Решение комбинаторных задач. Правило произведения

МОУ СОШ №12 г.о.Жуковский
Московской области
Богданова С.В.

Эпиграф урока:

«Число, место и комбинация – три взаимно перекрещивающиеся, но отличные сферы мышления, к которым можно отнести все математические идеи».

Дж. Сильвестр

Что такое комбинаторика?

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Выбором объектов и расположением их в том или ином порядке приходится заниматься чуть ли не во всех областях человеческой деятельности, например конструктору, разрабатывающему новую модель механизма, ученому-агроному, планирующему распределение с/х культур на нескольких полях, химику, изучающему строение органических молекул, имеющих данный атомный состав.

Из истории комбинаторики

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов. В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел.

Комбинаторные задачи возникли и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. Комбинаторика становится наукой лишь в 18 в. – в период, когда возникла теория вероятности.

В Древней Греции

подсчитывали число различных комбинаций длинных и коротких слогов в стихотворных размерах, занимались теорией фигурных чисел, изучали фигуры, которые можно составить из частей и т.д.

Со временем появились различные игры (нарды, карты, шашки, шахматы и т. д.)

В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания фигур, и выигрывал тот, кто их лучше изучал, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрышных.

Готфрид Вильгельм Лейбниц (1.07.1646 - 14.11.1716)

Комбинаторику, как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий ученый Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666г. Он также впервые ввел термин «Комбинаторика».

Леонард Эйлер(1707-1783)

рассматривал задачи о разбиении чисел, о паросочетаниях, циклических расстановках, о построении магических и латинских квадратов, положил начало совершенно новой области исследований, выросшей впоследствии в большую и важную науку—топологию, которая изучает общие свойства пространства и фигур.

Для вывода формул автор использовал наиболее простые и наглядные методы, сопровождая их многочисленными таблицами и примерами. Сочинение Я. Бернулли превзошло работы его предшественников и современников систематичностью, простотой методов, строгостью изложения и в течение XVIII века пользовалось известностью не только как серьёзного научного трактата, но и как учебно-справочного издания.

Методы решения комбинаторных задач

1. Правило суммы.
2. Правило произведения
3. Таблицы.
4. Графы (деревья).
5. Формулы.

Правило суммы

Если элемент А может быть выбран к1 способами, а элемент В – к2 способами, причем выборы А и В являются взаимно исключающими, то выбор «либо А, либо В» может быть осуществлен к1+к2 способами.

Задача 1. Сколько существует способов выбрать кратное двум или трем число из множества чисел : 2,3,4,15,16,20,21, 75,28 ?

Решение: к1=5 –кратное 2 (2,4,16,20,28),

к2=4 – кратное 3 (3,15,21,75)

к1+к2 = 5+4 = 9

Правило произведения

Если элемент А может быть выбран к1 способами, а элемент В – к2 способами, то выбор «А и В» может быть осуществлен к1хк2 способами.

Задача 2. а) Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7,9?

Решение: $N = 5 \times 5 = 25$ (Если не сказано, что элемент не повторяется, то выборка с повторениями)

б) Сколько среди них чисел, кратных 5?

Решение: Число кратно 5, если оканчивается цифрой 5 или 0. В нашем случае – 5.
На первой позиции фиксируем одну из пяти цифр, на второй – 5.

$N = 5 \times 1 = 5$

Правило произведения

в) Сколько среди них чисел, кратных 11?
Решение: Двузначное число кратно 11, если обе его цифры одинаковы. N= 5

г) Сколько среди них чисел, кратных 3?
Решение**:** Число кратно 3, если сумма его цифр делится на 3. Составим всевозможные пары:

1 -1 **3 -3** 5 – 5 7 – 7 **9 -9**
1 -3 3 -5 **5 – 7** 7 – 9
1 -5 3 -7 5 -9
1 -7 **3 – 9**
1 – 9

Таких пар 15. Среди них 5 пар, сумма которых делится на 3, причем три пары допускают перестановку, т.е. могут образовать по два разных числа. Всего 5+3=8 различных двузначных чисел.

Правило произведения

Задача 3. Сколько существует способов занять 1-ое, 2-ое и 3-е места на чемпионате по футболу, в котором участвуют

а) 10 команд

Решение: N=10х9х8=720

б) 11 команд?

