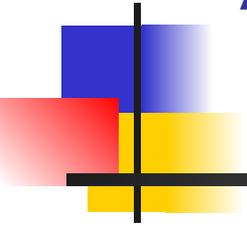


# Решение нелинейных уравнений

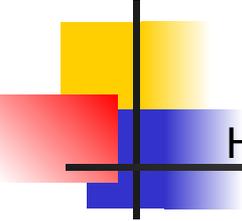


Выбор подходящего метода для решения уравнений зависит от характера рассматриваемой задачи. Задачи, сводящиеся к решению алгебраических и трансцендентных уравнений, можно классифицировать по числу уравнений и в зависимости от предлагаемого характера и числа решений (Рисунок 1).

### Рисунок 1. Классификация уравнений



Одно уравнение будем называть *линейным*, *алгебраическим* или *трансцендентным* в зависимости от того, имеет ли оно одно решение,  $n$  решений или неопределенное число решений. Систему уравнений будем называть *линейной* или *нелинейной* в зависимости от математической природы входящих в нее уравнений.



Нелинейные уравнения можно разделить на 2 класса - алгебраические и трансцендентные. Алгебраическими уравнениями называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией. Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и другие) называются *трансцендентными*.

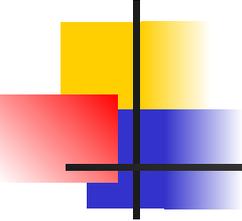
Методы решения нелинейных уравнений делятся на две группы:

точные методы:

итерационные методы.

Точные методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры известны такие методы для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений.

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Для их решения используются итерационные методы с заданной степенью точности.



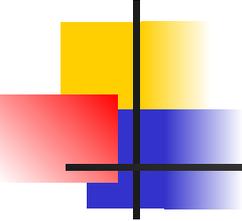
---

Пусть дано уравнение  $f(x) = 0$ ,

где:

1. Функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка.
2. Значения  $f(x)$  на концах отрезка имеют разные знаки ( $f(a) \cdot f(b) < 0$ ).
3. Первая и вторая производные  $f'(x)$  и  $f''(x)$  сохраняют определенный знак на всем отрезке.

Условия 1) и 2) гарантируют, что на интервале  $[a, b]$  находится хотя бы один корень, а из 3) следует, что  $f(x)$  на данном интервале монотонна и поэтому корень будет единственным.



---

Решить уравнение *итерационным методом* значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней и найти значения корней с нужной точностью.

Всякое значение  $\xi$ , обращающее функцию  $f(x)$  в нуль, т.е. такое, что:

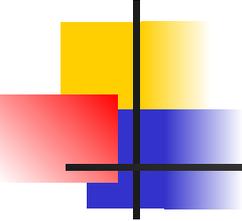
$$f(\xi) = 0,$$

называется *корнем уравнения (1)* или *нулем* функции  $f(x)$ .

Задача нахождения корня уравнения  $f(x) = 0$  итерационным методом состоит из двух этапов:

1. *отделение корней* - отыскание приближенного значения корня или содержащего его отрезка;
2. *уточнение приближенных корней* - доведение их до заданной степени точности.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции  $f(x)$  в граничных  $x = a$  и  $x = b$  точках области ее существования.



# Пример.

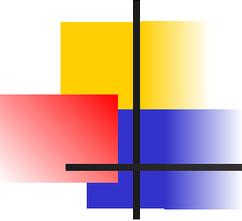
Отделить корни уравнения:  $f(x) \equiv x^3 - 6x + 2 = 0$ .  
Составим приблизительную схему:

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$0$	$1$	$3$	$+\infty$
$f(x)$	-	-	+	+	-	+	+

Следовательно, уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах  $[-3, -1]$ ,  $[0, 1]$  и  $[1, 3]$ .

Приближенные значения корней (*начальные приближения*) могут быть также известны из физического смысла задачи, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, или могут быть найдены графическим способом.

В инженерной практике распространен *графический способ* определения приближенных корней.



