



# Решение комбинаторных задач. Правило произведения

МОУ СОШ №12 г.о.Жуковский  
Московской области  
Богданова С.В.



## Эпиграф урока:



«Число, место и  
комбинация – три  
взаимно  
перекрещивающиеся, но  
отличные сферы  
мышления, к которым  
можно отнести все  
математические идеи».

Дж. Сильвестр

# Что такое комбинаторика?

**Комбинаторика** – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Выбором объектов и расположением их в том или ином порядке приходится заниматься чуть ли не во всех областях человеческой деятельности, например конструктору, разрабатывающему новую модель механизма, ученому-агроному, планирующему распределение с/х культур на нескольких полях, химику, изучающему строение органических молекул, имеющих данный атомный состав.

## Из истории комбинаторики

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов. В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел.

Комбинаторные задачи возникли и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. Комбинаторика становится наукой лишь в 18 в. – в период, когда возникла теория вероятности.





## В Древней

**Греции** считывали число различных комбинаций длинных и коротких слогов в стихотворных размерах, занимались теорией фигурных чисел, изучали фигуры, которые можно составить из частей и т.д.



**Со временем появились различные игры (нарды, карты, шашки, шахматы и т. д.)**

В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания фигур, и выигрывал тот, кто их лучше изучал, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрышных.



**Готфрид Вильгельм Лейбниц  
(1.07.1646 - 14.11.1716)**

Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика».



**Леонард Эйлер(1707-1783)**

рассматривал задачи о разбиении чисел, о паросочетаниях, циклических расстановках, о построении магических и латинских квадратов, положил начало совершенно новой области исследований, выросшей впоследствии в большую и важную науку—топологию, которая изучает общие свойства пространства и фигур.





Для вывода формул автор использовал наиболее простые и наглядные методы, сопровождая их многочисленными таблицами и примерами. Сочинение **Я. Бернулли** превзошло работы его предшественников и современников систематичностью, простотой методов, строгостью изложения и в течение XVIII века пользовалось известностью не только как серьёзного научного трактата, но и как учебно-справочного издания.

# Методы решения комбинаторных задач

1. Правило суммы.
2. Правило произведения
3. Таблицы.
4. Графы (деревья).
5. Формулы.



# Правило суммы

Если элемент А может быть выбран  $k_1$  способами, а элемент В –  $k_2$  способами, причем выборы А и В являются взаимно исключающими, то выбор «либо А, либо В» может быть осуществлен  $k_1+k_2$  способами.

**Задача 1.** Сколько существует способов выбрать кратное двум или трем число из множества чисел : 2,3,4,15,16,20,21,75,28 ?

**Решение:**  $k_1=5$  –кратное 2 (2,4,16,20,28),  
 $k_2=4$  – кратное 3 (3,15,21,75)  
 $k_1+k_2 = 5+4 = 9$

# Правило произведения

Если элемент А может быть выбран  $k_1$  способами, а элемент В –  $k_2$  способами, то выбор «А и В» может быть осуществлен  $k_1 \times k_2$  способами.

**Задача 2. а)** Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7,9?

**Решение:**  $N = 5 \times 5 = 25$  ( Если не сказано, что элемент не повторяется, то выборка с повторениями)

**б)** Сколько среди них чисел, кратных 5?

**Решение:** Число кратно 5, если оканчивается цифрой 5 или 0. В нашем случае – 5. На первой позиции фиксируем одну из пяти цифр, на второй – 5.

$$N = 5 \times 1 = 5$$

# Правило произведения

**в)** Сколько среди них чисел, кратных 11?

**Решение:** Двухзначное число кратно 11, если обе его цифры одинаковы.  $N = 5$

**г)** Сколько среди них чисел, кратных 3?

**Решение:** Число кратно 3, если сумма его цифр делится на 3. Составим всевозможные пары:

1 - 1   **3 - 3**   5 - 5   7 - 7   **9 - 9**

1 - 3   3 - 5   **5 - 7**   7 - 9

**1 - 5**   3 - 7   5 - 9

1 - 7   **3 - 9**

1 - 9

Таких пар 15. Среди них 5 пар, сумма которых делится на 3, причем три пары допускают перестановку, т.е. могут образовать по два разных числа. Всего  $5 + 3 = 8$  различных двухзначных чисел.



