Курсовая работа по элективному курсу «решение нестандартных задач.»

Тема: «Решение отдельных видов уравнений n-й степени ($n>2$)»

Подготовили ученики 10 класса МОУСОШ №1 им. А. М. Денисова
Михаил Исполатов,
Дмитрий Шефер

п. Хвойная , 2009г.

Предисловие.

В школьном курсе алгебры известны методы решения уравнений 1 и 2 степеней по формулам. Методов решений высших степеней (3, 4 и т.д.) нет. А такие уравнения часто встречаются на вступительных экзаменах в вузы, в заданиях части «С» ЕГЭ, на олимпиадах. Мы представляем решение таких уравнений, в которых показываем несколько методов.

При овладении этими методами решения отдельных уравнений, метод будет являться стандартным. Эти методы не являются исчерпаемыми. Наша цель, показать как анализировать, видеть и организовывать поиск метода решения. Некоторые уравнения взяты из указанной ниже литературы, некоторые составлены авторами.

При желании эта тема может быть продолжена, расширена другими методами (графическим, функционально-аналитическим, графоаналитическим, логическими и другими), можно рассматривать сложно-степенные уравнения.

Нашей задачей из всего многообразия уравнений и методов решений выделить отдельные, на наш взгляд представляющих интерес.

План

- **1. Биквадратные уравнения.**

- **2. Симметричные уравнения.**

- **3. Степенные уравнения.**
- 3.1) *Кубические уравнения.*
- 3.2) *Уравнения 4-й степени.*
- **4. Графический метод решения уравнений.**

1. <u>Решение биквадратных уравнений.</u>

Биквадратные уравнения имеют общий вид:

$ax^4 + вx^2 + c = 0$ где **а**, **в** и **с** некоторые числа, а **х** – переменная. Такие уравнения решаются методом замены переменной. Например:

$2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ пусть **$x^2 = a$,** тогда получим уравнение вида **$2a^2 - 5a + 2 = 0$**

$D = в^2 - 4ac = 25 - 16 = 9.$ $\quad a_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad a_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

$X^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$X^2 = 2 \Rightarrow X_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $X_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

Биквадратные уравнения для самостоятельного решения

1). $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

2). $3X^4 - 11X^2 + 2,5 = 0$

3). $5X^4 - 3X^2 - 5 = 0$

4). $2X^4 + 3x^2 + 1 = 0$

5). $X^4 - 2X^2 + 1 = 0$

2. Решения симметричных уравнений.

Симметричные уравнения имеют общий вид:

$ax^4 + вx^3 + cx^2 + вx + a = 0$ где $a \neq o$

Например: **$2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$**

Так как **0** не является корнем этого уравнения, то разделим его на **x^2**, в результате получим: $2X^2 - 5x + 6 - \frac{\square}{x} + \frac{\square}{x^{\square}} = 0.$

Далее произведём группировку: $(2X^2 + \frac{2}{x^2}) + 6 - (5X + \frac{\square}{x}) = \square$

Вынесем за скобки общие множители: **$2\,(x^2 + \frac{\square}{x^2}) + 6 - 5(x + \frac{\square}{x}) = 0$**

Заменим **$x + \frac{\square}{x} = t$,** возведём это выражение в квадрат: **$(x + \frac{\square}{x})^2 = t^2$**

$X^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

Найдём t: $D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \bullet 2 \bullet 2 = 9$

$t_1 = \frac{\square + \square}{\square} = 2$; **$t_2 = \frac{\square - \square}{\square} = \frac{\square}{\square}$**

В результате получим 2 уравнения :

1. $\mathbf{x + \frac{\square}{x} = }2$ До множим это уравнение на **x**

$\mathbf{x^2 - 2x + 1 = 0}$ $(x - \square)^{\square} = \square \Rightarrow x = \square$

2. $\mathbf{x + \frac{\square}{x} = \frac{\square}{\square}}$

$2x^2 - 2x + 2 = 0;$

Найдём дискриминант: $D = 1 - 4 \bullet 2 \bullet 2 = -15;$

$\mathbf{D} < \square \Rightarrow$ нет корней на множестве **R.**

Ответ : $x = 1$

Симметричные уравнения для самостоятельного решения.