---

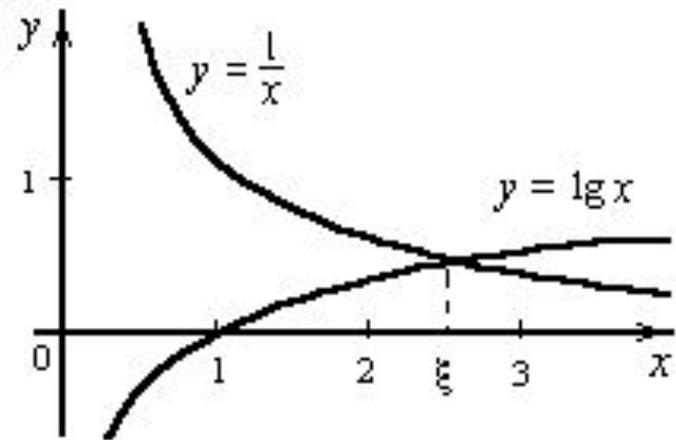
Принимая во внимание, что действительные корни уравнения - это точки пересечения графика функции  $f(x)$  с осью абсцисс, достаточно построить график функции  $f(x)$  и отметить точки пересечения  $f(x)$  с осью  $Ox$ , или отметить на оси  $Ox$  отрезки, содержащие по одному корню. Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение *равносильным* ему уравнением:  $f_1(x) = f_2(x)$  ,

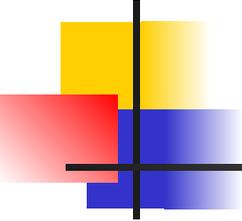
где функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  - более простые, чем функция  $f(x)$ . Тогда, построив графики функций  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ , искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

# Пример.

Графически отделить корни уравнения  $x \lg x = 1$ .

Уравнение удобно переписать в виде равенства  $\lg x = \frac{1}{x}$ . Отсюда ясно, что корни уравнения могут быть найдены как абсциссы точек пересечения логарифмической кривой  $y = \lg x$  и гиперболы  $y = \frac{1}{x}$ . Построив эти кривые, приближенно найдем единственный корень уравнения или определим его содержащий отрезок  $[2, 3]$ .





# Метод половинного деления

---

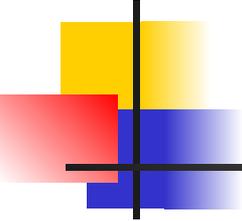
Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения  $x_0$ . Каждый такой шаг называется итерацией. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если эти значения с увеличением числа итераций  $n$  приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс *сходится*. Для нахождения корня уравнения, принадлежащего отрезку  $[a, b]$ ,

делим этот отрезок пополам. Если  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , то  $\xi = \frac{a+b}{2}$

является корнем уравнения. Если  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$  (что, практически,

наиболее вероятно), то выбираем ту из половин  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  или  $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ , на концах которой функция  $f(x)$  имеет противоположные знаки. Новый суженный отрезок  $[a_1, b_1]$  снова делим пополам и производим те же самые действия.

Метод половинного деления практически удобно применять для грубого нахождения корня данного уравнения, метод прост и надежен, всегда сходится.



## Пример.

---

Методом половинного деления уточнить корень уравнения

$$f(x) \equiv x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

лежащий на отрезке  $[0, 1]$ .

Последовательно имеем:

