ЛЕКЦИЯ 6

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГРАФОВ ПОЛНЫМ ПЕРЕБОРОМ

Содержание

- Примеры решаемых полным перебором задач
- Алгоритм полного перебора и его компоненты
- Примеры применения полного перебора
- Решить самостоятельно
- Контрольные вопросы

Примеры решаемых полным перебором задач

Обобщенная задача Прима

- Содержательная постановка задачи: на взвешенном неориентированном графе G(X,U) выделено подмножество вершин X’ для которого следует выделить подмножество U’, такое, что:
- На графе G(X,U’) существует маршрут между любой парой вершин множества X’.
- Суммарный вес ребер подмножества U’ минимален.

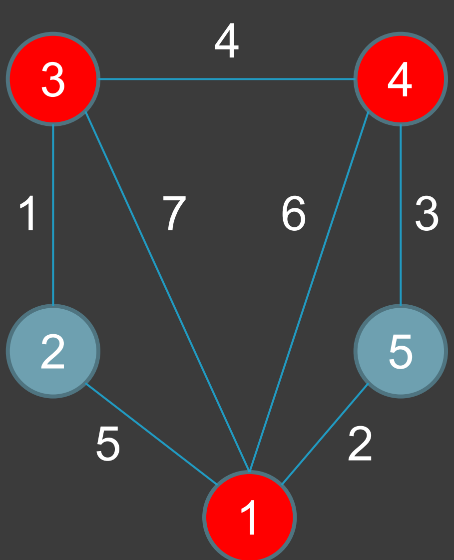
Формальная постановка задачи

Обозначения:

- Выделенное подмножество вершин X’;
- d-й маршрут, соединяющий p-ю и q-ю вершины $L^d(p,q)$.
- $$\begin{cases} \sum_i \sum_j r(i,j)\cdot z(i,j) \Rightarrow \min; \\ \forall x_p \in X', \forall x_q \in X' : \sum_d \prod_{(i,j)\in L^d(p,q)} z(i,j) \geq 1; \\ \forall (i,j) \in U : z(i,j) = 1,0. \end{cases}$$

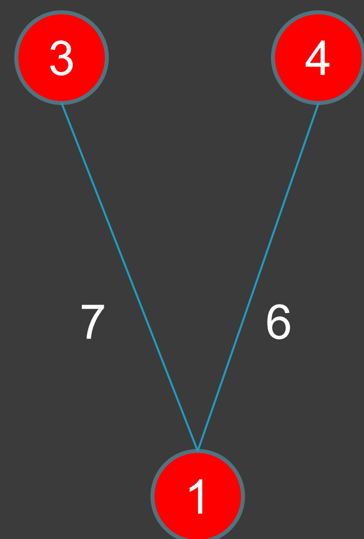
ПРИМЕР ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ПРИМА («ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ» ВЕРШИНЫ ВЫДЕЛЕНЫ КРАСНЫМ ЦВЕТОМ)

Исходный граф G(X,U)



