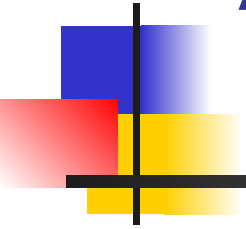
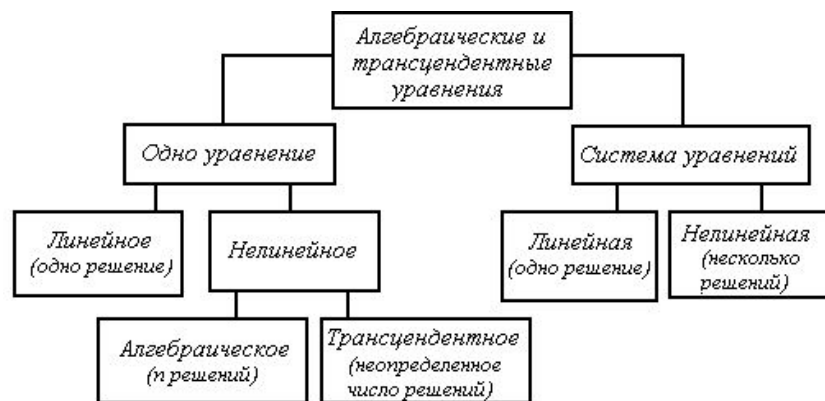


Решение нелинейных уравнений

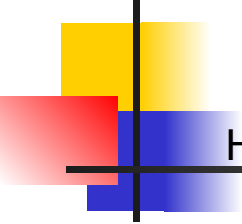


Выбор подходящего метода для решения уравнений зависит от характера рассматриваемой задачи. Задачи, сводящиеся к решению алгебраических и трансцендентных уравнений, можно классифицировать по числу уравнений и в зависимости от предлагаемого характера и числа решений (Рисунок 1).

Рисунок 1. Классификация уравнений



Одно уравнение будем называть *линейным*, *алгебраическим* или *трансцендентным* в зависимости от того, имеет ли оно одно решение, n решений или неопределенное число решений. Систему уравнений будем называть *линейной* или *нелинейной* в зависимости от математической природы входящих в нее уравнений.



Нелинейные уравнения можно разделить на 2 класса - алгебраические и трансцендентные. Алгебраическими уравнениями называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией. Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и другие) называются *трансцендентными*.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на две группы:

точные методы:

итерационные методы.

Точные методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры известны такие методы для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений.

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Для их решения используются итерационные методы с заданной степенью точности.

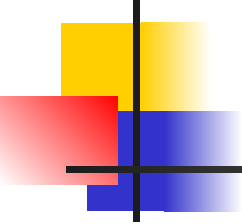


Пусть дано уравнение $f(x) = 0$,

где:

1. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка.
2. Значения $f(x)$ на концах отрезка имеют разные знаки ($f(a) \cdot f(b) < 0$).
3. Первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют определенный знак на всем отрезке.

Условия 1) и 2) гарантируют, что на интервале $[a, b]$ находится хотя бы один корень, а из 3) следует, что $f(x)$ на данном интервале монотонна и поэтому корень будет единственным.



Решить уравнение *итерационным методом* значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней и найти значения корней с нужной точностью.

Всякое значение ξ , обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. такое, что:

$$f(\xi) = 0,$$

называется *корнем уравнения (1)* или *нулем* функции $f(x)$.

Задача нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ итерационным методом состоит из двух этапов:

1. *отделение корней* - отыскание приближенного значения корня или содержащего его отрезка;
2. *уточнение приближенных корней* - доведение их до заданной степени точности.

Процесс отделения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в граничных $x = a$ и $x = b$ точках области ее существования.



Пример.

