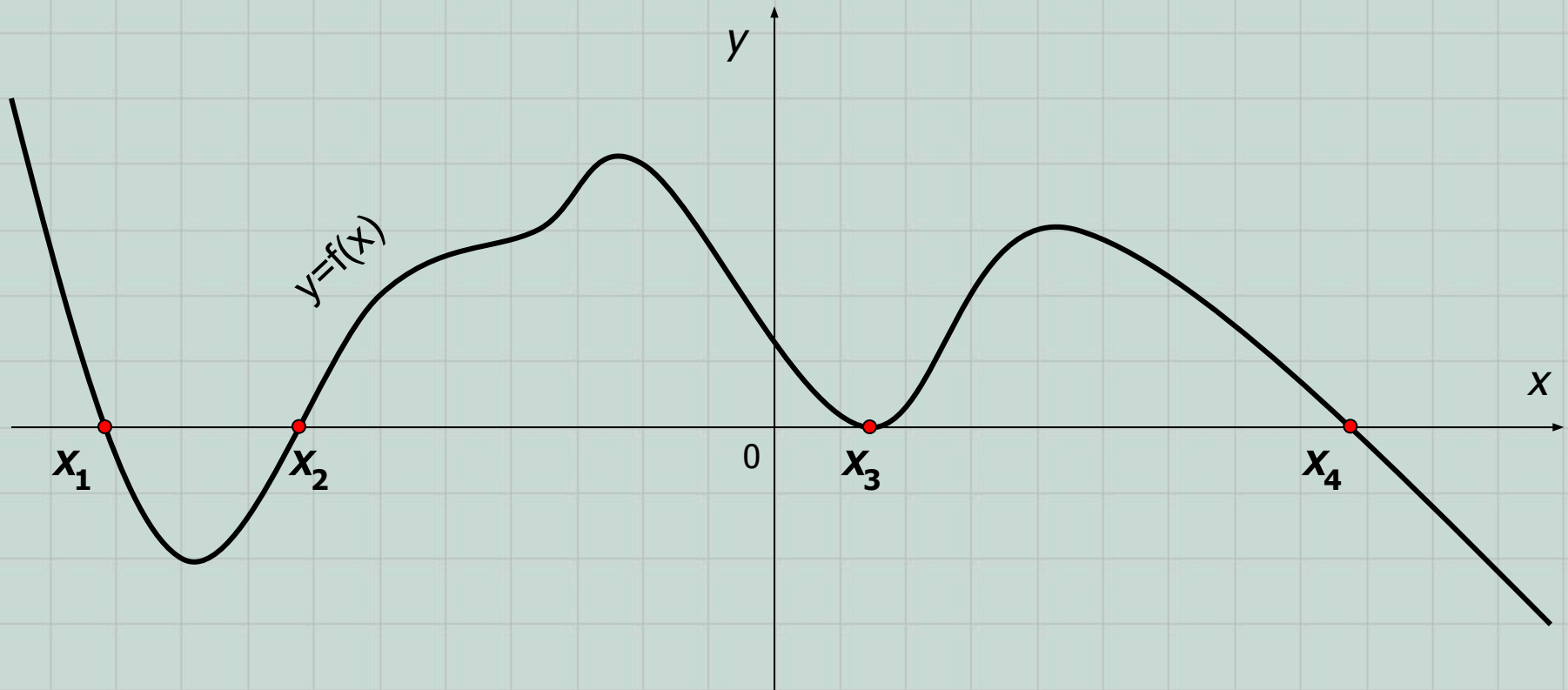


Решение неравенств методом интервалов.