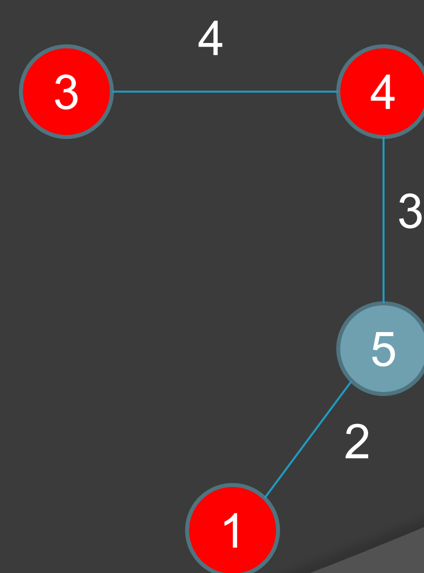
S = 28

Допустимое решение



S = 13

Оптимальное решение



S = 9

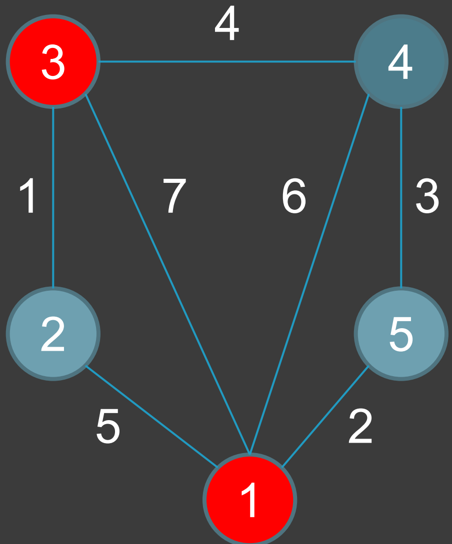
Важный частный случай обобщенной задачи Прима

- Содержательная постановка задачи поиска кратчайшего маршрута: на взвешенном неориентированном графе G(X,U) выделены две вершины, p-я и q-я, для которых следует выделить подмножество ребер U’, такое, что:
- На графе G(X,U’) существует маршрут между этими вершинами.
- Суммарный вес ребер подмножества U’ минимален.

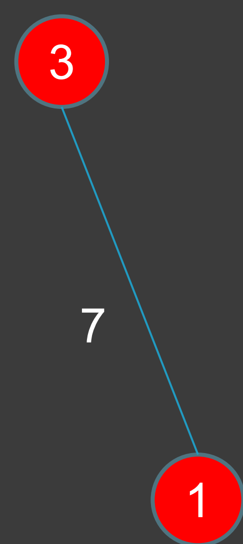
ПРИМЕР задачи поиска кратчайшего маршрута

Исходный граф Допустимое Оптимальное

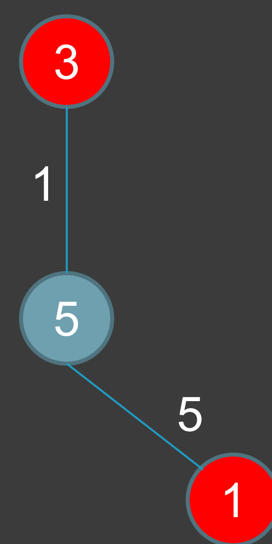
G(X,U) решение решение



S = 28



S = 7



S = 6

Формальная постановка задачи

Обозначения:

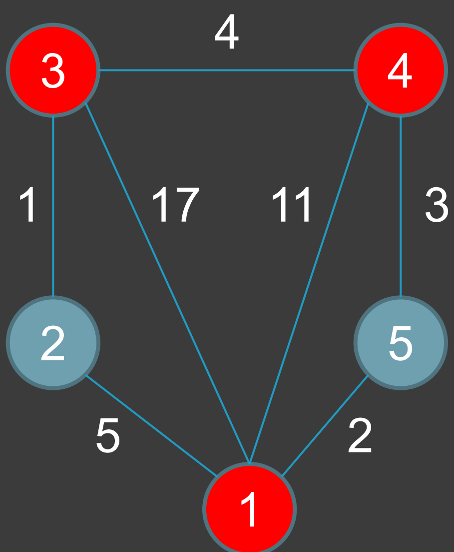
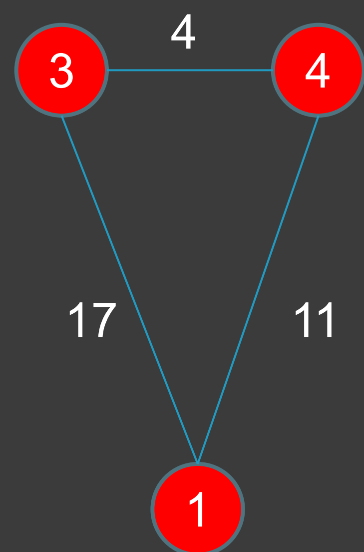
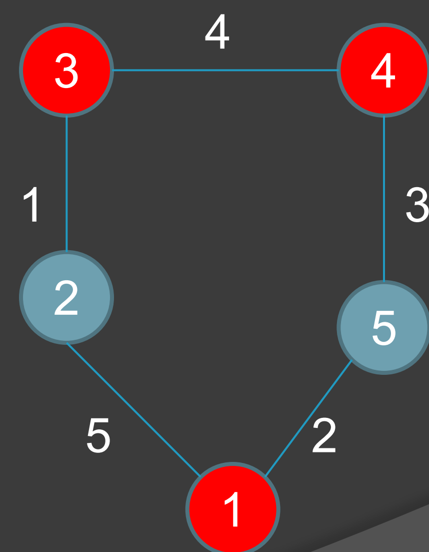
- Выделенное подмножество вершин X’;
- d-й маршрут, соединяющий p-ю и q-ю вершины $L^d(p,q)$.
- $$\begin{cases} \sum_i \sum_j r(i,j) \cdot z(i,j) \Rightarrow \min; \\ \sum_d \prod_{(i,j)\in L^d(p,q)} z(i,j) \ge 1; \\ \forall (i,j) \in U : z(i,j) = 1,0. \end{cases}$$