Решение: N=11х10х9х8=990

Правило произведения

Задача 4. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр **0, 1,2,3,4**, если
а) цифры не повторяются?

Решение: На первом месте одна из 4-х цифр (0 не может быть), на 2-ом – одна из оставшихся 4-х:
N=4x4= 16

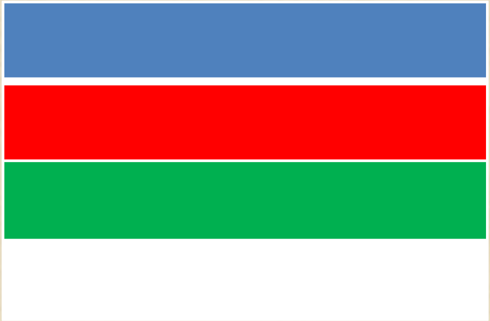
б) цифры могут повторяться
Решение: На 1-ом месте может быть одна из 4-х цифр, на 2-ом – одна из 5 (0 входит):
N=4x5= 20

Правило произведения

Задача 5. Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде четырех горизонтальных полос, одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый, синий, красный, зеленый. У каждой страны свой, отличный от других, флаг.

а)Сколько всего стран могут использовать такую символику?

Решение: Цвет верхней полосы можно выбрать одним из 4 способов, второй полосы – одним из трех оставшихся, цвет 3 полосы – одним из 2 оставшихся, а 4 – одним способом. По правилу произведения $N=4x3x2x1=24$



Правило произведения

б) Сколько стран могут использовать такую символику с синей и красной полосами, расположенными рядом?

Решение: Две полосы, всегда расположенные рядом, можно рассматривать как одну полосу, тогда полос останется 3, из них можно составить 3х2х1=6 разных флагов. Но две полосы (синюю и красную) можно «склеить» по-разному: синяя, а под ней красная, или красная, а под ней синяя. Поэтому общее количество вариантов по правилу суммы равно 6+6=12

Правило произведения

в) Сколько всего стран могут использовать такую символику с нижней белой полосой?

Решение: Если фиксировать цвет нижней полосы, то цвета трех расположенных над ней полос можно выбрать 3х2х1 = 6 способами

г) Сколько стран могут использовать такую символику с верхней белой полосой?
Решение: Если фиксировать цвет белой полосы, то цвета следующих полос можно выбрать 3х2х1 = 6 способами.

Правило произведения

- ***Задача 6***. В клетки квадратной таблицы 2х2 произвольно ставят крестики и нолики.
- **а)** Сколькими способами можно заполнить эту таблицу?
- ***Решение***: Для заполнения первой клетки есть 2 способа (крестик или нолик); для заполнения каждой последующей – тоже 2 способа; общее количество способов заполнить таблицу по правилу произведения равно 2х2х2х2=16.

Х	**Х**
0	**0**

Х	**Х**
0	**0**

Правило произведения

б) В скольких случаях в верхней левой и нижней правой будут разные значки?

Решение: Если в верхней клетке – крестик, а нижней – нолик, то остальные клетки можно заполнить 2х2=4 способами. Если в верхней клетке – нолик, в нижней – крестик, то еще 4 способа заполнения. Всего 4+4=8 способов.

Х	**0**
0	**0**

Правило произведения

в) В скольких случаях в левой нижней клетке будет стоять крестик?

Решение: Если в левой нижней клетке фиксируем крестик, то остальные 3 клетки можно заполнить 2x2x2=8 различными способами

X	**X**
X	**X**

X	**0**
X	**0**

Правило произведения

- ***Задача 7***. Сколькими способами можно посадить шестерых школьников на скамейку так, чтобы Коля и Оля оказались рядом?
- ***Решение***: Будем считать, что на скамейке 6 пустых мест. Посадить Колю можно шестью способами, после чего Олю посадить рядом с ним одним или двумя способами. Это зависит от того, куда мы посадили Колю – на крайнее место или нет.

Правило произведения

- Пусть Коля сидит на краю. Место на краю можно выбрать 2 способами, после чего Олю можно посадить одним способом, после чего оставшиеся 4 места можно занять 4х3х2х1 способами, значит, всего 2х1х4х3х2х2=48 способов

- Коля сидит где-то в середине. Место для Коли можно выбрать 4 способами, Олю можно посадить 2 способами, значит, всего
- 4х2х4х3х2х1=192 способами.