# Правило произведения

**Задача 3.** Сколько существует способов занять 1-ое, 2-ое и 3-е места на чемпионате по футболу, в котором участвуют

**а)** 10 команд

**Решение:**  $N=10 \times 9 \times 8 = 720$

**б)** 11 команд?

**Решение:**  $N=11 \times 10 \times 9 \times 8 = 990$



# Правило произведения

**Задача 4.** Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр **0, 1, 2, 3, 4**, если  
**а)** цифры не повторяются?

**Решение:** На первом месте одна из 4-х цифр (**0** не может быть), на 2-ом – одна из оставшихся 4-х:  
 $N=4 \times 4 = 16$

**б)** цифры могут повторяться

**Решение:** На 1-ом месте может быть одна из 4-х цифр, на 2-ом – одна из 5 (**0** входит):  
 $N=4 \times 5 = 20$

# Правило произведения

**Задача 5.** Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде четырех горизонтальных полос, одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый, синий, красный, зеленый. У каждой страны свой, отличный от других, флаг.

**а)** Сколько всего стран могут использовать такую символику?

**Решение:** Цвет верхней полосы можно выбрать одним из 4 способов, второй полосы – одним из трех оставшихся, цвет 3 полосы – одним из 2 оставшихся, а 4 – одним способом. По правилу произведения  $N=4 \times 3 \times 2 \times 1=24$





# Правило произведения

**б)** Сколько стран могут использовать такую символику с синей и красной полосами, расположенными рядом?

**Решение:** Две полосы, всегда расположенные рядом, можно рассматривать как одну полосу, тогда полос останется 3, из них можно составить  $3 \times 2 \times 1 = 6$  разных флагов. Но две полосы (синюю и красную) можно «склеить» по-разному: синяя, а под ней красная, или красная, а под ней синяя. Поэтому общее количество вариантов по правилу суммы равно  $6 + 6 = 12$



# Правило произведения

**в)** Сколько всего стран могут использовать такую символику с нижней белой полосой?

**Решение:** Если фиксировать цвет нижней полосы, то цвета трех расположенных над ней полос можно выбрать  $3 \times 2 \times 1 = 6$  способами

**г)** Сколько стран могут использовать такую символику с верхней белой полосой?

**Решение:** Если фиксировать цвет белой полосы, то цвета следующих полос можно выбрать  $3 \times 2 \times 1 = 6$  способами.

# Правило произведения

- **Задача 6.** В клетки квадратной таблицы  $2 \times 2$  произвольно ставят крестики и нолики.
- **а)** Сколькими способами можно заполнить эту таблицу?
- **Решение:** Для заполнения первой клетки есть 2 способа (крестик или нолик); для заполнения каждой последующей – тоже 2 способа; общее количество способов заполнить таблицу по правилу произведения равно  $2 \times 2 \times 2 = 16$ .

X	X
0	0

X	X
0	0



# Правило произведения

**б)** В скольких случаях в верхней левой и нижней правой будут разные значки?

**Решение:** Если в верхней клетке – крестик, а нижней – нолик, то остальные клетки можно заполнить  $2 \times 2 = 4$  способами. Если в верхней клетке – нолик, в нижней – крестик, то еще 4 способа заполнения. Всего  $4 + 4 = 8$  способов.

<b>X</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>

## Правило произведения

**в)** В скольких случаях в левой нижней клетке будет стоять крестик?

**Решение:** Если в левой нижней клетке фиксируем крестик, то остальные 3 клетки можно заполнить  $2 \times 2 \times 2 = 8$  различными способами

X	X
X	X

X	0
X	0

# Правило произведения

- **Задача 7.** Сколькими способами можно посадить шестерых школьников на скамейку так, чтобы Коля и Оля оказались рядом?
- **Решение:** Будем считать, что на скамейке 6 пустых мест. Посадить Колю можно шестью способами, после чего Олю посадить рядом с ним одним или двумя способами. Это зависит от того, куда мы посадили Колю – на крайнее место или нет.