1). $5x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 5 = 0$

2). $6x^4 - 35x^3 - 62x^2 - 35x + 6 = 0$

3). $3x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 3 = 0$

3. Решение сложных степенных уравнений.

3.1 Кубические уравнения содержащие радикалы.

$$\square\square\xi\,\overline{\square\square}\,x^3 - 22x^2 + \square\square\square\square\xi\,\overline{\square\square}\,x - 6 = 0;$$ **Заменим** $x = \dfrac{y}{\xi\,\overline{\square\square}}$

В результате получим уравнение, не содержащее радикал:

$$2y^3 - 11y^2 + 17y - 6 = 0$$

Запишем уравнение в виде :

$$2y^3 - y^2 - 10y^2 + 5y + 12y - 6 = 0$$

Разложим левую часть на множители способом группировки:

$$y^2(2y - 1) - 5y(2y - 1) + 6(2y - 1) = 0$$

$$(2y - 1) \bullet (y^2 - 5y + 6) = 0$$

Получаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2y - 1 = 0 \\ y^2 - 5y + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ y = 2 \\ y = 3 \end{array}$$

Для каждого **y** найдём **x:**

$$X_1 = \frac{y_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_2 = \frac{y_2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$X_3 = \frac{y_3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{2}}{4};\ \sqrt{2};\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right\}$

Уравнения для самостоятельного решения.

1. $5\sqrt{5}x^3 - 10x^2 + 8\sqrt{5}x - 6 = 0$

2. $7\sqrt{7}\,x^3 - 14x^2 + 6\sqrt{7}x - 5 = 0$

3.2. Решение уравнений четвёртой степени различными способами.

3.2.1. Метод понижения степени

$$X^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$$

Так как **0** не является корнем данного уравнения, то разделим его на x^2

В результате получим:

$$X^2 - 5x + 10 - \frac{10}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$$

Представим уравнение в виде:

$$(x^2 + \frac{4}{x^2}) + 10 - (5x + \frac{10}{x}) = 0$$

$$4(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}) + 10 - 10 \cdot (\frac{x}{2} + \frac{1}{x}) = 0$$

Пуcть $\frac{x}{2}+\frac{1}{x}=a$, *тогда* $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^2=a^2$

$$\frac{x^2}{4}+1+\frac{1}{x^2}=a^2 \Rightarrow \frac{x^4}{4}+\frac{1}{x^2}=a^2-1$$

$$4\bullet(a^2-1)+10-10a=0$$

$$4a^2-10a+6=0$$

$$D=b^2-4ac=100-96=4$$

$$a_1=\frac{10-2}{8}=1$$

$$a_2=\frac{10+2}{8}=\frac{3}{2}$$

Т.к. $a = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, то получим 2 следующих уравнения:

1) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = 1$ Приводим всё к общему знаменателю и избавляемся от него:

$X^2 - 2x - 2 = 0$; $D = 4 - 8 = -4$ $D < 0$ (нет корней на множестве R)

2) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ помножаем на х это уравнение.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad D = 9 - 8 = 1$$

$$X_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$X_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Ответ: 1 ; 2

3.2.2. Метод разложения на множители.