- По правилу сложения 48+192= **240** способов

Правило произведения

- ***Задача 8***. Из цифр 1,2,3,5 составили все возможные четырехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких чисел, которые больше 2000, но меньше 5000?

- ***Решение***: Выбор 1-ой цифры – 2 способа (3,4), 2-ой цифры – 3 способа, третьей – 2 способа, четвертой -1. По правилу произведения N=2x3x2x1=12 чисел.

Правило произведения

- **Задача 9.** На входной двери дома установлен домофон, на котором нанесены цифры 0,1,2,…9.Каждая квартира получает кодовый замок из двух цифр типа 0-2, 3-7 и т.п. Хватит ли кодовых замков для всех квартир, если в доме 96 квартир? (код 0-0 не существует)
- ***Решение:*** Выбор 1-й цифры – 10 вариантов, 2-й –10 вариантов.
- Всего 10х10 – 1 = 99 вариантов
- Ответ: хватит.

Правило произведения

- ***Задача 10***. В контрольной работе будет 5 задач – по одной из каждой пройденной темы. Задачи будут взяты из общего списка по 10 задач в каждой теме, а всего было пройдено 5 тем. При подготовке к контрольной работе Вова решил только по 8 задач в каждой теме. Найдите:
- ***а***) общее число всех возможных вариантов контрольной работы

- ***Решение***: Каждая задача может быть выбрана 10 способами. По правилу произведения N=10х10х10х10х10=**100000**

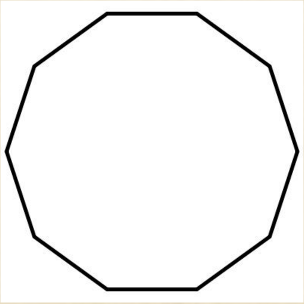
Правило произведения

- **б)** число тех вариантов, в которых Вова умеет решать все 5 задач
- ***Решение***: N=8x8x8x8x8=**32768**
- **в)** число тех вариантов, в которых Вова не сможет решить ни одной задачи
- ***Решение***: N=2x2x2x2x2=**32**
- **г)** число тех вариантов, в которых Вова умеет решать все задачи, кроме первой.
- ***Решение***: N=2x8x8x8x8=**8192**

Правило произведения

- ***Задача 11.*** Три вершины правильного 10-угольника покрасили в рыжий цвет, а остальные – в черный. Сколько можно провести отрезков с разноцветными концами?

- ***Решение:*** Первую рыжую вершину можно соединить отрезком с любой из 10 – 3 = 7 черных вершин, после этого вторую рыжую вершину можно соединить отрезком с любой из 6 оставшихся черных вершин, а третью рыжую – с любой из 5 оставшихся черных вершин. Общее число вариантов (отрезков с разноцветными концами) по правилу произведения равно:
- 7x6x5=**210**



Правило произведения

- *Задача 12*. ***Сколько ребер имеет полный граф (каждая вершина соединена с каждой), если количество его вершин 12?***
- ***Решение***: Первую вершину можно выбрать из 12, вторую – из 11; всего 12x11=132 пары. Но они учитывают порядок выбора (каждая пара входит дважды). Поэтому количество ребер равно 12x11:2=**66**

Таблицы вариантов

ЗАДАЧА 13

- Составляя расписание уроков на понедельник для 7а класса, завуч хочет первым уроком поставить либо физику, либо алгебру, а вторым – либо русский язык, либо литературу, либо историю. Сколько существует вариантов составления расписания на первые два урока?
- ***Решение:*** Составим таблицу вариантов:
- Всего существует 2х3 = 6 вариантов

1	2	русский	литер	история
физика		Русский физика	Литер физика	История физика
алгебра		Русский алгебра	Литер алгебра	История алгебра

