	1	0	5	0

# Матрицы смежности

## Вершин

№ 13

0	6	0	0	4
6	0	5	0	8
0	5	0	7	0
0	0	7	0	1
4	8	0	1	0

№ 14

0	5	0	0	6
5	0	2	1	0
0	2	0	3	0
0	1	3	0	8
6	0	0	8	0

№ 15

0	7	9	0	3
7	0	8	0	10
9	8	0	4	0
0	0	4	0	5
3	10	0	5	0

№ 16

0	9	12	3	0
9	0	10	0	11
12	10	0	4	0
3	0	4	0	5
0	11	0	5	0

# Матрицы смежности

## Вершин

№ 17

0	2	0	1	4
2	0	5	0	0
0	5	0	3	0
1	0	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 18

0	2	0	5	4
2	0	6	10	0
0	6	0	3	0
5	10	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 19

0	7	6	0	10
7	0	8	0	1
6	8	0	4	0
0	0	4	0	5
10	1	0	5	0

№ 20

0	3	12	3	8
3	0	7	0	11
12	7	0	4	0
3	0	4	0	5
8	11	0	5	0

# Матрицы смежности

## Вершин

№ 21

0	12	0	0	14
12	0	5	0	10
0	5	0	3	0
0	0	3	0	2
14	10	0	2	0

№ 22

0	4	0	0	2
4	0	6	0	0
0	6	0	3	0
0	10	3	0	8
2	0	0	8	0

№ 23

0	7	2	0	3
7	0	8	0	1
2	8	0	4	0
0	0	4	0	5
3	1	0	5	0

№ 24

0	9	2	3	0
9	0	7	0	1
2	7	0	4	0
3	0	4	0	5
0	1	0	5	0