

Решение логических задач методом рассуждений

Решение логических задач методом рассуждений

- ▶ изучается условие задачи;
- ▶ для первого высказывания выдвигается гипотеза;
- ▶ на основе выдвинутой гипотезы определяется истинность остальных высказываний.
- ▶ если в высказываниях обнаруживается противоречие, то выдвигается следующая гипотеза относительно первого высказывания;
- ▶ Этот процесс продолжается до тех пор, пока все высказывания не окажутся истинными.

Задача:

Лев лгал по понедельникам, вторникам и средам и говорил правду во все остальные дни недели. Единорог же вел себя иначе: он лгал по четвергам, пятницам и субботам и говорил правду во все остальные дни недели. Они высказали следующие утверждения: Лев: «Вчера был один из дней, когда я лгу». Единорог: «Вчера был один из дней, когда я тоже лгу». Что это был за день?»

	понедельник	вторник	среда	четверг	пятница	суббота	воскресенье
ЛЕВ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА
ЕДИНОРОГ	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА

Задача:

Принцу необходимо спасти принцессу от злого колдуна, который запрятал её в одну из трёх комнат, а в две другие посадил по тигру. Колдун сообщил принцу, что только одно из высказываний, написанных на дверях комнат является истинным.

У принца есть только одна попытка открыть дверь. И если с первого раза принц угадает комнату, то он спасёт принцессу. Удачи!!!

1
В этой
комнате
сидит тигр.

2
Принцесса
находится в
комнате 1.

3
Тигр сидит в
комнате 2.

Решение логических задач методом рассуждений с использованием таблиц

Задача:

Шесть друзей, Саша, Петя, Витя, Дима, Миша и Кирилл, встретившись через 10 лет после окончания школы, выяснили, что двое из них живут в Москве, двое — в Санкт-Петербурге, а двое — в Перми. Известно, что

- ▶ (1) Витя ездит в гости к родственникам в Москву и Санкт-Петербург.
- ▶ (2) Петя старше Саши.
- ▶ (3) Дима и Миша летом были в Перми в командировке.
- ▶ (4) Кирилл и Саша закончили университет в Санкт-Петербурге и уехали в другие города.
- ▶ (5) Самый молодой из них живет в Москве.
- ▶ (6) Кирилл редко приезжает в Москву.
- ▶ (7) Витя и Дима часто бывают в Санкт-Петербурге по работе.

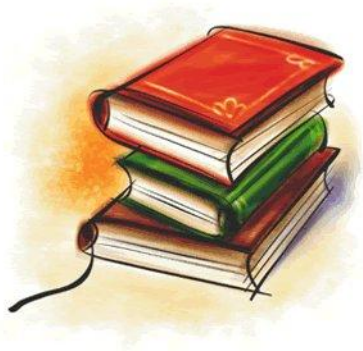
Определите, кто где живет.

	Саша	Петя	Витя	Дима	Миша	Кирилл
Москва						
Санкт-Петербург						
Пермь						

Задача:

Три подружки – Оля, Маша и Юля – купили в магазине груши, яблоки и сливы, причем каждая девочка покупала только один вид фруктов и все покупки у них были разные. На вопрос, кто что купил, продавец ответил: “Оля купила груши. Маша точно не груши. Юля – не сливы”.

Как оказалось позже, два из трех ответов были ложными и только один истинным. Кто что купил?



ДЗ: Логика1.doc

В быту мы часто используем слова “логика”, “логично”. Логика (от древнегреческого λογικός – “наука о рассуждении”) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

В естественном языке рассуждения всегда связаны с конкретными предметами и утверждениями, и поэтому исследовать все это многообразие достаточно сложно.

Древнегреческий философ Аристотель стал основоположником *формальной логики*, которая отвлекается от конкретного содержания и изучает общие правила построения верных выводов из известной информации, которая считается истинной. Формальная логика изучает *высказывания*.

Высказывание – это повествовательное предложение, про которое можно однозначно сказать, что оно истинно или ложно.