Таблицы вариантов

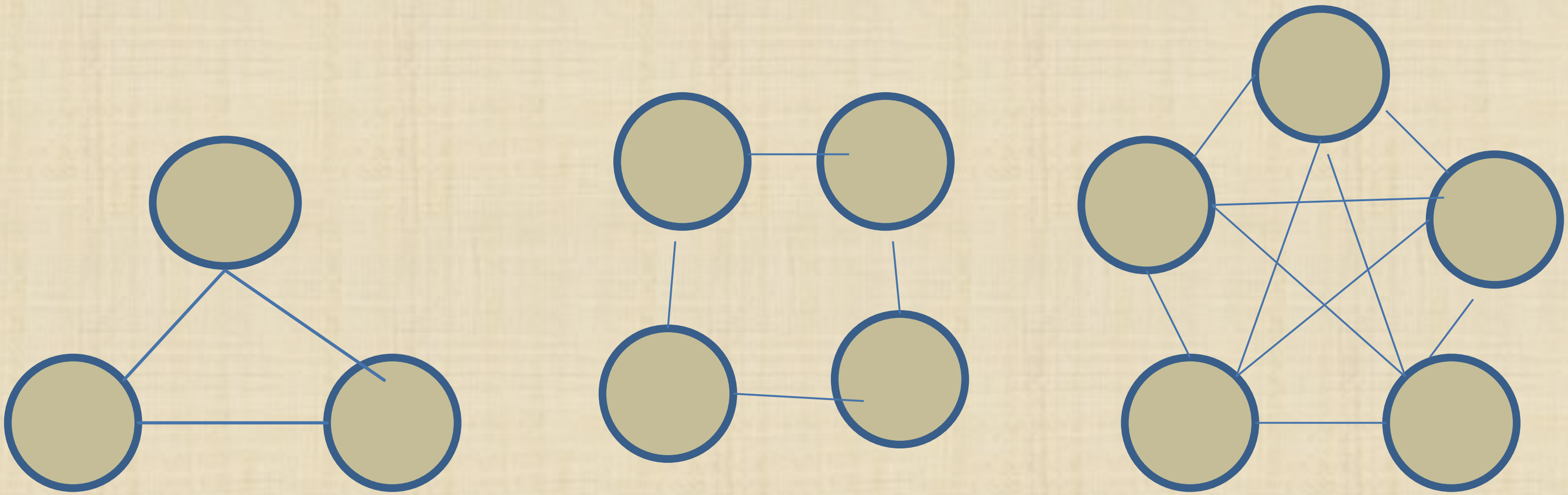
ЗАДАЧА 14

- Сколько двузначных чисел, кратных 3, можно получить из цифр 1,3,5,7,9?
- ***а)*** цифры не повторяются -
- 6 вариантов (15,39,57,51,75,93)
- ***б)*** цифры могут повторяться – 8 вариантов (еще 33,99)

	1	**3**	**5**	**7**	**9**
1	**11**	13	15	17	19
3	31	**33**	35	37	39
5	51	53	**55**	57	59
7	71	73	75	**77**	79
9	91	93	95	97	**99**