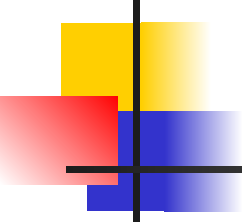
Отделить корни уравнения: $f(x) \equiv x^3 - 6x + 2 = 0$.
Составим приблизительную схему:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x)$	-	-	+	+	-	+	+

Следовательно, уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах $[-3, -1]$, $[0, 1]$ и $[1, 3]$.

Приближенные значения корней (*начальные приближения*) могут быть также известны из физического смысла задачи, из решения аналогичной задачи при других исходных данных, или могут быть найдены графическим способом.

В инженерной практике распространен *графический способ* определения приближенных корней.



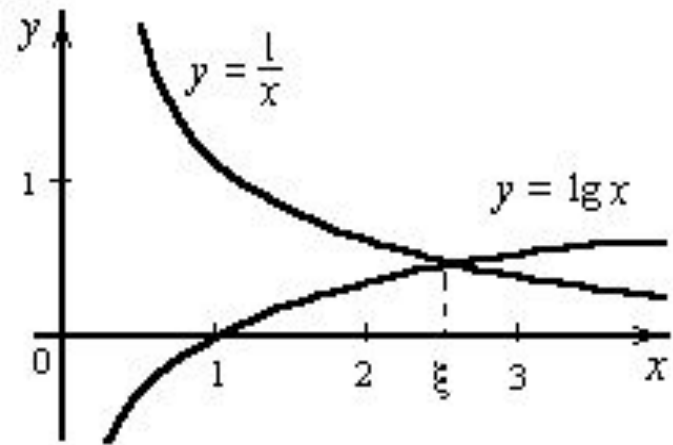
Принимая во внимание, что действительные корни уравнения - это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график функции $f(x)$ и отметить точки пересечения $f(x)$ с осью Ox , или отметить на оси Ox отрезки, содержащие по одному корню. Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение *равносильным* ему уравнением: $f_1(x) = f_2(x)$,

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - более простые, чем функция $f(x)$. Тогда, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример.

Графически отделить корни уравнения $x \lg x = 1$.

Уравнение удобно переписать в виде равенства $\lg x = \frac{1}{x}$. Отсюда ясно, что корни уравнения могут быть найдены как абсциссы точек пересечения логарифмической кривой $y = \lg x$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Построив эти кривые, приближенно найдем единственный корень уравнения или определим его содержащий отрезок $[2, 3]$.





Метод половинного деления

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения x_0 . Каждый такой шаг называется итерацией. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня x_1, x_2, \dots, x_n . Если эти значения с увеличением числа итераций n приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс *сходится*. Для нахождения корня уравнения, принадлежащего отрезку $[a, b]$,

делим этот отрезок пополам. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $\xi = \frac{a+b}{2}$

является корнем уравнения. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ (что, практически,

наиболее вероятно), то выбираем ту из половин $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ или $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Новый суженный отрезок $[a_1, b_1]$ снова делим пополам и производим те же самые действия.

Метод половинного деления практически удобно применять для грубого нахождения корня данного уравнения, метод прост и надежен, всегда сходится.



Пример.

Методом половинного деления уточнить корень уравнения

$$f(x) \equiv x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$$

лежащий на отрезке $[0, 1]$.

Последовательно имеем:

$$f(0) = -1; \quad f(1) = 1; \quad f(0,5) = 0,06 + 0,25 - 0,5 - 1 = -1,19;$$

$$f(0,75) = 0,32 + 0,84 - 0,75 - 1 = -0,59;$$

$$f(0,875) = 0,59 + 1,34 - 0,88 - 1 = +0,05;$$

$$f(0,8125) = 0,436 + 1,072 - 0,812 - 1 = -0,304;$$

$$f(0,8438) = 0,507 + 1,202 - 0,844 - 1 = -0,135;$$

$$f(0,8594) = 0,546 + 1,270 - 0,859 - 1 = -0,043 \text{ и т. д.}$$

Можно принять

$$\xi = (0,859 + 0,875) \cdot 0,5 = 0,867$$

Метод хорд

В данном методе процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений к корню уравнения принимаются значения x_1, x_2, \dots, x_n точек пересечения хорды AB с осью абсцисс (Рисунок 3). Сначала запишем уравнение хорды AB :