# Правило произведения

---

- Пусть Коля сидит на краю. Место на краю можно выбрать 2 способами, после чего Олю можно посадить одним способом, после чего оставшиеся 4 места можно занять  $4 \times 3 \times 2 \times 1$  способами, значит, всего  $2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$  способов
- Коля сидит где-то в середине. Место для Коли можно выбрать 4 способами, Олю можно посадить 2 способами, значит, всего  $4 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 192$  способами.
- По правилу сложения  $48 + 192 = \mathbf{240}$  способов



## Правило произведения

---

- **Задача 8.** Из цифр 1,2,3,5 составили все возможные четырехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких чисел, которые больше 2000, но меньше 5000?
- **Решение:** Выбор 1-ой цифры – 2 способа (3,4), 2-ой цифры – 3 способа, третьей – 2 способа, четвертой -1. По правилу произведения  $N=2 \times 3 \times 2 \times 1=12$  чисел.

# Правило произведения

- **Задача 9.** На входной двери дома установлен домофон, на котором нанесены цифры 0,1,2,...9. Каждая квартира получает кодовый замок из двух цифр типа 0-2, 3-7 и т.п. Хватит ли кодовых замков для всех квартир, если в доме 96 квартир? (код 0-0 не существует)
- **Решение:** Выбор 1-й цифры – 10 вариантов, 2-й – 10 вариантов.
- Всего  $10 \times 10 - 1 = 99$  вариантов
- Ответ: хватит.



# Правило произведения

---

- **Задача 10.** В контрольной работе будет 5 задач – по одной из каждой пройденной темы. Задачи будут взяты из общего списка по 10 задач в каждой теме, а всего было пройдено 5 тем. При подготовке к контрольной работе Вова решил только по 8 задач в каждой теме. Найдите:
- **а)** общее число всех возможных вариантов контрольной работы
- **Решение:** Каждая задача может быть выбрана 10 способами. По правилу произведения  $N=10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = \mathbf{100000}$

# Правило произведения

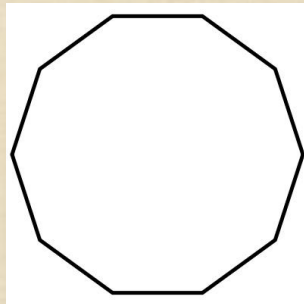
---

- **б)** число тех вариантов, в которых Вова умеет решать все 5 задач  
**Решение:**  $N=8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8=32768$
- **в)** число тех вариантов, в которых Вова не сможет решить ни одной задачи  
**Решение:**  $N=2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2=32$
- **г)** число тех вариантов, в которых Вова умеет решать все задачи, кроме первой.  
**Решение:**  $N=2 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8=8192$



# Правило произведения

- **Задача 11.** Три вершины правильного 10-угольника покрасили в рыжий цвет, а остальные – в черный. Сколько можно провести отрезков с разноцветными концами?
- **Решение:** Первую рыжую вершину можно соединить отрезком с любой из  $10 - 3 = 7$  черных вершин, после этого вторую рыжую вершину можно соединить отрезком с любой из 6 оставшихся черных вершин, а третью рыжую – с любой из 5 оставшихся черных вершин. Общее число вариантов (отрезков с разноцветными концами) по правилу произведения равно:
- $7 \times 6 \times 5 = 210$



# Правило произведения

---

- ⦿ **Задача 12.** Сколько ребер имеет полный граф (каждая вершина соединена с каждой), если количество его вершин 12?
- ⦿ **Решение:** Первую вершину можно выбрать из 12, вторую – из 11; всего  $12 \times 11 = 132$  пары. Но они учитывают порядок выбора (каждая пара входит дважды). Поэтому количество ребер равно  $12 \times 11 : 2 = 66$

## Таблицы вариантов

### ЗАДАЧА 13

- Составляя расписание уроков на понедельник для 7а класса, завуч хочет первым уроком поставить либо физику, либо алгебру, а вторым – либо русский язык, либо литературу, либо историю. Сколько существует вариантов составления расписания на первые два урока?
- **Решение:** Составим таблицу вариантов:
- Всего существует  $2 \times 3 = 6$  вариантов

1	2	русски й	литер	истори я
физик а	Русски й физик а	Литер физик а	Истори я физик а	
алгебр а	Русски й алгебр а	Литер алгебр а	Истори я алгебр а	