Поиск цикла минимальной длины

Содержательная постановка задачи.

На множестве циклов A(G), отвечающих взвешенному графу G(X,U), требуется выбрать такой, суммарный вес ребер которого минимален.

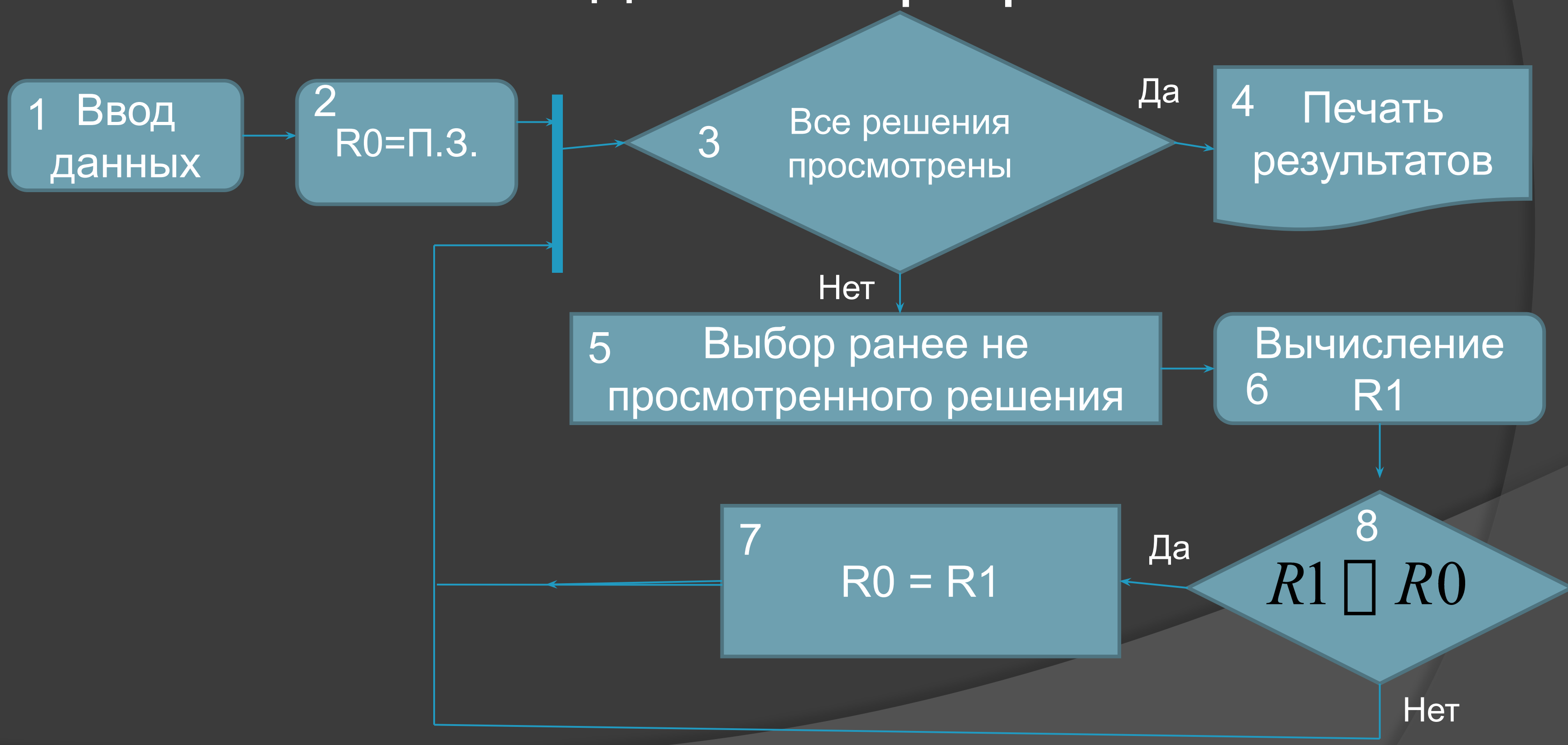