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Для точки пересечения хорды AB с осью абсцисс ($x = x_1, y = 0$) получим уравнение:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

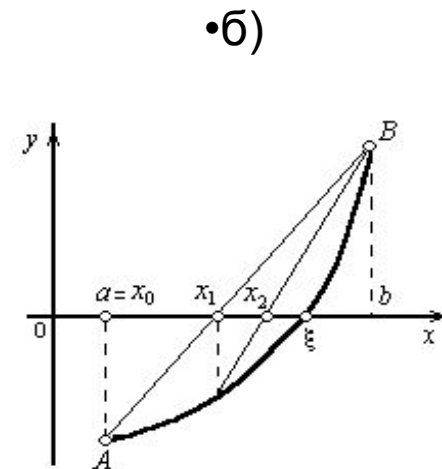
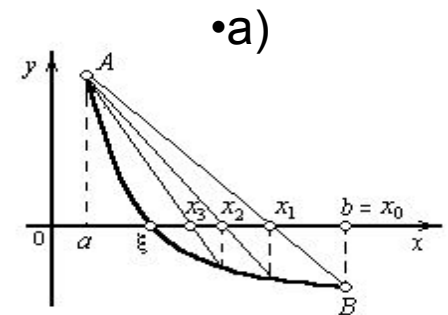
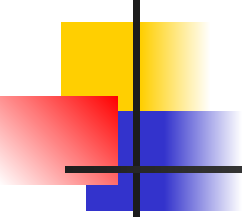


Рисунок 3. Метод хорд



Пусть для определенности $f''(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$ (случай $f''(x) < 0$ сводится к нашему, если записать уравнение в виде $-f(x) = 0$). Тогда кривая $y = f(x)$ будет выпукла вниз и, следовательно, расположена ниже своей хорды AB . Возможны два случая: 1) $f(a) > 0$ (Рисунок 3, а) и 2) $f(b) < 0$ (Рисунок 3, б).

В первом случае конец a неподвижен и последовательные приближения: $x_0 = b$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a), \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < \xi < \square < x_{i+1} < x_i < \square < x_1 < x_0.$$

Во втором случае неподвижен конец b , а последовательные приближения: $x_0 = a$;

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i)$$

образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем

$$x_0 < x_1 < \square < x_i < x_{i+1} < \square < \xi < b.$$



Обобщая эти результаты, заключаем:

1. неподвижен тот конец, для которого знак функции $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$;
2. последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня ξ , где функция $f(x)$ имеет знак, противоположный знаку ее второй производной $f''(x)$.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет обнаружено, что $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$, где ε - заданная предельная абсолютная погрешность.



Пример.

Найти положительный корень уравнения

$$f(x) \equiv x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0 \text{ с точностью } \varepsilon = 0,01.$$

Прежде всего, отделяем корень. Так как $f(1) = -0,6 < 0$ и $f(2) = 5,6 > 0$, то искомый корень ξ лежит в интервале $[1, 2]$. Полученный интервал велик, поэтому разделим его пополам. Так как

$$f(1,5) = 1,425 > 0, \text{ то } 1 < \xi < 1,5.$$

Так как $f'(x) = 6x - 0,4 > 0$ при $1 < x < 1,5$ и $f(1,5) > 0$, то воспользуемся формулой для решения поставленной задачи:

$$x_1 = 1 + \frac{0,6}{1,425 + 0,6} (1,5 - 1) = 1,15; \quad |x_1 - x_0| = 0,15 > \varepsilon,$$