Здесь и далее использованы материалы с сайта К.Ю. Полякова, представленные в открытом доступе <http://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm>

- ✓ Париж – самый населенный город Франции.
- ✓ Москва – столица России.
- ✓ Индийский океан омывает Великобританию.
- ✓ Земля – это самая близкая к Солнцу планета.
- ✓ Ты пойдешь сегодня в кино?
- ✓ Не шумите, пожалуйста.
- ✓ Передай, пожалуйста, соль.
- ✓ Информатика – это самый интересный предмет.

Из простых высказываний с помощью логических связок получаются сложные высказывания. Например:

(Идёт снег) **И** (Дует ветер)

(Сегодня вечером пойдём в кино) **ИЛИ** (Завтра утром пойдём на аттракционы)

НЕ идёт дождь

Если я завтра пойду в школу, **то** я встречу со своим другом

В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, *истинно* оно или *ложно*. Если высказывание *истинно*, то его значение равно **1**, если *ложно* - **0**.

Простые высказывания называли *логическими переменными*, а *сложные* - *логическими функциями*. Значения логической функции также только **0** или **1**. Для простоты записи высказывания обозначаются латинскими буквами **A, B, C**.

Обозначив простые высказывания буквами (переменными) и используя логические операции, можно записать любое высказывание в виде логического выражения. Например, пусть система сигнализации должна дать аварийный сигнал, если вышли из строя два из трех двигателей самолета. Обозначим высказывания:

A — “Первый двигатель вышел из строя”.

B — “Второй двигатель вышел из строя”.

C — “Третий двигатель вышел из строя”.

X — “Аварийная ситуация”.

Тогда логическое высказывание **X** можно записать в виде формулы

X = (A и B) или (A и C) или (B и C)

Таким образом, мы выполнили *формализацию*.

Формализация — это переход от конкретного содержания к формальной записи с помощью некоторого языка.

Джордж Буль предложил применить для исследования логических высказываний математические методы. Позже этот раздел математики получил название *алгебра логики*, или *булева алгебра*.

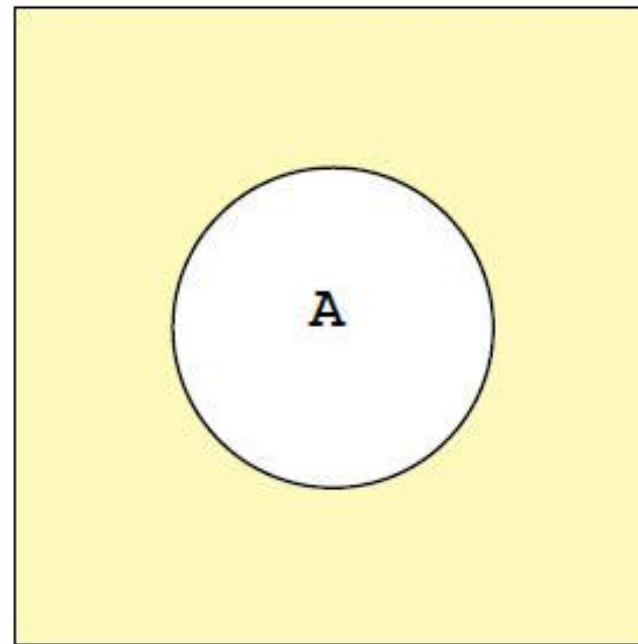
Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания.

Рассмотрим три базовые логических операции:

1. Отрицание, инверсия, НЕ, $\neg A$, \bar{A} , not A.