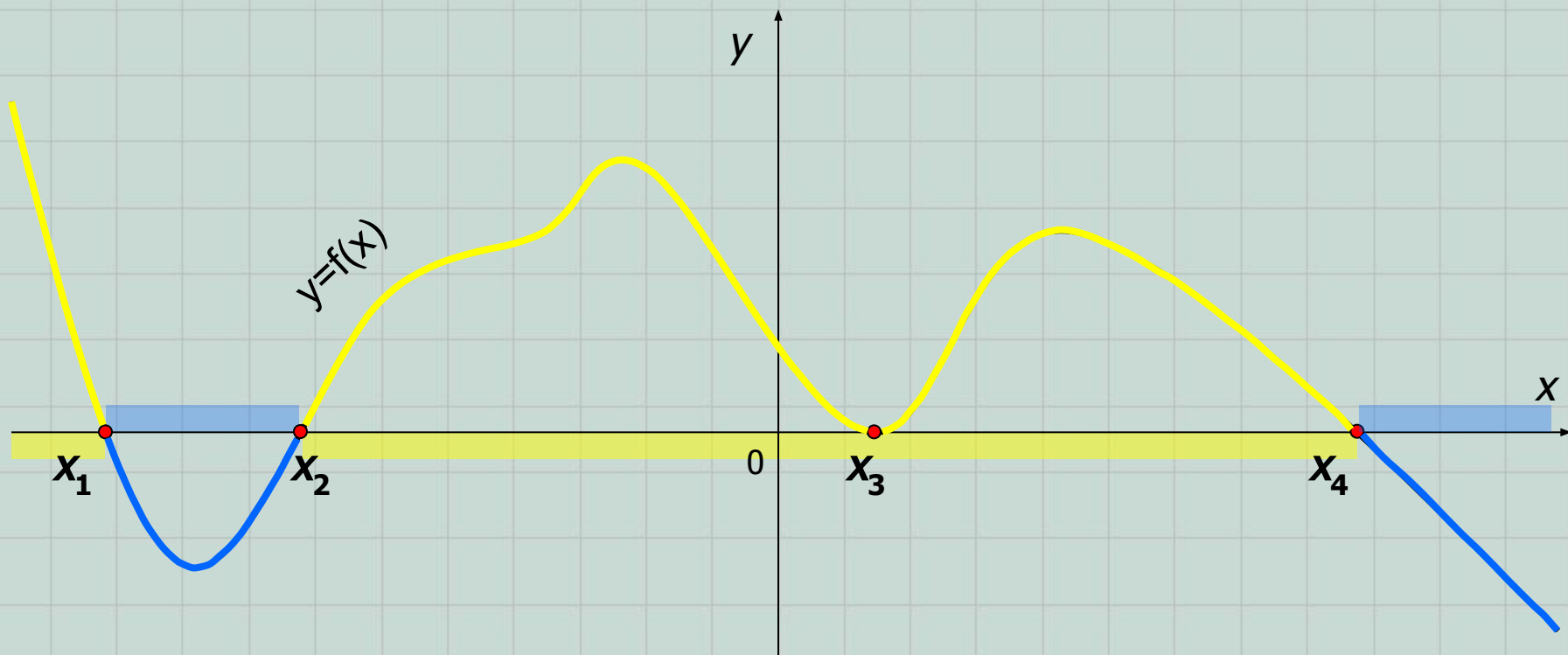
Алгебра и начала
анализа,
10 класс.



Пусть графиком функции $y=f(x)$ является некоторая гладкая кривая:



Очевидно, что $D(f)=E(f)=\square$. Обратим свое внимание на значения аргумента x_1 , x_2 , x_3 , x_4 – в этих точках график функции пересекает ось Ox или касается её. Это – так называемые **нули функции** (ординаты этих точек равны 0, т.е. $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$). Аналитически их можно найти, решая уравнение **$f(x)=0$** .



Точки x_1 , x_2 , x_3 , x_4 разбивают область определения функции $D(f)$ на **промежутки знакопостоянства**, т.е. промежутки, на которых функция имеет либо положительные значения ($f(x)>0$), либо отрицательные ($f(x)<0$). В нашем случае:

$$f(x)>0, \text{ при } x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3) \cup (x_3; x_4) \text{ и}$$

$$f(x)<0, \text{ при } x \in (x_1; x_2) \cup (x_4; +\infty).$$

Опираясь на эту геометрическую иллюстрацию, мы можем вывести алгоритм решения неравенств, получивший название «метод интервалов».

Методом интервалов можно решить любое неравенство вида: $f(x) \square 0$. При решении придерживаются следующей схемы (перепишите её в тетрадь!):

- 1) Найти $D(f)$;
- 2) Найти нули функции, решая уравнение $f(x)=0$;
- 3) Отметить на $D(f)$ все полученные нули;
- 4) Определить знак функции на каждом полученном промежутке;
- 5) Записать ответ, выбрав промежутки с соответствующим знаком.

Проиллюстрируем данную схему на нескольких примерах.