следовательно, продолжаем вычисления; $f(x_1) = -0,173$;

$$|x_2 - x_1| = 0,04 > \varepsilon, \quad x_2 = 1,15 + \frac{0,173}{1,425 + 0,173} (1,5 - 1,15) = 1,190;$$

$$x_3 = 1,190 + \frac{0,036}{1,425 + 0,036} (1,5 - 1,190) = 1,198;$$

$$|x_3 - x_2| = 0,008 < \varepsilon.$$

Таким образом, можно принять $\xi = 1,198$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

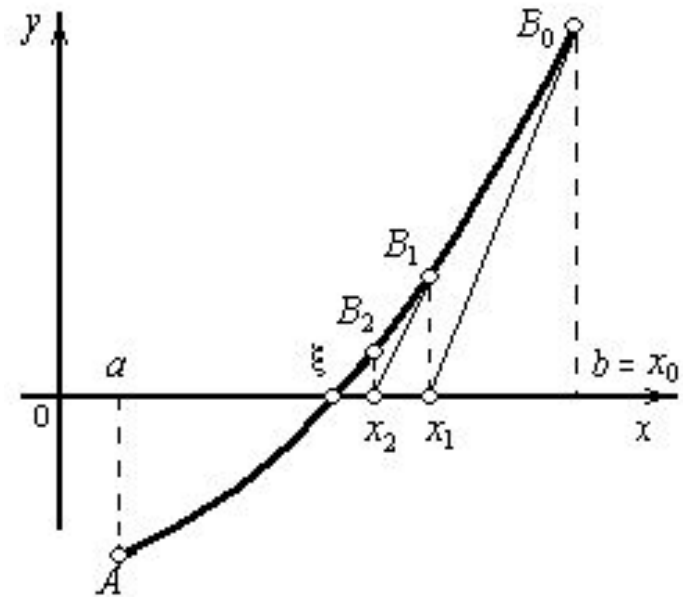
Заметим, что точный корень уравнения $\xi = 1,2$.

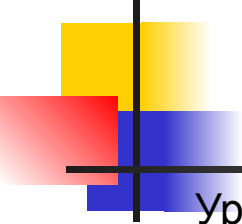
Метод Ньютона.

Отличие этого итерационного метода от предыдущего состоит в том, что вместо хорды на каждом шаге проводится касательная к кривой $y = f(x)$ при $x = x_i$ и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс (Рисунок 4). При этом не обязательно задавать отрезок $[a, b]$, содержащий корень уравнения, достаточно найти лишь некоторое начальное приближение корня $x = x_0$.

Применяя метод Ньютона, следует руководствоваться следующим правилом: *в качестве исходной точки x_0 выбирается тот конец интервала $[a, b]$, которому отвечает ордината того же знака, что и знак $f''(x)$.*

Рисунок 4. Метод Ньютона





Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ через точку B_0 с координатами x_0 и $f(x_0)$, имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Отсюда найдем следующее приближение корня x_1 как абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox ($y = 0$):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения как точки пресечения с осью абсцисс касательных, проведенных в точках B_1 , B_2 и так далее. Формула для $i + 1$ приближения имеет вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Для окончания итерационного процесса может быть использовано или условие $|f(x_i)| < \varepsilon$, или условие близости 2^x последовательных приближений $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$. Итерационный процесс сходится если $f'(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Mathcad Professional - [Метод Ньютона.mcd]

Файл Плавка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

1. Отделение корней $f(x) := 2 \cdot x \cdot \sin(x) - \cos(x)$ $x := 0, 0.1 \dots 1$

$x_0 := 0.67$ - начальное приближение, определенное по графику $f(x)=0$

2. Уточнение корней (методом Ньютона)

$n := 100$ - предположительное число итераций
 $i := 1 \dots n$

$\varepsilon := 10^{-4}$ - задание точности вычислений

$df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ - определение функции, вычисляющей производную от $f(x)$

$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{df(x_0)}$ - вычисление первого приближения по формуле Ньютона

$x_{i+1} := \text{until} \left(|x_i - x_{i-1}| - \varepsilon, x_i - \frac{f(x_i)}{df(x_i)} \right)$ - реализация итерационного процесса по методу Ньютона с использованием функции **until**