## Таблицы вариантов

### ЗАДАЧА 14

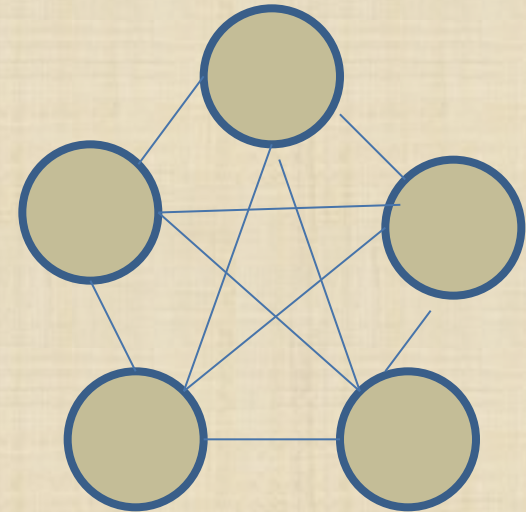
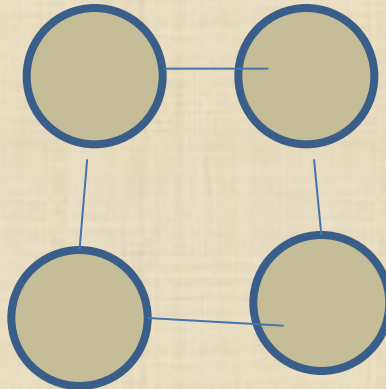
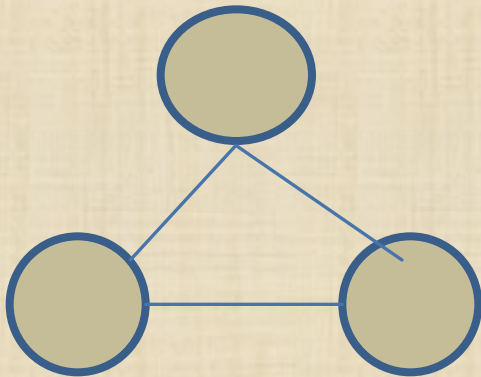
- Сколько двузначных чисел, кратных 3, можно получить из цифр 1,3,5,7,9?
- **а)** цифры не повторяются -
- 6 вариантов  
(15,39,57,51,75,93)
- **б)** цифры могут повторяться – 8 вариантов (еще 33,99)

	1	3	5	7	9
1	<b>11</b>	13	15	17	19
3	31	<b>33</b>	35	37	39
5	51	53	<b>55</b>	57	59
7	71	73	75	<b>77</b>	79
9	91	93	95	97	<b>99</b>



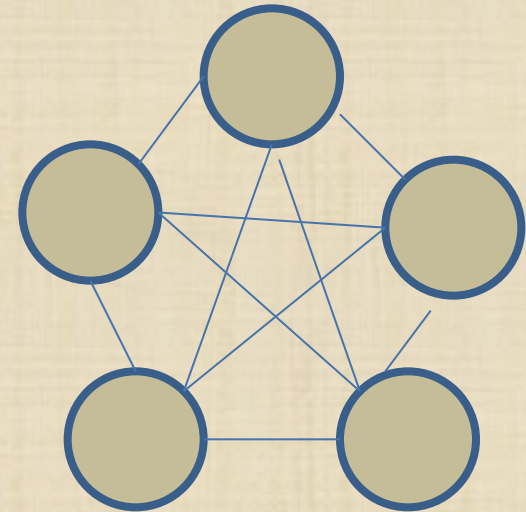
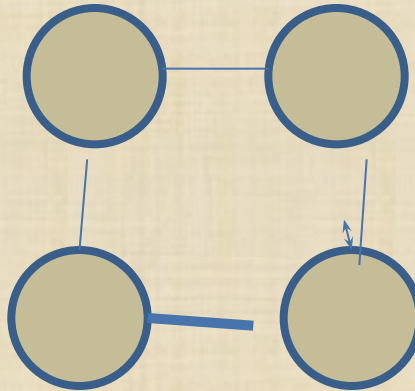
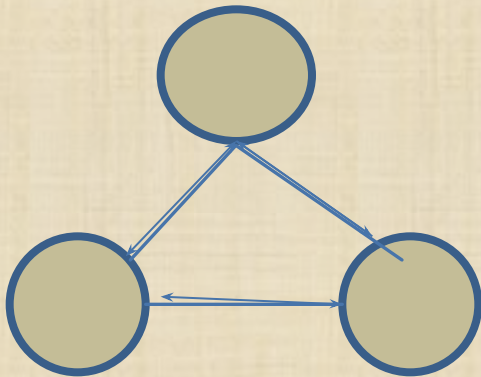
# Подсчет вариантов с помощью графов