A	НЕ A
0	1
1	0

Диаграмма Эйлера



2. Логическое умножение, конъюнкция, И, \wedge , \cdot , $\&$, and

A	B	A \wedge B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

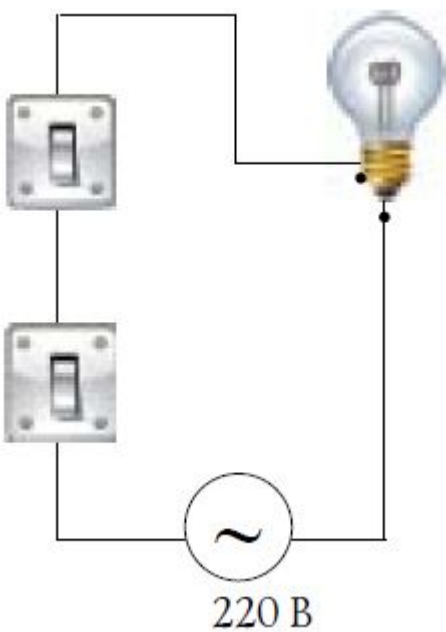
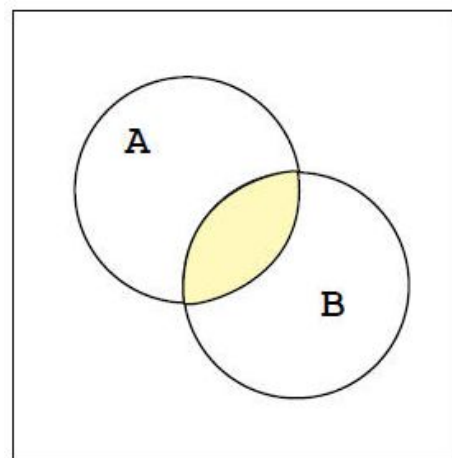


Диаграмма Эйлера

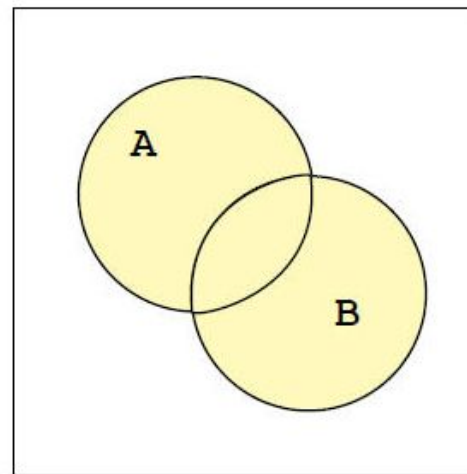


Пересечение множеств

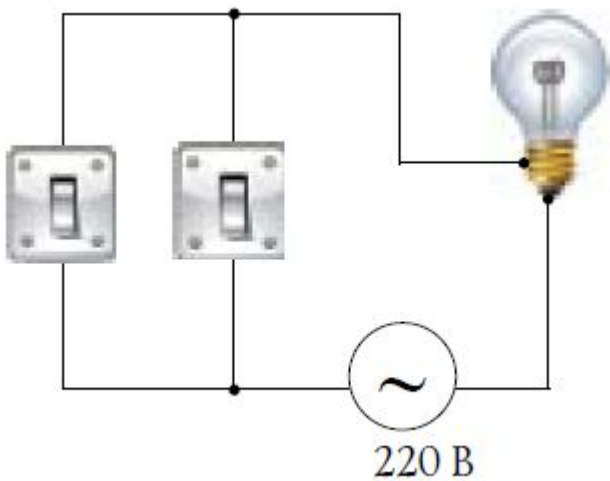
3. Логическое сложение, дизъюнкция, ИЛИ, \vee , $+$, $|$, or

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Диаграмма Эйлера



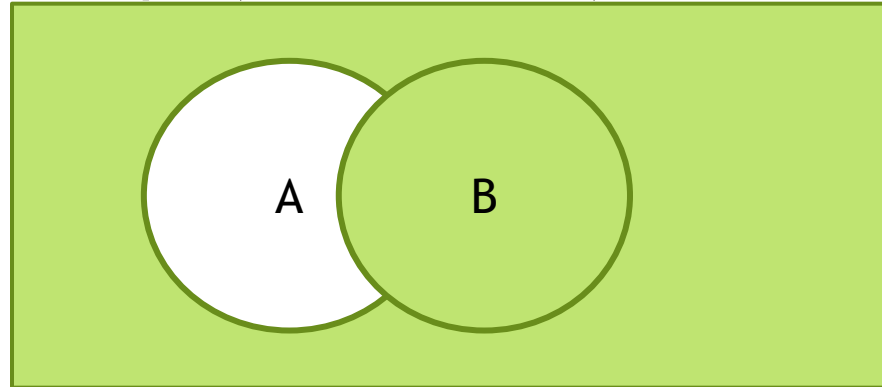
Объединение множеств



Рассмотри Не базовые логические функции.