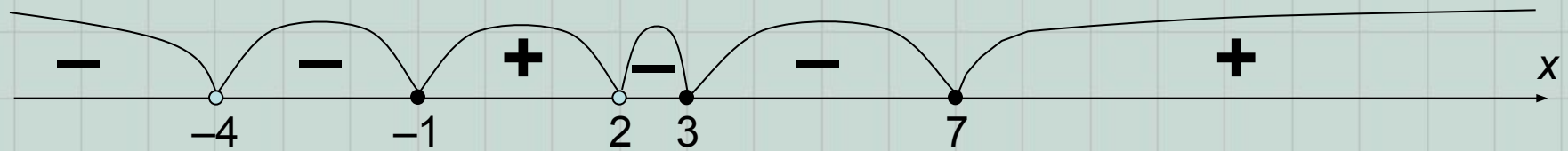
Пример 1. Решите неравенство $\frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \geq 0$.

Решение. Под функцией $f(x)$ следует понимать выражение в левой части неравенства. Это дробно-рациональная функция.

1) $D(f)=\square$, кроме $x = -4$; 2 (данные значения обращают знаменатель в нуль).

2) Найдем нули функции. Значение дроби равно нулю, если числитель этой дроби равен нулю, т.е. $x = -1; 3; 7$ – нули функции.

3) Обратите внимание, что *точки разрыва* функции (-4 и 2) всегда на числовой прямой будут пустыми (или «выколотыми»), а нули функции – в зависимости от знака неравенства (если знак неравенства строгий, то точки пустые, если нестрогий, то обычные).



4) Для расстановки знаков на полученных промежутках можно поступить так:

■ разложить левую часть неравенства на линейные множители (как в нашем случае); тогда на крайнем справа промежутке знак определяется комбинацией угловых коэффициентов этих линейных множителей (в нашем случае все коэффициенты равны 1, т.е. получается комбинация $\frac{+++}{++} > 0$);

■ на остальных промежутках (двигаемся от крайнего справа промежутка влево) знаки расставляются по правилу: знак по сравнению с предыдущим **меняется**, если показатель степени линейного множителя **нечетный** и **не изменяется**, если показатель степени линейного множителя **четный**. В нашем случае получается... (см.рис.).

$$\frac{(x-3)^2 (x-7)^3 (x+1)}{(x-2)(x+4)^4}$$

Вышеизложенный метод определения знаков на интервалах по сути опирается на понятие «кратных» корней. Если Вам этот термин не знаком, то можно воспользоваться другим способом:

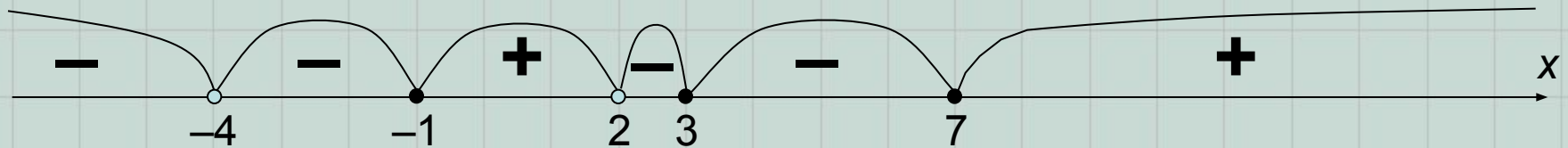
■ выбирая из каждого промежутка любое значение, подставляют в формулу, задающую данную функцию и определяют по полученной комбинации знак функции на каждом промежутке:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4}$$

а) $-5 \in (-\infty; -4) \Rightarrow f(-5) = \frac{+--}{-+} < 0$; б) $-2 \in (-4; -1) \Rightarrow f(-2) = \frac{+--}{-+} < 0$
;

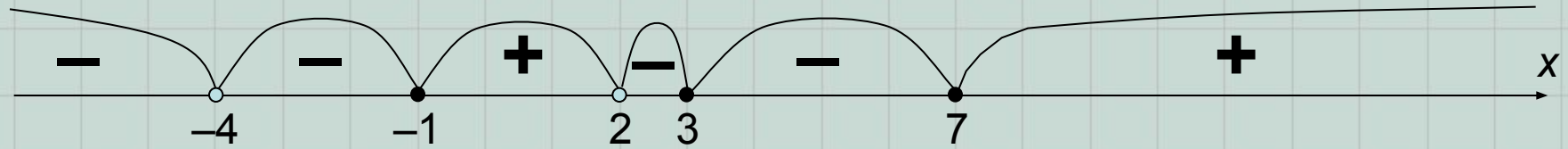
в) $0 \in (-1; 2) \Rightarrow f(0) = \frac{+-+}{-+} > 0$; г) $2,5 \in (2; 3) \Rightarrow f(2,5) = \frac{+-+}{++} < 0$;

д) $4 \in (3; 7) \Rightarrow f(4) = \frac{+-+}{++} < 0$; е) $8 \in (7; +\infty) \Rightarrow f(8) = \frac{+++}{++} > 0$;



Как Вы можете убедиться – результат расстановки знаков такой же, как в предыдущем способе.