Пример задачи поиска минимального цикла

Исходный граф G(X,U)	Допустимое решение	Оптимальное решение
		
S = 43	S = 32	S = 15

Алгоритм полного перебора и его компоненты

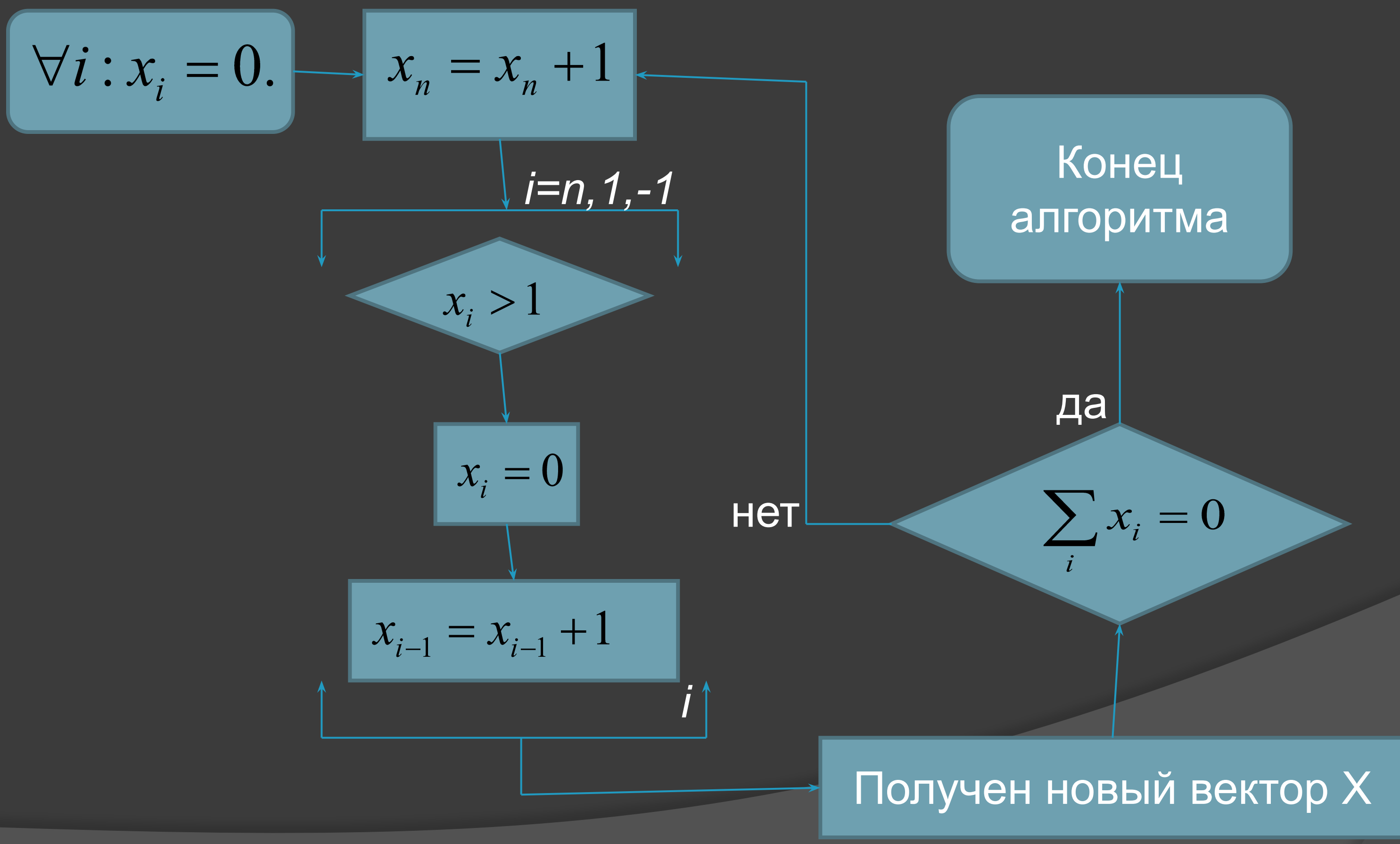
АЛГОРИТМ ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА