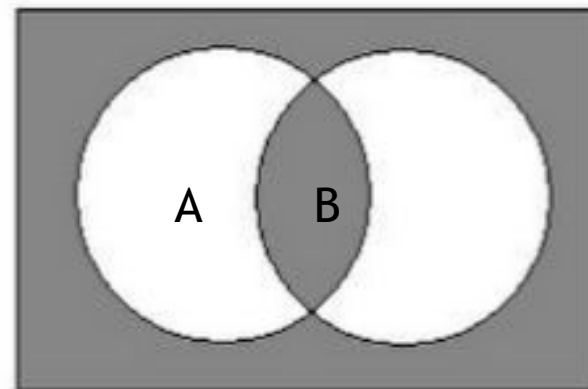
1. Следование, импликация, ЕСЛИ ТО, \rightarrow

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



1. Эквивалентность, логическое тождество, \sim , \equiv , \leftrightarrow

A	B	$A \sim B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Задача:

В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **убывания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – &.

1. зайцы & кролики
2. зайцы & (кролики | лисицы)
3. зайцы & кролики & лисицы
4. кролики | лисицы

Задача:

- ▶ В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – &.

1. кролики | лисицы
2. (зайцы & кролики) | (лисицы & волки)
3. зайцы & кролики & лисицы & волки
4. зайцы & кролики

Решение задач с помощью кругов Эйлера

Задача:

В классе 36 человек. Ученики этого класса посещают математический (М), физический (Ф) и химический (Х) кружки, причём

М посещают 18 человек, ϕ – 14, x – 10. Кроме того известно, что 2 человека посещают все три кружка, 8 человек – и математический и физический, 5 – и математический и химический, 3 – и физический и химический.

Сколько учеников класса не посещают никаких кружков?

Задача:

В таблице приведены запросы и количество страниц, которые нашёл поисковый сервер по этим запросам в некотором сегменте Интернета:

Запрос	Кол-во страниц (тыс.)
Театр & Комедия	315
Театр & Москва	225
Театр & Москва & Комедия	110

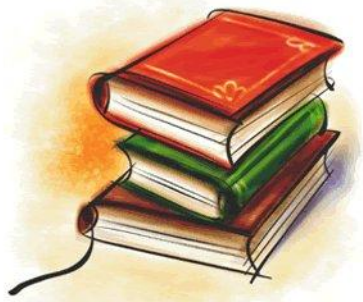
Сколько страниц (в тысячах) будет найдено по запросу
(Москва | комедия) & театр?

Задача:

В таблице приведены запросы и количество страниц, которые нашел поисковый сервер по этим запросам в некотором сегменте Интернета:

Запрос	Кол-во страниц (тыс.)
Гомер & Илиада	200
Гомер & (Одиссея Илиада)	470
Гомер & Одиссея	355

Сколько страниц (в тысячах) будет найдено по запросу
Гомер & Одиссея & Илиада?



ДЗ: Логика2.doc

Задачи:

12. Ниже в табличной форме представлен фрагмент базы данных «Медицинская карта учащихся».

№ записи	Фамилия	Имя	Класс	Рост	Вес
1	Седуш	Максим	9	158	54
2	Самохин	Алексей	9	172	62
3	Киряхин	Глеб	10	165	60
4	Самойлов	Николай	9	152	47
5	Афоница	Алёна	10	162	44
6	Никулов	Иван	10	167	60
7	Остролист	Мария	9	169	52
8	Пронин	Василий	10	166	58
9	Иванов	Максим	10	167	60
10	Галкин	Григорий	9	164	48
11	Калинин	Вадим	10	158	42

Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию

(Рост > 165 ИЛИ Рост < 160) И Класс= 10?

В ответе укажите одно число — искомое количество записей.