$$f(0) = -1; \quad f(1) = 1; \quad f(0,5) = 0,06 + 0,25 - 0,5 - 1 = -1,19;$$

$$f(0,75) = 0,32 + 0,84 - 0,75 - 1 = -0,59;$$

$$f(0,875) = 0,59 + 1,34 - 0,88 - 1 = +0,05;$$

$$f(0,8125) = 0,436 + 1,072 - 0,812 - 1 = -0,304;$$

$$f(0,8438) = 0,507 + 1,202 - 0,844 - 1 = -0,135;$$

$$f(0,8594) = 0,546 + 1,270 - 0,859 - 1 = -0,043 \text{ и т. д.}$$

Можно принять

$$\xi = (0,859 + 0,875) \cdot 0,5 = 0,867$$

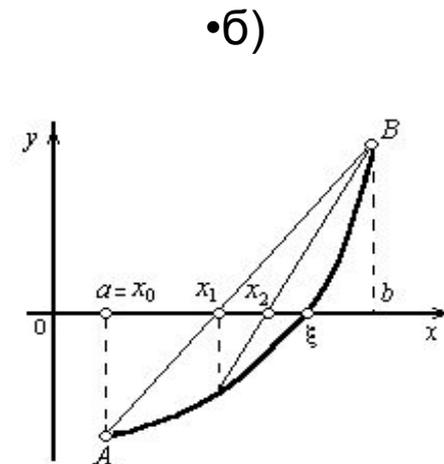
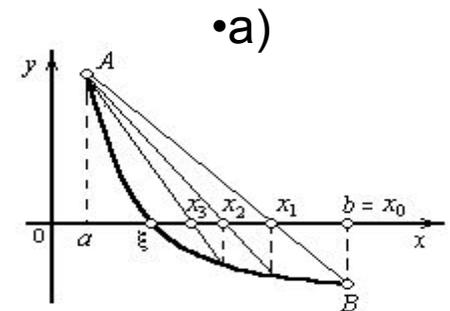
# Метод хорд

В данном методе процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений к корню уравнения принимаются значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  точек пересечения хорды  $AB$  с осью абсцисс (Рисунок 3). Сначала запишем уравнение хорды  $AB$ :

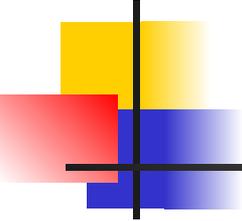
$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Для точки пересечения хорды  $AB$  с осью абсцисс ( $x = x_1, y = 0$ ) получим уравнение:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$



**Рисунок 3. Метод хорд**



Пусть для определенности  $f''(x) > 0$  при  $a \leq x \leq b$  (случай  $f''(x) < 0$  сводится к нашему, если записать уравнение в виде  $-f(x) = 0$ ). Тогда кривая  $y = f(x)$  будет выпукла вниз и, следовательно, расположена ниже своей хорды  $AB$ . Возможны два случая: 1)  $f(a) > 0$  (Рисунок 3, а) и 2)  $f(b) < 0$  (Рисунок 3, б).

В первом случае конец  $a$  неподвижен и последовательные приближения:  $x_0 = b$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a), \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

*образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем*

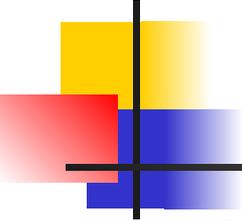
$$a < \xi < \square < x_{i+1} < x_i < \square < x_1 < x_0.$$

*Во втором случае неподвижен конец  $b$ , а последовательные приближения:  $x_0 = a$ ;*

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i)$$

*образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем*

$$x_0 < x_1 < \square < x_i < x_{i+1} < \square < \xi < b.$$

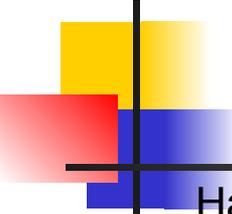


---

Обобщая эти результаты, заключаем:

1. неподвижен тот конец, для которого знак функции  $f(x)$  совпадает со знаком ее второй производной  $f''(x)$ ;
2. последовательные приближения  $x_n$  лежат по ту сторону корня  $\xi$ , где функция  $f(x)$  имеет знак, противоположный знаку ее второй производной  $f''(x)$ .

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет обнаружено, что  $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - заданная предельная абсолютная погрешность.



# Пример.

Найти положительный корень уравнения

$$f(x) \equiv x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0 \text{ с точностью } \varepsilon = 0,01.$$

Прежде всего, отделяем корень. Так как  $f(1) = -0,6 < 0$  и  $f(2) = 5,6 > 0$ , то искомый корень  $\xi$  лежит в интервале  $[1, 2]$ . Полученный интервал велик, поэтому разделим его пополам. Так как

$$f(1,5) = 1,425 > 0, \text{ то } 1 < \xi < 1,5.$$

Так как  $f'(x) = 6x - 0,4 > 0$  при  $1 < x < 1,5$  и  $f(1,5) > 0$ , то воспользуемся формулой для решения поставленной задачи:

$$x_1 = 1 + \frac{0,6}{1,425 + 0,6} (1,5 - 1) = 1,15; \quad |x_1 - x_0| = 0,15 > \varepsilon,$$

следовательно, продолжаем вычисления;  $f(x_1) = -0,173$ ;

$$x_2 = 1,15 + \frac{0,173}{1,425 + 0,173} (1,5 - 1,15) = 1,190;$$
$$|x_2 - x_1| = 0,04 > \varepsilon, \quad f(x_2) = -0,036;$$

$$x_3 = 1,190 + \frac{0,036}{1,425 + 0,036} (1,5 - 1,190) = 1,198;$$

$$|x_3 - x_2| = 0,008 < \varepsilon.$$

Таким образом, можно принять  $\xi = 1,198$  с точностью  $\varepsilon = 0,01$ .