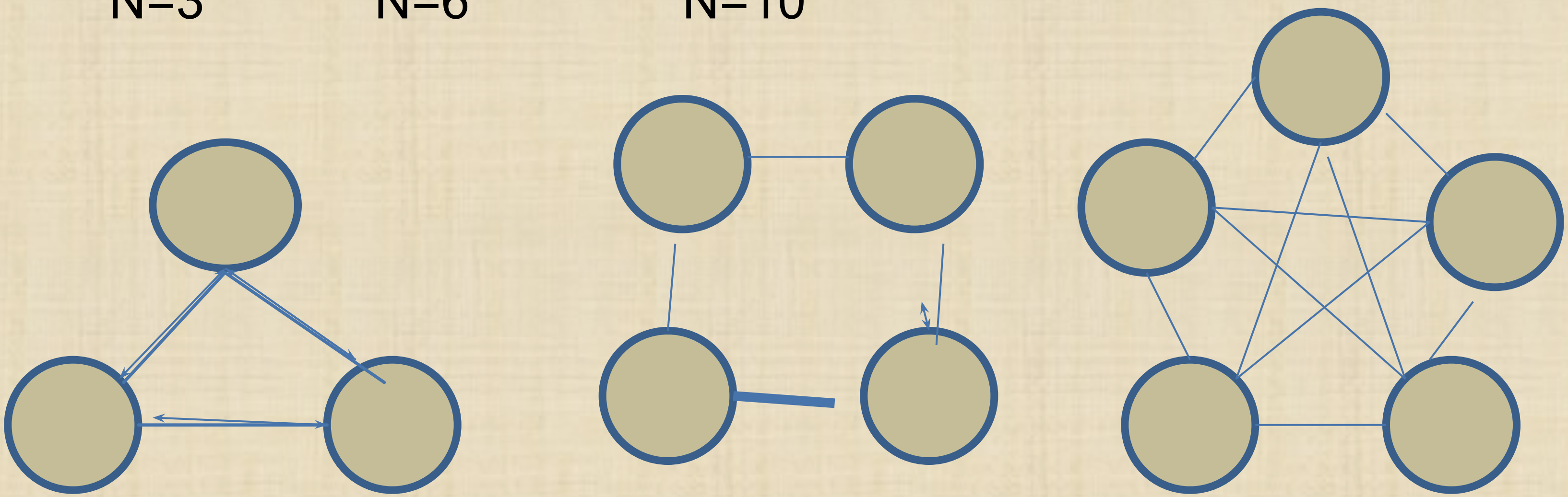
Подсчет вариантов с помощью графов

- ***Задача 15***. При встрече каждый из друзей пожал другому руку. Сколько было рукопожатий, если друзей*:*
- **а) трое ; б) четверо ; в) пятеро?**
- N=3 N=6 N=10