Задачи:

12. Ниже в табличной форме представлен фрагмент базы данных сведений о крупнейших озёрах мира.

Название	Площадь, кв. км	Глубина, м	Высота над уровнем моря
Каспийское море	376000	1025	-28
Танганьика	32900	1470	773
Гурон	60000	229	177
Верхнее	82100	400	183
Байкал	31500	12316	114
Аральское море	51100	55	53
Ньяса	30800	726	472
Мичиган	57800	281	177

Сколько записей в данном фрагменте удовлетворяют условию

НЕ (Площадь, кв. км $>$ 50000) ИЛИ НЕ (Глубина, м $<$ 1000)?

В ответе укажите одно число — искомое количество записей.

Приоритет выполнения логических операций:

1. Действие в скобках
2. Отрицание
3. Конъюнкция
4. Дизъюнкция
5. Следование
6. Тожество

Задача:

Для сложного высказывания указать приоритеты выполнения логических операций:

$$A \vee B \& C \Rightarrow A \& C \vee B \& C$$

$$A \& B \vee C \leftrightarrow A \vee C \& A \& B$$

Задачи:

- ✓ Даны простые высказывания: $A = \{5 > 3\}$, $B = \{2 = 3\}$ и $C = \{4 < 2\}$.

Определить истинность составных высказываний:

$$(A \vee B) \& C \rightarrow (A \& C) \vee (B \& C)$$

$$(A \& B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \& (A \& B)$$

- ✓ Для имени **МИХАИЛ** определить истинность логического выражения:

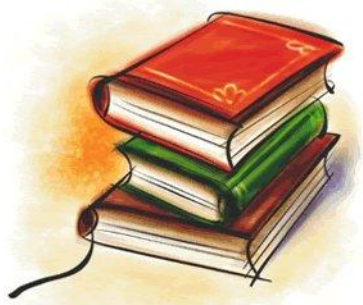
(Первая буква согласная \vee Вторая буква гласная) \rightarrow В слове 4 буквы?

- ✓ Для города Дюссельдорф определить истинность выражения:

(Первая буква гласная \wedge Последняя буква гласная) \sim Название содержит букву «м»?

- ✓ Для $X=3$ определить истинность логического выражения:

$$((X < 4) \rightarrow (X < 3)) \wedge ((X < 3) \rightarrow (X < 1))$$



ДЗ: Логика3.doc (1-9)

Таблицы истинности логических функций

Таблица истинности — это таблица, в которой отражены все значения логической функции при всех возможных значениях, входящих в неё логических переменных.

1. Определить количество строк в таблице истинности:

$$2^n + 1 \text{ строка для заголовка}$$

2. Определить количество столбцов

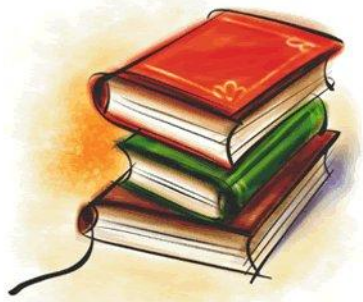
$$\text{количество переменных} + \text{количество логических операций}$$

3. Определить приоритет выполнения логических операций.
4. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций, согласно приоритету их выполнения.

Построить таблицу истинности для логических выражений:

$$A \cdot (C + \overline{\overline{B + C}}) + B \cdot (\overline{A \cdot C})$$

$$(\overline{A} \rightarrow B) \rightarrow \overline{\overline{A} \rightarrow \overline{C}}$$



ДЗ: Логика3.doc (9-17)

Законы алгебры логики

Закон	для “И”	для “ИЛИ”
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 1 = A, A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1, A + 0 = A$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
поглощения	$A + A \cdot B = A$	$A \cdot (A + B) = A$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Задача:

Доказать распределительный закон для «ИЛИ», используя ТИ.

Задача:

Доказать закон де Моргана для «ИЛИ», используя диаграммы Эйлера.