Алгоритм решения любой экстремальной задачи на графах



Бинарный счетчик

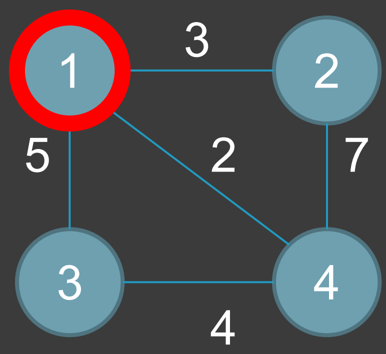
Шаг 5 предыдущего алгоритма



Примеры применения полного перебора

Пример 1: задача о минимаксных маршрутах

Граф G(X,U):



i	x(1,3)	X(2,4)	X(1,2)	X(1,4)	X(3,4)	R
1	0	0	0	0	0	∞
2	0	0	0	0	1	∞
3	0	0	0	1	0	∞
4	0	0	0	1	1	∞
5	0	0	1	0	0	∞
6	0	0	1	0	1	∞
7	0	0	1	1	0	∞
8	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**6**
9	0	1	0	0	0	∞
10	0	1	0	0	1	∞

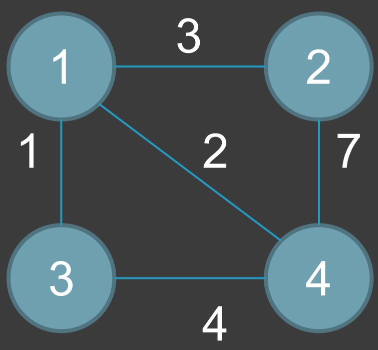
Базовая вершина

i = 1, 2, 3…, 32.

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.

Пример 2: задача Прима

Граф G(X,U):



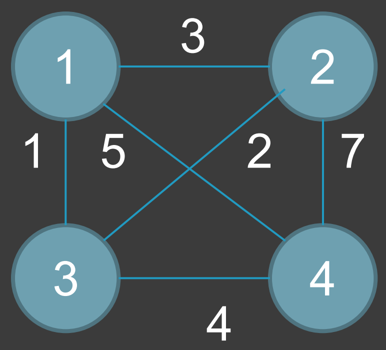
i	x(1,3)	X(2,4)	X(1,2)	X(1,4)	X(3,4)	R
1	0	0	0	0	0	∞
2	0	0	0	0	1	∞
3	0	0	0	1	0	∞
4	0	0	0	1	1	∞
5	0	0	1	0	0	∞
6	0	0	1	0	1	∞
7	0	0	1	1	0	∞
8	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**9**
9	0	1	0	0	0	∞
10	0	1	0	0	1	∞

i = 1, 2, 3…, 32.

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.