- **Задача 15.** При встрече каждый из друзей пожал другому руку. Сколько было рукопожатий, если друзей:
- **а) трое ; б) четверо ; в) пятеро?**
- N=3            N=6            N=10



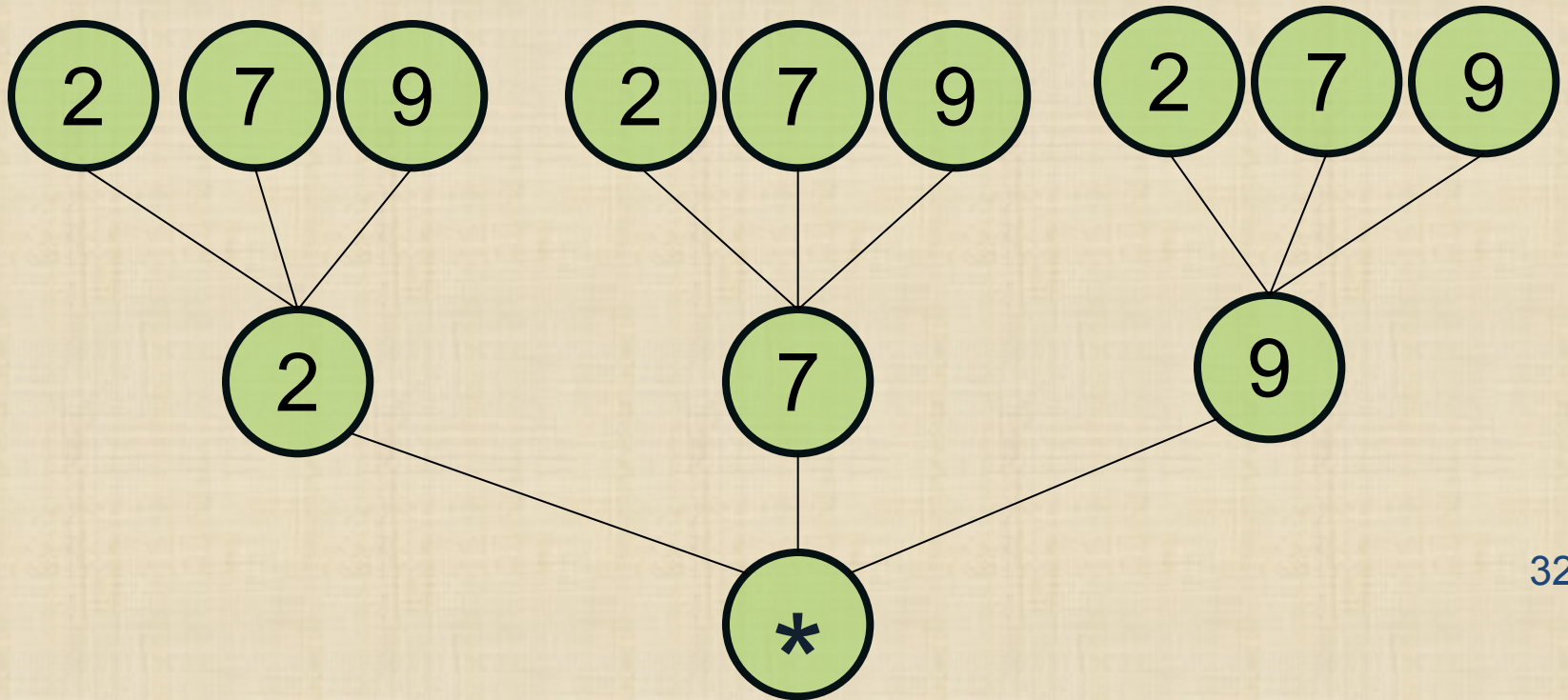
# Подсчет вариантов с помощью графов

- **Задача 16.** По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками. Сколько всего визитных карточек было роздано, если специалистов было
  - **а) трое ; б) четверо ; в) пятеро?**
  - N=3            N=6            N=10



**Задача 17.** Сколько различных двухзначных чисел можно записать, используя цифры 2, 7, 9 если цифры в этих числах могут повторяться?