Задача:

Доказать, что операцию СЛЕДОВАНИЯ можно выразить через базовые функции:

$$\mathbf{A \rightarrow B = \bar{A} + B}$$

Задача:

Доказать, что операцию ТОЖДЕСТВО можно выразить через базовые функции:

$$\mathbf{A \leftrightarrow B = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B}$$

Решение логических тестовых задач с использованием логических функций

- ▶ изучается условие задачи;
- ▶ вводится система обозначений для логических высказываний;
- ▶ составляется логическая формула, описывающая логические связи между всеми высказываниями в условии задачи;
- ▶ определяются значения истинности этой логической формулы.

Задача

В шахматы играли 4 человека. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:

- ▶ Володя сказал: «Я - 2, Антон - 1»;
- ▶ Антон сказал: «Я - 2, Сергей - 3»;
- ▶ Сергей сказал: «Я - 4, Дима - 2».

Как распределились места, если каждый обманул 1 раз?

Решение: Составим выражение: $(B2+A1)(A2+C3)(C4+D2) =$
 $= (\cancel{B2A2} + B2C3 + A1A2 + A1C3)(C4+D2) = (\cancel{B2C3C4} + B2C3D2 + \cancel{A1C3C4} + A1C3D2) = (A1C3D2)$

Места:

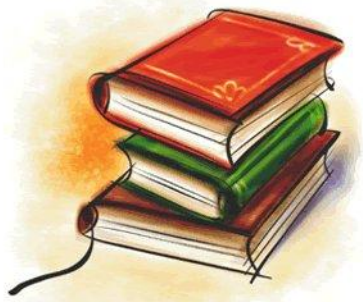
- ▶ **Антон - 1**
- ▶ **Дима - 2**
- ▶ **Сергей - 3**
- ▶ **Володя - 4**

Задача

Виктор, Роман, Юрий и Сергей заняли на математической олимпиаде первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:

- ▶ 1) Сергей - первый, Роман - второй;
- ▶ 2) Сергей - второй, Виктор - третий;
- ▶ 3) Юрий - второй, Виктор - четвертый.

Как распределились места, если в каждом ответе только одно утверждение истинно?



ДЗ: Логика4.doc (1-5)

Решение логических тестовых задач с использованием логических функций в EXCEL

Задача:

Петя, Вася и Маша остались дома одни. Кто-то из них съел всё варенье. На вопрос мамы, кто это сделал, они сказали:

- ▶ Петя: “Я не ел. Маша тоже не ела”.
- ▶ Вася: “Маша действительно не ела. Это сделал Петя”.
- ▶ Маша: “Вася врет. Это он съел”.

Кто съел варенье? Если известно, что двое из них (не известно кто) оба раза сказали правду, а третий их них один раз соврал, а один раз сказал правду

Решение:

Обозначим:

- ▶ П - Петя съел варенье
- ▶ В - Вася съел варенье
- ▶ М - Маша съела варенье

Составим логические высказывания:

Что сказал Петя:

F1: не П
F2: не М

Что сказал Вася:

F3: не М
F4: П

Что сказала Маша:

F5: В
F6: не(не М и П)

Составляем таблицы истинности для каждого из шести высказываний.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	П	В	М	F1=не П	f2=не М	f3=не М	f4=П	f5=В	f6=не (не М и П)	
2	0	0	0	1	1	1	0	0	1	
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	
4	0	1	0	1	1	1	0	1	1	
5	0	1	1	1	0	0	0	1	1	
6	1	0	0	0	1	1	1	0	0	
7	1	0	1	0	0	0	1	0	1	
8	1	1	0	0	1	1	1	1	0	
9	1	1	1	0	0	0	1	1	1	
10										

Вспоминаем, что двое из них оба раза сказали правду, а третий один раз соврал, а один раз сказал правду. Т.е. нам надо найти значения функций 11, 11, 01. К этому условию подходит только одна строка из таблицы.

Задача:

Произошло ограбление. Сыщикам придется сличать показания задержанных. Каждый из задержанных сделал по два заявления

- ▶ А: «Я не делал этого, В не делал этого»
- ▶ В: «А не делал этого, С сделал это»
- ▶ С: «Я не делал этого, сделал это А»

Было установлено: один дважды сказал правду, другой дважды солгал, третий раз солгал, раз сказал правду.