5) Остается записать ответ, выбрав промежутки соответствующие знаку неравенства. В нашем случае, знаку « \geq » соответствуют промежутки со знаком «+». Важно не забыть $x=3$!!!



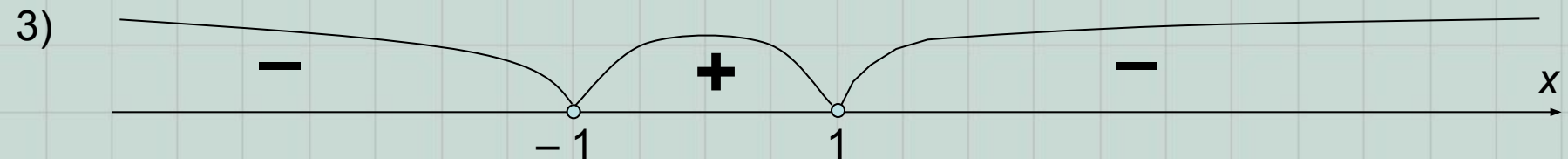
Ответ: $x \in [-1; 2) \cup \{3\} \cup [7; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\frac{x+3}{1-x} > \frac{x-4}{x+1}$.

Решение. Перенесем все в левую часть неравенства: $\frac{x+3}{1-x} - \frac{x-4}{x+1} > 0$.

1) $D(f) = \mathbb{R}$, кроме $x = -1; 1$, где $f(x) = \frac{2x^2 - x + 7}{(1-x)(x+1)}$;

2) Нулей функции нет, т.к. дискриминант квадратного трехчлена отрицательный;



4) Проверьте себя, как Вы поняли правило расстановки знаков...

5) Ответ: $x \in (-1;$

1).

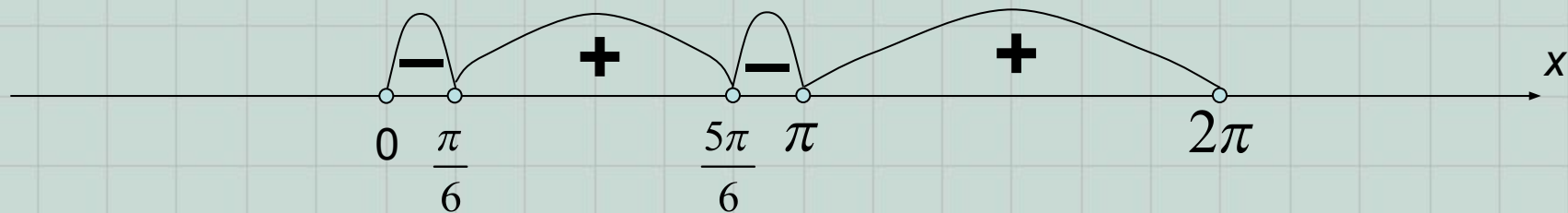
Пример 3. Решите неравенство $\sin x + \cos(2x) > 1$.

Решение. Перепишем неравенство в виде: $\sin x > 1 - \cos(2x)$. Используя формулы половинного аргумента, получим: $\sin x > 2\sin^2 x$ или $2\sin^2 x - \sin x < 0$.

1) $D(f) = \square$, где $f(x) = 2\sin^2 x - \sin x$;

2) $2\sin^2 x - \sin x = 0; \Rightarrow x \in \pi n = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \in \mathbf{Z}$;

3) Расставим полученные нули функции на числовой прямой:



Учитывая периодичность функции $y = \sin x$, достаточно ограничиться отрезком длиной 2π ;

4) Расставим знаки на полученных промежутках;

5) Запишем ответ:

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, \end{array} \right. \text{ где } x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k \right), \quad n, k \in \mathbf{Z}.$$