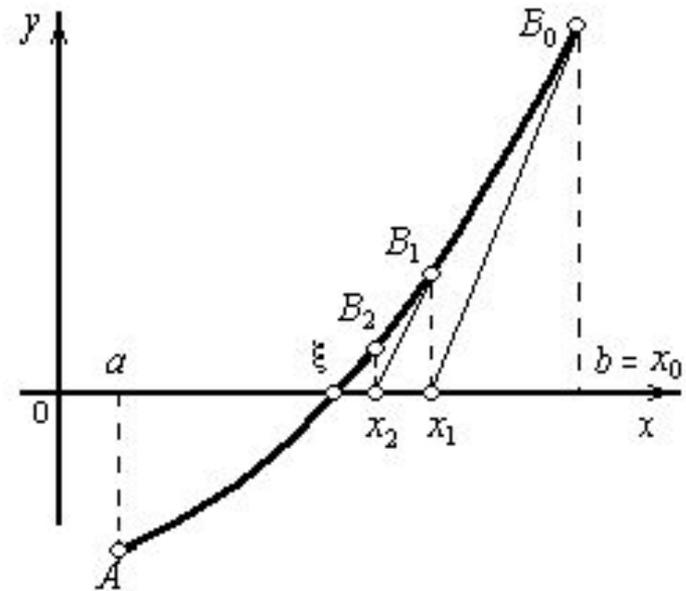
Заметим, что точный корень уравнения  $\xi = 1,2$ .

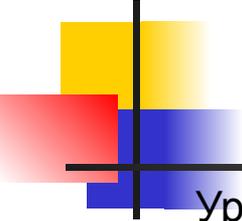
# Метод Ньютона.

Отличие этого итерационного метода от предыдущего состоит в том, что вместо хорды на каждом шаге проводится касательная к кривой  $y = f(x)$  при  $x = x_i$  и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс (Рисунок 4). При этом не обязательно задавать отрезок  $[a, b]$ , содержащий корень уравнения, достаточно найти лишь некоторое начальное приближение корня  $x = x_0$ .

Применяя метод Ньютона, следует руководствоваться следующим правилом: *в качестве исходной точки  $x_0$  выбирается тот конец интервала  $[a, b]$ , которому отвечает ордината того же знака, что и знак  $f''(x)$ .*

**Рисунок 4. Метод Ньютона**





Уравнение касательной, проведенной к кривой  $y = f(x)$  через точку  $B_0$  с координатами  $x_0$  и  $f(x_0)$ , имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Отсюда найдем следующее приближение корня  $x_1$  как абсциссу точки пересечения касательной с осью  $Ox$  ( $y = 0$ ):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

*Аналогично могут быть найдены и следующие приближения как точки пресечения с осью абсцисс касательных, проведенных в точках  $B_1$ ,  $B_2$  и так далее. Формула для  $i + 1$  приближения имеет вид:*

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

*Для окончания итерационного процесса может быть использовано или условие  $|f(x_i)| < \varepsilon$ , или условие близости  $2^x$  последовательных приближений  $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$ . Итерационный процесс сходится если  $f'(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ .*

**Mathcad Professional - [Метод Ньютона.mcd]**

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

1. Отделение корней  $f(x) := 2 \cdot x \cdot \sin(x) - \cos(x)$   $x := 0, 0.1 \dots 1$

$x_0 := 0.67$  - начальное приближение, определенное по графику  $f(x)=0$

2. Уточнение корней (методом Ньютона)

$n := 100$  - предположительное число итераций  
 $i := 1 \dots n$

$\varepsilon := 10^{-4}$  - задание точности вычислений

$df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$  - определение функции, вычисляющей производную от  $f(x)$

$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{df(x_0)}$  - вычисление первого приближения по формуле Ньютона