$$\mathbf{X^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0}$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$(x^4 - x^3) - (4x^3 - 4x^2) + (6x^2 - 6x) - (4x - 4) = 0$$

$$X^3(x - 1) - 4x^2(x - 1) + 6x(x - 1) - 4(x - 1) = 0$$

$$(x - 1) \bullet (x^3 - 4x^2 + 6x - 4) = 0$$

$$1)\ x - 1 = 0$$

$$x_1 = 1$$

2) $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$

$$X^3 - x^2 - 3x^2 + 3x + 3x - 3 - 1 = 0$$

$$x^2(x - 1) - 3x(x - 1) + 3(x - 1) - 1 = 0$$

$$(x - 1) \bullet (x^2 - 3x + 3) - 1 = 0$$

$$(x - 1) \bullet (x^2 - x - 2x + 2 + 1) - 1 = 0$$

$$(x - 1) \bullet (x \bullet (x - 1) - 2(x - 1) + 1) - 1 = 0$$

$$(x - 1) \bullet ((x - 1) \bullet (x - 2) + 1) - 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 \bullet (x - 2) + x - 1 - 1 = 0$$

$$(x - 2)((x - 1)^2 + 1) = 0$$

$x - 2 = 0$ и $(x - 1)^2 + 1 = 0$

$x_2 = 2$ $\qquad$ $x^2 - 2X + 2 = 0$ $\quad D = 4 - 4 \bullet 2 = -4$ $\quad D < 0$

(нет корней на множестве **R**)

Ответ:□1: 2□

3.2.3 Применение бинома Ньютона

$$\mathbf{x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0}$$

Так как **0** не корень этого уравнения, то умножим его на **x**.

В результате получим уравнение:___ $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 4x = 0$

Запишем уравнение в виде:____ $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 + 1 - x = 0$

Докажем что выражение:______$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = (x-1)^5$

Доказательство: разложим по биному Ньютона выражение: $(x-1)^5$

$$(x-1)^5 = x^5 + C_5^1 x^4 \bullet (-1) + C_5^2 x^3 \bullet (-1)^2 + C_5^3 x^2 \bullet (-1)^3 + C_5^4 x \bullet (-1)^4 + C_5^5 \bullet (-1)^5 =$$

$$= x^5 - C_5^1 x^4 + C_5^2 x^3 - C_5^3 x^2 + C_5^4 x - 1$$

По коэффициентам треугольника Паскаля видим, что выражение :

$$x^5 - C_5^1 x^4 + C_5^2 x^3 - C_5^3 x^2 + C_5^4 x - 1 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 \Rightarrow$$

$(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$ является справедливым равенством.

С учетом этого, получим уравнение:

$(x-1)^5-(x-1)=0.$ Заменим: **x – 1 = a**

$$a^5-a=0$$

$$a\bullet(a^4-1)=0$$

$a_1 = 0$ и $a^4 - 1 = 0$

$$a=\pm1$$

$x - 1 = 0$ и $x - 1 = 1$ $x - 1 = -1$

$x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = 0$- посторонний корень

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

Уравнения для самостоятельного решения.

$\square$. $x^{\square} + \square x^{\square} + \square x^{\square} + \square x^{\square} + \square x^{\square} + \square x + \square = \square$

2. $\square x^{\square} - \square x^{\square} + \square x^{\square} - \square x - \square = \square$

3. $x^{\square} - \square x^{\square} + \square x^{\square} - \square x = \square$

4. $x^{\square} + \square x^{\square} + \square x + \square = \square$

5. $x^{\square} - x^{\square} - x^{\square} = x^{\square} - x^{\square} - x$

Графический метод решения уравнений повышенной степени.

$$\frac{-x^7+4x^5+x^3-x^2-4x}{x^3+x} = 0$$ Выносим из числителя и знаменателя за знак скобок x и сокращаем его.

$$\frac{-x^6+4x^4+x^2-x-4}{x^2+1} = 0 \qquad \frac{-x^6+4x^4+x^2-4}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} = 0$$

$$\frac{-x^4(x^2-4)+(x^2-4)}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} \qquad \frac{(x^2-4)(1-x^4)}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{(x^2-4)(1-x^2)(1+x^2)}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} \qquad -x^4+5x^2-4 = \frac{x}{x^2+1}$$

Корнями данного уравнения будут являться точки пересечения графиков функций: $y = -x^4+5x^2-4$ и $y = \frac{x}{x^2+1}$. Исследуем и отобразим на графике данные функции.