Пример 3: поиск кратчайшего цикла

Граф G(X,U):



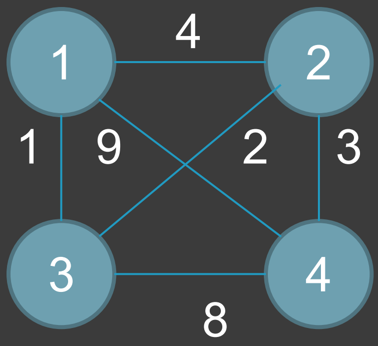
	X(2,3)	x(1,3)	X(3,4)	X(1,2)	X(1,4)	X(2,4)	R
1	0	0	0	0	0	0	∞
2	0	0	0	0	0	1	∞
3	0	0	0	0	1	0	∞
4	0	0	0	0	1	1	∞
5	0	0	0	1	0	0	∞
6	0	0	0	1	0	1	∞
7	0	0	0	1	1	0	∞
8	0	0	0	1	1	1	12
9	0	0	1	0	0	0	∞
10	0	0	1	0	0	1	∞

i = 1, 2, 3…, 64. При i=8 найден цикл, длина которого равна 12.

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.

Пример 4: поиск кратчайшего маршрута из h-й вершины в g-ю

Граф G(X,U):



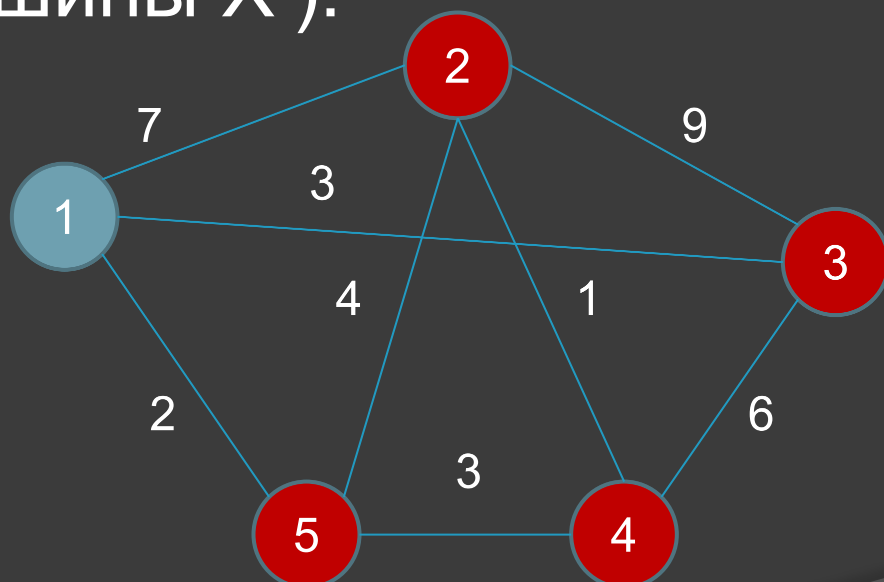
	X(2,3)	x(1,3)	X(3,4)	X(1,2)	X(1,4)	X(2,4)	R
1	0	0	0	0	0	0	∞
2	0	0	0	0	0	1	∞
3	0	0	0	0	1	0	9
4	0	0	0	0	1	1	9
5	0	0	0	1	0	0	∞
6	0	0	0	1	0	1	7
7	0	0	0	1	1	0	9
8	0	0	0	1	1	1	7
9	0	0	1	0	0	0	∞
10	0	0	1	0	0	1	∞

i = 1, 2, 3…, 64. Поиск кратчайшего маршрута из 1-й вершины в 4-ю.

Самостоятельно просмотреть следующие 10 планов.

САМОСТОЯТЕЛЬНО

- Пользуясь полным перебором решить обобщенную задачу Прима на графе G(X,U) вида (красным цветом выделены вершины X’):



Контрольные вопросы

- Какие задачи дискретной оптимизации на графах можно решить полным перебором?
- Достоинства полного перебора.
- Недостатки полного перебора.
- Какова верхняя граница объема полного перебора при решении им задачи Прима на графе $G(X,U)$, если $X = n$?