$x_{i+1} := \text{until} \left( \left| x_i - x_{i-1} \right| - \varepsilon, x_i - \frac{f(x_i)}{df(x_i)} \right)$  - реализация итерационного процесса по методу Ньютона с использованием функции **until**

$j := \text{last}(x)$  - определение числа итераций за которые итерационный процесс сошелся  
 $j = 4$

$x_{j-1} = 0.65327$  - **корень уравнения  $f(x)$**

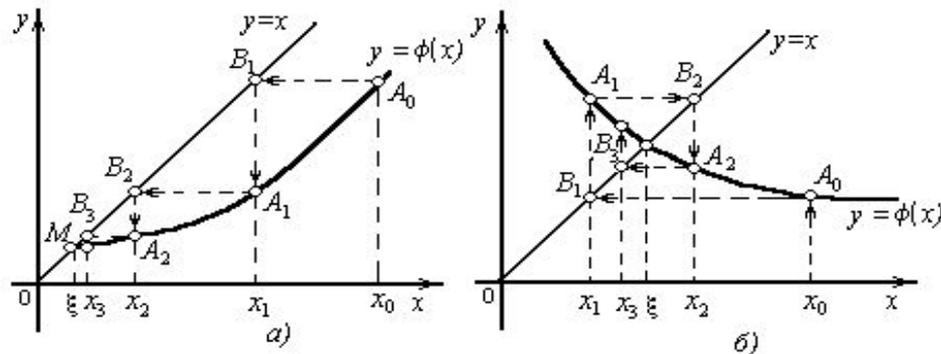
$x = \begin{pmatrix} 0.67 \\ 0.65342 \\ 0.65327 \\ 0.65327 \\ 0 \end{pmatrix}$  - итерационная последовательность

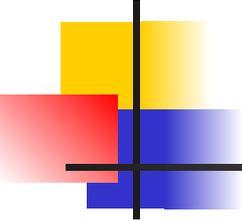
# Метод простой итерации

Для использования метода итерации исходное нелинейное уравнение  $f(x) = 0$  заменяется равносильным уравнением  $x = \phi(x)$ . Пусть известно начальное приближение корня  $x = x_0$ . Подставляя это значение в правую часть уравнения, получим новое приближение:  $x_1 = \phi(x_0)$ .

Далее, подставляя каждый раз новое значение корня в, получаем последовательность значений:  $x_{i+1} = \phi(x_i)$ ,  $(i = 0, 1, \dots)$ .

*Геометрически метод итерации может быть пояснен следующим образом.* Построим на плоскости  $xOy$  графики функций  $y = x$  и  $y = \phi(x)$ . Каждый действительный корень уравнения является абсциссой точки пересечения  $M$  кривой  $y = \phi(x)$  с прямой  $y = x$  (Рисунок 6, а).





---

Отправляясь от некоторой точки  $A_0 [x_0, \phi(x_0)]$ , строим ломаную  $A_0B_1A_1B_2A_2\dots$  ("лестница"), звенья которой попеременно параллельны оси  $Ox$  и оси  $Oy$ , вершины  $A_0, A_1, A_2, \dots$  лежат на кривой  $y=\phi(x)$ , а вершины  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , - на прямой  $y=x$ . Общие абсциссы точек  $A_1$  и  $B_1, A_2$  и  $B_2, \dots$ , очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения  $x_1, x_2, \dots$  корня  $\xi$ .

Возможен также другой вид ломаной  $A_0B_1A_1B_2A_2 \dots$  – «спираль» (Рисунок 6, б). Решение в виде «лестницы» получается, если производная  $\phi'(x)$  положительна, а решение в виде «спирали», если  $\phi'(x)$  отрицательна.

На Рисунке 6, а, б кривая  $y = \phi(x)$  в окрестности корня  $\xi$ - пологая, то есть  $|\phi'(x)| < 1$ , и процесс итерации сходится.