1.$y = -x^4 + 5x^2 - 4$

1)*Д(у)*=$(-\infty; +\infty)$

2) $y(-x) = -x^4 + 5x^2 - 4$ значет $y(x) = y(-x) \Rightarrow$ функция чётная.

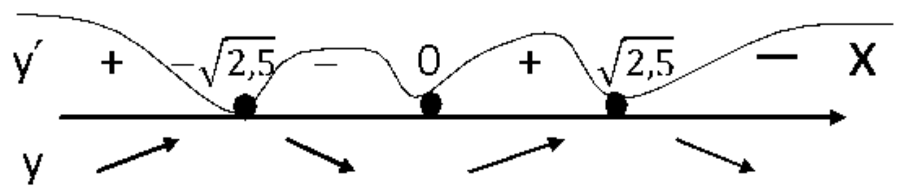
3)Вертикальных и горизонтальны асимптот не имеет.

4)$y' = -4x^3 + 10x = -2x(2x^2 - 5)$

Найдём стационарные точки: $-2x(2x^2 - 5) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{2,5}$

Определим поведение функции



5) Дополнительные точки. При x=-2;-1;1;2 y=0

2. $\quad y = \frac{x}{x^2+1}$

1) $Д(y) = (-\infty; +\infty)$

2) $y(-x) = -\frac{x}{x^2+1} = -y(x) \;\; \Rightarrow$ Функция нечётная.

3) Вертикальная асимптота отсутствует горизонтальная асимптота =

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0$

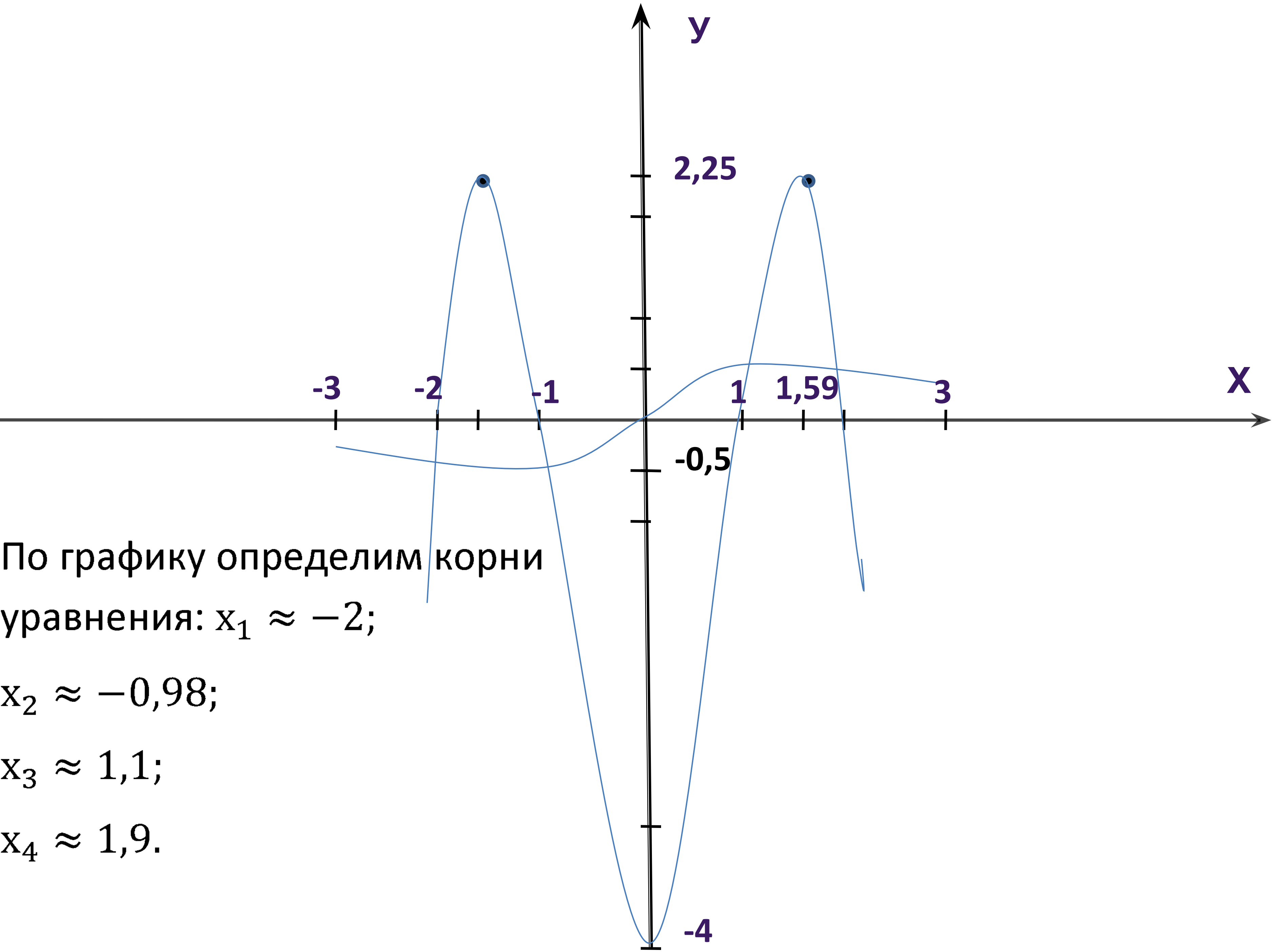
4) $y' = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ Найдём стационарные точки: $1 - x^2 = 0$