22    27    29    72    77    79    92    97    99



## Граф-дерево

---

- **Задача 18.** Маше на день рождения подарили 3 букета цветов: из роз (р), астр (а) и гвоздик (г). В доме было 2 вазы: хрустальная (х) и керамическая (к). Маша пробовала устанавливать каждый букет в каждую вазу. Перечислить все полученные сочетания букета с вазой.



# Виды выборок

---

- Перестановки без повторений
- Размещения без повторений
- Сочетания без повторений
- Размещения с повторениями (строки)
- Перестановки с повторениями
- Сочетания с повторениями
- Разбиения
- Подмножества

## Формулы комбинаторики

**Факториал** числа - произведение  $n$  первых натуральных чисел обозначается  $n!$

$$5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120; \quad n! = 1 * 2 * 3 * \dots * (n-1) * n$$

**Перестановка без повторений.**

**Задача 19.** Даны цифр: 1,2,3,4,5,6,7. Сколько различных чисел можно составить из этих цифр? Каждое число является перестановкой из 7 элементов.

Примеры: 1234567, 2354167, 7546321.

Перестановка-упорядоченное множество.

Число перестановок из  $n$  элементов вычисляют по формуле  $P_n = n!$ .

По условию  $n=7$

Так из 7 цифр можно  $7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$  различных чисел.

# Формулы комбинаторики

---

**Перестановка с повторениями.**

**Задача 20** .Даны цифр: 1,2,2,3,3,3,4,. Сколько различных чисел можно составить из этих цифр? Каждое число является перестановкой из 7 элементов.

Примеры: 1223334, 4232331,2233314.

Некоторые числа при перестановке одинаковых цифр не меняется. Число таких перестановок вычисляется по формуле  **$P_n = n! / (n_1! * n_2! * n_3!)$** .

По условию  **$n=7, n_1=2, n_2=3$**

Получаем  **$7! / (2! * 3!) = 5040 / 12 = 420$**  различных чисел.

# Формулы комбинаторики

---

## Сочетание.

**Задача 21.** Имеется 7 цветных карандашей. Выбирается 3 карандаша. Сколько существует способов выбрать 3 карандаша, чтобы не было повторяющихся наборов? Выборка из трёх карандашей – это сочетание из 7-ми по 3 элемента в каждом.

Сочетание - неупорядоченная выборка.

Число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  в каждом находим по формуле:  **$C_n = n! / (m! * (n-m)!)$ .**

**Решение:**  $7! / (4! * 3!) = 7 * 6 * 5 = 210$

**Задача 22.** В классе обучается 20 человек. Сколько существует способов выбрать актив, состоящий из 4 человек?

**Решение.** Находим число сочетаний из 20 элементов по 4 в каждом:  $20! / (4! * 16!) = 17 * 18 * 19 * 20 / 24 = 4845$  способов выбрать актив.



# Формулы комбинаторики

---

**Размещение.**

**Задача 23.** Буквы алфавита записаны на карточках. Выбирается 4 карточки и затем из набора составляют различные слова. Под словом будем понимать порядок следования букв. Например: *плот, лотп, лпот*- разные слова. Каждое полученное слово-это размещение.

Размещение –упорядоченная выборка

Число размещений из  $n$  элементов по  $m$  в каждом находим по формуле:  **$A_n = n!/(n-m)!$** .

Сколько слов можно получить в предложенной задаче? По формуле получаем решение

$$32!/(32-4)! = 32!/28! = 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 = 863040$$

Источники:

В.Н.Студеницкая.. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей

Разработка презентации Шаховой Т.А. из Мурманска ( оформление) «Учительский портал», ,Степушкиной Н.Ю. Спасибо!!!