$j := \text{last}(x)$ - определение числа итераций за которые итерационный процесс сошелся
 $j = 4$

$x_{j-1} = 0.65327$ - **корень уравнения $f(x)$**

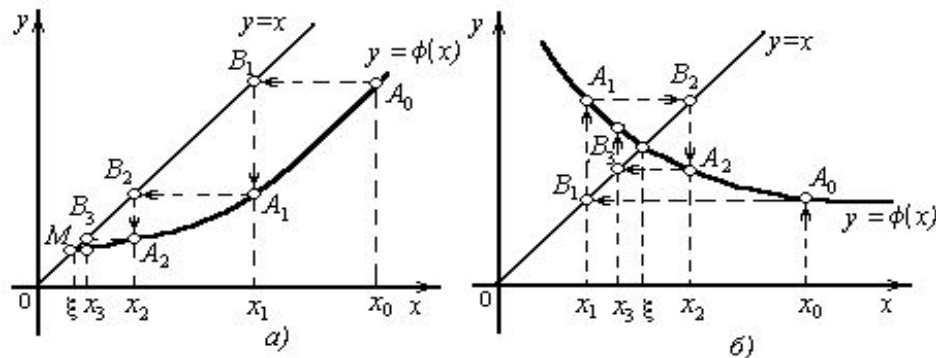
$x = \begin{pmatrix} 0.67 \\ 0.65342 \\ 0.65327 \\ 0.65327 \\ 0 \end{pmatrix}$ - итерационная последовательность

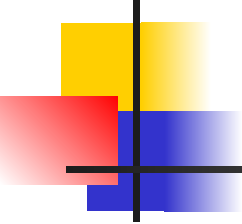
Метод простой итерации

Для использования метода итерации исходное нелинейное уравнение $f(x) = 0$ заменяется равносильным уравнением $x = \phi(x)$. Пусть известно начальное приближение корня $x = x_0$. Подставляя это значение в правую часть уравнения, получим новое приближение: $x_1 = \phi(x_0)$.

Далее, подставляя каждый раз новое значение корня в, получаем последовательность значений: $x_{i+1} = \phi(x_i)$, $(i = 0, 1, \dots)$.

Геометрически метод итерации может быть пояснен следующим образом. Построим на плоскости xOy графики функций $y = x$ и $y = \phi(x)$. Каждый действительный корень уравнения является абсциссой точки пересечения M кривой $y = \phi(x)$ с прямой $y = x$ (Рисунок 6, а).





Отправляясь от некоторой точки $A_0 [x_0, \phi(x_0)]$, строим ломаную $A_0B_1A_1B_2A_2\dots$ ("лестница"), звенья которой попеременно параллельны оси Ox и оси Oy , вершины A_0, A_1, A_2, \dots лежат на кривой $y=\phi(x)$, а вершины B_1, B_2, B_3, \dots , - на прямой $y=x$. Общие абсциссы точек A_1 и B_1, A_2 и B_2, \dots , очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения x_1, x_2, \dots корня ξ .

Возможен также другой вид ломаной $A_0B_1A_1B_2A_2 \dots$ - «спираль» (Рисунок 6, б). Решение в виде «лестницы» получается, если производная $\phi'(x)$ положительна, а решение в виде «спирали», если $\phi'(x)$ отрицательна.

На Рисунке 6, а, б кривая $y = \phi(x)$ в окрестности корня ξ - пологая, то есть $|\phi'(x)| < 1$, и процесс итерации сходится.