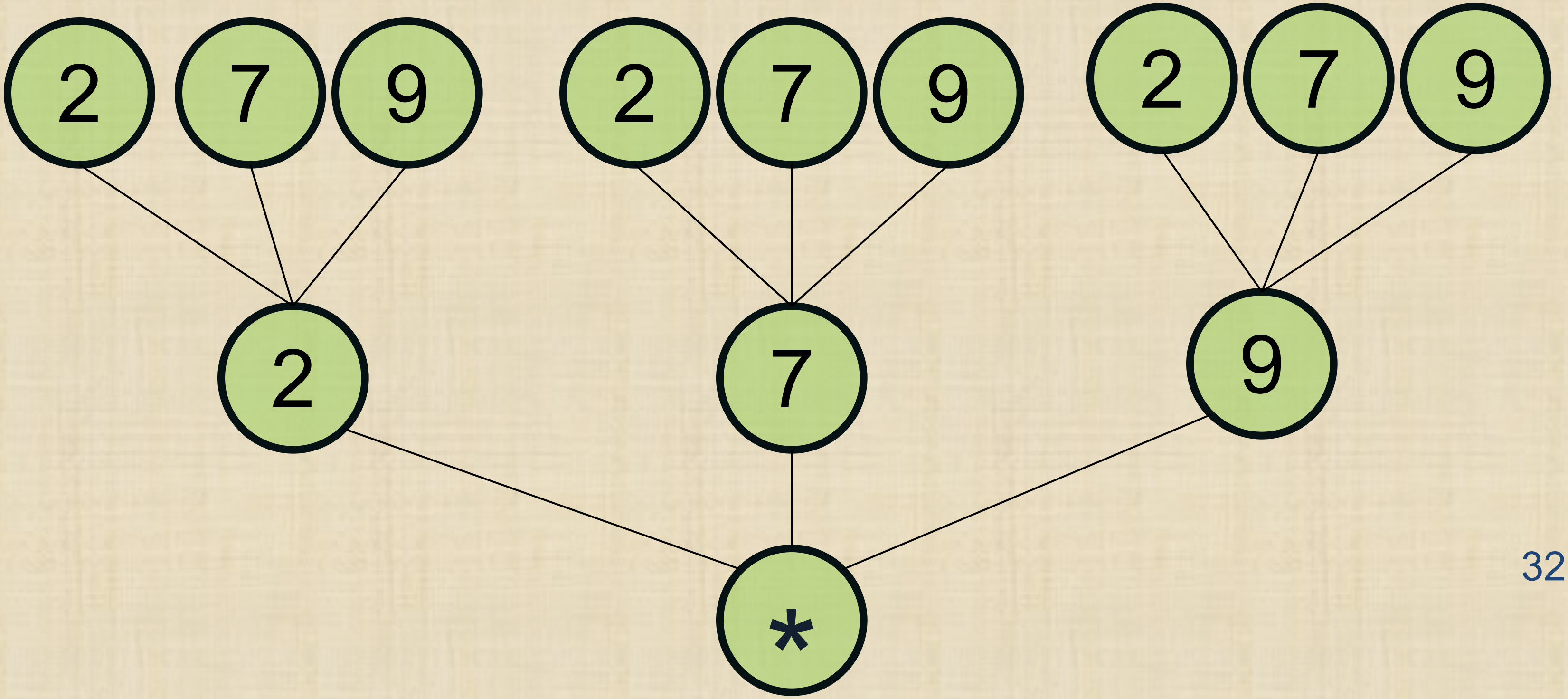
Подсчет вариантов с помощью графов

- *Задача 16.* По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками. Сколько всего визитных карточек было роздано, если специалистов было
- **а) трое ; б) четверо ; в) пятеро?**
- N=3 N=6 N=10



Задача 17. Сколько различных двухзначных чисел можно записать, используя цифры 2, 7, 9 если цифры в этих числах могут повторяться?

22 27 29 72 77 79 92 97 99



Граф-дерево

- ***Задача 18***. Маше на день рождения подарили 3 букета цветов: из роз (р), астр (а) и гвоздик (г). В доме было 2 вазы: хрустальная (х) и керамическая (к). Маша пробовала устанавливать каждый букет в каждую вазу. Перечислить все полученные сочетания букета с вазой.

Виды выборок

- Перестановки без повторений
- Размещения   без повторений
- Сочетания без повторений
- Размещения с повторениями (строки)
- Перестановки с повторениями
- Сочетания с повторениями
- Разбиения
- Подмножества

Формулы комбинаторики

Факториал числа - произведение *n* первых натуральных чисел обозначается ***n!***

5!=1*2*3*4*5=120; **n!=1*2*3*…*(n-1)*n**

Перестановка без повторений.

Задача 19. Даны цифр: 1,2,3,4,5,6,7. Сколько различных чисел можно составить из этих цифр? Каждое число является перестановкой из 7 элементов.

Примеры: 1234567, 2354167, 7546321.

Перестановка-упорядоченное множество.

Число перестановок из ***n*** элементов вычисляют по формуле ***Pn=n!***.

По условию ***n=7***

Так из 7 цифр можно 7!=1*2*3*4*5*6*7=5040 различных чисел.

Формулы комбинаторики

Перестановка с повторениями.

Задача 20 .Даны цифр: 1,2,2,3,3,3,4,. Сколько различных чисел можно составить из этих цифр? Каждое число является перестановкой из 7 элементов.

Примеры: 1223334, 4232331,2233314.

Некоторые числа при перестановке одинаковых цифр не меняется. Число таких перестановок вычисляется по формуле ***Pn=n!/(n1!*n2!*n3!).***

По условию ***n=7, n1=2 , n2****=3*

Получаем 7!/(2!*3!)=5040/12=420 различных чисел.

Формулы комбинаторики

Сочетание.

Задача 21. Имеется 7 цветных карандашей. Выбирается 3 карандаша. Сколько существует способов выбрать 3 карандаша, чтобы не было повторяющихся наборов? Выборка из трёх карандашей – это сочетание из 7-ми по 3 элемента в каждом.

Сочетание - неупорядоченная выборка.

Число сочетаний из n элементов по m в каждом находим по формуле: **Cn = n!/(m!*(n-m)!).**

Решение: 7!/(4!*3!)=7*6*5=210

Задача 22. В классе обучается 20 человек. Сколько существует способов выбрать актив, состоящий из 4 человек?

Решение. Находим число сочетаний из 20 элементов по 4 в каждом: 20!/(4!*16!)=17*18*19*20/24=4845 способов выбрать актив.

Формулы комбинаторики

Размещение.

Задача 23. Буквы алфавита записаны на карточках. Выбирается 4 карточки и затем из набора составляют различные слова. Под словом будем понимать порядок следования букв. Например: *плот, лотп, ллот-* разные слова. Каждое полученное слово-это размещение.

Размещение –упорядоченная выборка

Число размещений из n элементов по m в каждом находим по формуле: **An =n!/(n-m)!.**

Сколько слов можно получить в предложенной задаче? По формуле получаем решение

32!/(32-4)!=32!/28!=29*30*31*32=863040

Источники:
В.Н.Студеницкая.. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей
Разработка презентации Шаховой Т.А. из Мурманска (оформление) «Учительский портал», ,Степушкиной Н.Ю. Спасибо!!!