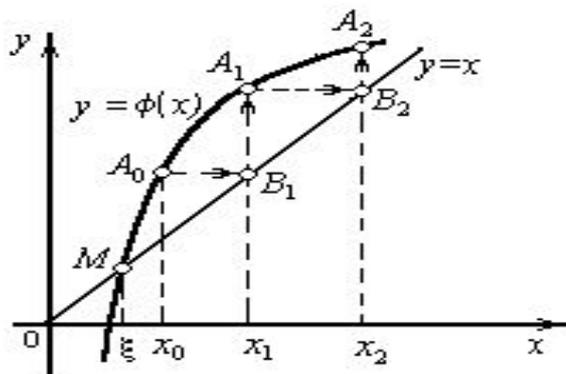
Однако, если рассмотреть случай, где  $|\varphi'(x)| > 1$ , то процесс итерации может быть расходящимся (Рисунок 7). Поэтому для практического применения метода итерации нужно выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

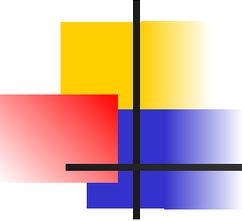
**Теорема:** Пусть функция  $\varphi(x)$  определена и дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ , причем все ее значения  $\varphi(x) \in [a, b]$ .

Тогда, если существует правильная дробь  $q$  такая, что  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  при  $a < x < b$ , то: 1) процесс итерации  $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ , ( $i = 0, 1, \dots$ ).

сходится независимо от начального значения  $x_0 \in [a, b]$ ;

2) предельное значение  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  является единственным корнем уравнения  $x = \varphi(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .





# Пример.

---

Уравнение  $f(x) \equiv x^3 - x - 1 = 0$  имеет корень  $\xi \in [1, 2]$ , так как  $f(1) = -1 < 0$  и  $f(2) = 5 > 0$ .

Уравнение можно записать в виде  $x = x^3 - 1$ . Здесь  $\phi(x) = x^3 - 1$  и  $\phi'(x) = 3x^2$ ,

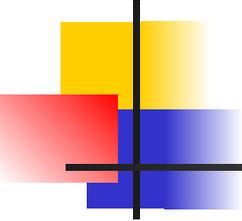
Поэтому  $\phi'(x) \geq 3$  при  $1 \leq x \leq 2$

и, следовательно, условия сходимости процесса итерации не выполнены.

Если записать уравнение в виде  $x = \sqrt[3]{x+1}$ ,

то будем иметь:  $\psi(x) = \sqrt[3]{x+1}$  и  $\psi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Отсюда  $0 < \psi'(x) < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < \frac{1}{4}$  при  $1 \leq x \leq 2$  и значит, процесс итерации для уравнения быстро сойдется.



---

Найдем корень  $\xi$  уравнения (10) с точностью до  $10^{-2}$ . Вычисляем последовательные приближения  $x_i$  с одним запасным знаком по формуле

$$x_i = \sqrt[3]{x_i + 1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

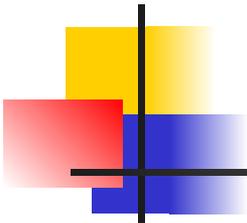
Найденные значения помещены в Таблицу 1:

**Таблица 1**

**Значения последовательных приближений  $x_i$ .**

i	0	1	2	3	4
$x_i$	1	1,260	1,312	1,322	1,3243

**С точностью до  $10^{-2}$  можно положить  $\xi = 1,324$ .**



**Mathcad Professional - [Решение уравнений средствами Mathcad.mcd]**

Файл Плавка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Пример 1. Решение уравнения  $\cos(x) = x + 0.2$  с помощью функции root

1 способ  
 $x := 1$  - начальное приближение  
 $f(x) := \cos(x) - x - 0.2$   
 $\text{root}(f(x), x) = 0.616$

2 способ  
 $x := 1$  - начальное приближение  
 $\text{root}(\cos(x) - x - 0.2, x) = 0.616$

3 способ  
 $\text{root}(\cos(x) - x - 0.2, x, 0, 1) = 0.616$

В способах 1 и 2, начальное приближение показывает функции root, где начать искать корень. В способе 3, 3 и 4 параметры определяют область, где искать корень.

В способе 1 первый аргумент - это функция  $f(x)$ , определенная в документе. В способах 2 и 3 - это выражение.

Пример 2. Нахождение корней полинома  $x^4 - 10 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1$

$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$  - Используйте команду **Символы**  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  **Коз** **Ф** **и** **ц** **и** **е** **н** **т** **ы** **п** **о** **л** **и** **н** **о** **м** **а** для создания вектора v

$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.591 \\ 0.305 - 0.277i \\ 0.305 + 0.277i \\ 9.981 \end{pmatrix}$