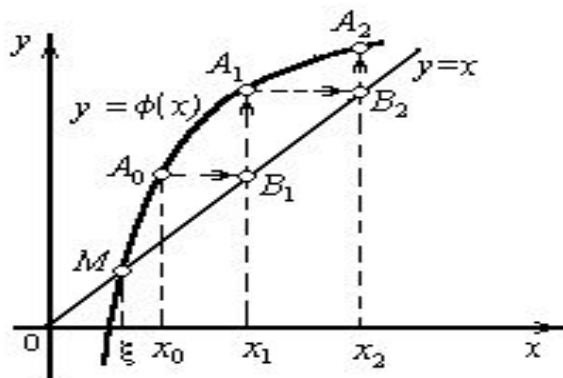
Однако, если рассмотреть случай, где $|\varphi'(x)| > 1$, то процесс итерации может быть расходящимся (Рисунок 7). Поэтому для практического применения метода итерации нужно выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

Теорема: Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем все ее значения $\varphi(x) \in [a, b]$.

Тогда, если существует правильная дробь q такая, что $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ при $a < x < b$, то: 1) процесс итерации $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, ($i = 0, 1, \dots$).

сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a, b]$;

2) предельное значение $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ является единственным корнем уравнения $x = \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$.





Пример.

Уравнение $f(x) \equiv x^3 - x - 1 = 0$ имеет корень $\xi \in [1, 2]$, так как $f(1) = -1 < 0$ и $f(2) = 5 > 0$.

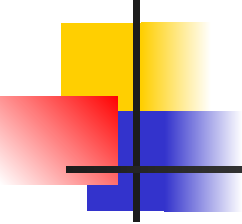
Уравнение можно записать в виде $x = \sqrt[3]{x+1}$. Здесь $\phi(x) = \sqrt[3]{x+1}$ и $\phi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$,

Поэтому $\phi'(x) \leq \frac{1}{3}$ при $1 \leq x \leq 2$

и, следовательно, условия сходимости процесса итерации не выполнены.

Если записать уравнение в виде $x = \sqrt[3]{x+1}$,
то будем иметь: $\psi(x) = \sqrt[3]{x+1}$ и $\psi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Отсюда $0 < \psi'(x) < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < \frac{1}{4}$ при $1 \leq x \leq 2$ и значит, процесс итерации для уравнения быстро сойдется.



Найдем корень ξ уравнения (10) с точностью до 10^{-2} . Вычисляем последовательные приближения x_i с одним запасным знаком по формуле

$$x_i = \sqrt[3]{x_i + 1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

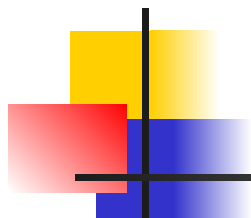
Найденные значения помещены в Таблицу 1:

Таблица 1

Значения последовательных приближений x_i .

i	0	1	2	3	4
x_i	1	1,260	1,312	1,322	1,3243

С точностью до 10^{-2} можно положить $\xi = 1,324$.



Mathcad Professional - [Решение уравнений средствами Mathcad.mcd]

Файл Плавка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Пример 1. Решение уравнения $\cos(x) = x + 0.2$ с помощью функции root

1 способ
 $x := 1$ - начальное приближение
 $f(x) := \cos(x) - x - 0.2$
 $\text{root}(f(x), x) = 0.616$

2 способ
 $x := 1$ - начальное приближение
 $\text{root}(\cos(x) - x - 0.2, x) = 0.616$

3 способ
 $\text{root}(\cos(x) - x - 0.2, x, 0, 1) = 0.616$

В способах 1 и 2, начальное приближение показывает функции root, где начать искать корень. В способе 3, 3 и 4 параметры определяют область, где искать корень.

В способе 1 первый аргумент - это функция $f(x)$, определенная в документе. В способах 2 и 3 - это выражение.

Пример 2. Нахождение корней полинома $x^4 - 10 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1$

$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$ - Используйте команду **Символы** \Rightarrow \Rightarrow **Коз** **Ф** **и** **ц** **и** **е** **н** **т** **ы** **п** **о** **л** **и** **н** **о** **м** **а** для создания вектора v

$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.591 \\ 0.305 - 0.277i \\ 0.305 + 0.277i \\ 9.981 \end{pmatrix}$