Индивидуальные задания

На заданном взвешенном неориентированном графе G(X,U) определить <u>перебором</u> (12 итераций):

- 1. Кратчайший маршрут между i-й и j-й вершинами.
- 2. Минимальную базу ребер, связывающих три вершины: i, j, k.
- 3. Минимальный простой цикл на графе.
- 4. <u>Минимаксную</u> базу ребер, связывающих все вершины графа.
- 5. <u>Минимаксный</u> простой цикл на графе

Величины i, j, k

№	i	j	k	№	i	j	k
1	1	3	5	13	5	4	1
2	1	2	4	14	5	4	2
3	1	3	4	15	5	4	3
4	2	3	5	16	4	1	2
5	2	4	5	17	4	2	3
6	1	2	5	18	4	2	5
7	1	2	3	19	4	1	5
8	4	3	5	20	4	3	2
9	3	2	5	21	4	3	5
10	3	1	5	22	4	3	1
11	3	1	4	23	5	2	1
12	3	2	4	24	5	3	2

Матрицы смежности вершин

№ 1

0	2	0	0	4
2	0	5	0	1
0	5	0	3	0
0	0	3	0	8
4	1	0	8	0

№ 2

0	2	0	0	4
2	0	6	1	0
0	6	0	3	0
0	1	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 3

0	7	2	0	3
7	0	8	0	1
2	8	0	4	0
0	0	4	0	5
3	1	0	5	0

№ 4

0	9	2	3	0
9	0	7	0	1
2	7	0	4	0
3	0	4	0	5
0	1	0	5	0

Матрицы смежности вершин

№ 5

0	2	0	0	4
2	0	5	6	1
0	5	0	3	0
0	6	3	0	8
4	1	0	8	0

№ 6

0	9	0	0	4
9	0	6	1	0
0	6	0	3	0
0	1	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 7

0	7	8	0	3
7	0	2	0	1
8	2	0	4	0
0	0	4	0	5
3	1	0	5	0

№ 8

0	1	2	3	0
1	0	7	0	9
2	7	0	4	0
3	0	4	0	5
0	9	0	5	0

Матрицы смежности вершин

№ 9

0	2	0	0	4
2	0	5	0	6
0	5	0	7	0
0	0	7	0	3
4	6	0	3	0

№ 10

0	2	0	0	4
2	0	6	1	0
0	6	0	3	0
0	1	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 11

0	7	2	0	1
7	0	3	0	9
2	3	0	4	0
0	0	4	0	5
1	9	0	5	0

№ 12

0	1	2	3	0
1	0	7	0	1
2	7	0	2	0
3	0	2	0	5
0	1	0	5	0

Матрицы смежности вершин

№ 13

0	6	0	0	4
6	0	5	0	8
0	5	0	7	0
0	0	7	0	1
4	8	0	1	0

№ 14

0	5	0	0	6
5	0	2	1	0
0	2	0	3	0
0	1	3	0	8
6	0	0	8	0

№ 15

0	7	9	0	3
7	0	8	0	10
9	8	0	4	0
0	0	4	0	5
3	10	0	5	0

№ 16

0	9	12	3	0
9	0	10	0	11
12	10	0	4	0
3	0	4	0	5
0	11	0	5	0

Матрицы смежности вершин

№ 17

0	2	0	1	4
2	0	5	0	0
0	5	0	3	0
1	0	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 18

0	2	0	5	4
2	0	6	10	0
0	6	0	3	0
5	10	3	0	8
4	0	0	8	0

№ 19

0	7	6	0	10
7	0	8	0	1
6	8	0	4	0
0	0	4	0	5
10	1	0	5	0

№ 20

0	3	12	3	8
3	0	7	0	11
12	7	0	4	0
3	0	4	0	5
8	11	0	5	0

Матрицы смежности вершин

№ 21

0	12	0	0	14
12	0	5	0	10
0	5	0	3	0
0	0	3	0	2
14	10	0	2	0

№ 22

0	4	0	0	2
4	0	6	0	0
0	6	0	3	0
0	10	3	0	8
2	0	0	8	0

№ 23

0	7	2	0	3
7	0	8	0	1
2	8	0	4	0
0	0	4	0	5
3	1	0	5	0

№ 24

0	9	2	3	0
9	0	7	0	1
2	7	0	4	0
3	0	4	0	5
0	1	0	5	0