$x = \pm 1 \qquad y' \quad - \quad -1 \quad + \quad 1 \quad - \quad x$

$y \quad \searrow \quad \nearrow \quad \searrow$

5) Дополнительные точки:

x	-3	-2	2	3
y	-0,3	-0,4	0,4	0,3



По графику определим корни уравнения: $x_1 \approx -2$;

$x_2 \approx -0{,}98$;

$x_3 \approx 1{,}1$;

$x_4 \approx 1{,}9$.

$$x^{\log_{x^2} 16-\log_{\sqrt{x}} 7}+x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3\frac{4}{49}=0$$

Упростим степень: $\log_{x^2} 16-\log_{\sqrt{x}} 7=\frac{1}{2}\log_x 16-2\log_x 7=$

$=\log_x 4-\log_x 49=\log_x \frac{4}{49}$

$$x^{\log_x \frac{4}{49}}+x^5+x^4-6x^3-4x^2-11x-3-\frac{4}{49}$$

$$x^5+x^4-6x^3-4x^2-11x-3=0$$

Для решения этого уравнения воспользуемся свойством уравнений вида $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$, где $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$-являются целыми коэффициентами, причём корень $x_0 \neq 0$ целое число, а $\frac{a_n}{x_0}$ тоже целое число.

$-\frac{3}{x_0} \in Z \Rightarrow x$ может быть равным -3, -1, 1, 3. Проверкой исключим посторонние корни. Ответ: x_1=1; x_2=3

Литература:

1. «Задачи по элементарной математике» - В. Б. Лидинский и др. Издательство «Наука» - 1968г.
2. «Дидактические материалы по алгебре и начале анализа.» – ЭЛ. И. Звавич и др. Издательство «Дрофа» 1999г.
3. «Задачи по математике для внеклассных занятий», И. Х. Сивашенский и др. Издательство «Просвещение» - 1968г.
4. «Алгебраический тренажёр» А. Г. Мерзляк и др. Издательство «Илекса» Москва – 1998г.
5. «Материалы ЕГЭ последних лет».

Спасибо за внимание.