Кто совершил преступление?

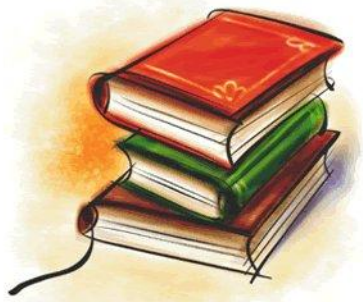
Задача:

Решить задачу с помощью логических функций и Excel.

- ▶ Аня, Вика и Сергей решили пойти в кино. Учитель высказал предположения:
- ▶ 1) Если пойдут Вика и Сергей, то Вика пойдёт в кино;
- ▶ 2) Аня и Сергей пойдут в кино вместе или же оба останутся дома;
- ▶ 3) Если Вика пойдёт в кино, то Сергей пойдёт в кино.

Оказалось, что учитель ошибся и только два из его трёх утверждений истинны.

Сколько ребят пошли в кино?



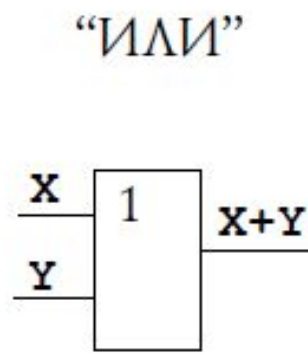
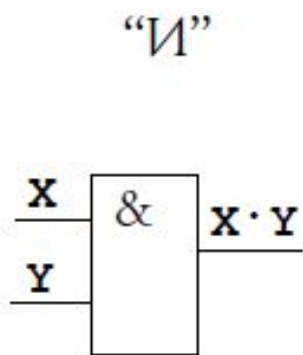
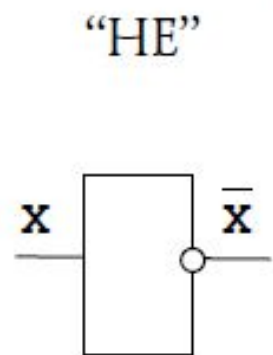
ДЗ: Логика4.doc (6-9)

Какая же связь между логикой и компьютерами? Как мы поняли, формальная логика представляет собой правила выполнения операций с нулями и единицами, то есть с двоичными кодами. Как вы помните, именно такой способ используется в компьютерах для кодирования всех видов информации. Поэтому обработку информации оказалось возможным свести к выполнению логических операций.

Логические элементы компьютера

Простейшие элементы

В компьютерах все вычисления выполняются с помощью *логических элементов* — электронных схем, выполняющих логические операции. Обозначения простейших элементов:

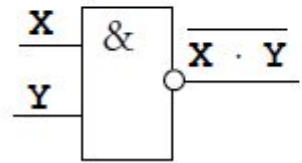


Может показаться, что для реализации сложных логических функций нужно много разных логических элементов.

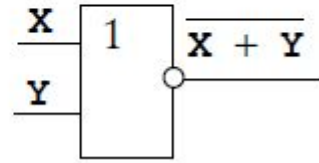
Однако, как мы видели, любую логическую функцию можно представить с помощью операций “НЕ”, “И” и “ИЛИ” (такой набор элементов называется *полным*). Именно эта классическая “тройка” используется в книгах по логике, а также во всех языках программирования.

Примеры логических схем:

“И–НЕ”



“ИЛИ–НЕ”



Задача:

Составить логических схемы для логических функций:

$$X = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

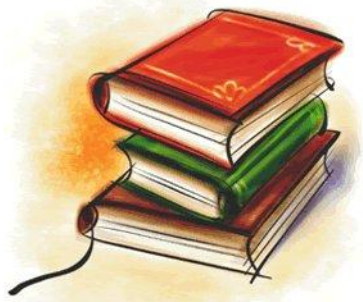
$$X_2 = A \cdot B + \bar{B} \cdot \bar{C}$$

$$A \cdot B \rightarrow (B + \bar{C})$$

$$(A \leftrightarrow B) + C$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot B$$



ДЗ: Логика5.doc