Курсовая работа по элективному курсу «решение нестандартных задач.»

Тема: «Решение отдельных видов уравнений n-й степени (n>2)»

Подготовили ученики 10 класса МОУСОШ №1 им. А. М. Денисова
Михаил Исполатов,
Дмитрий Шефер

п. Хвойная , 2009г.

Предисловие.

В школьном курсе алгебры известны методы решения уравнений 1 и 2 степеней по формулам. Методов решений высших степеней (3, 4 и т.д.) нет. А такие уравнения часто встречаются на вступительных экзаменах в вузы, в заданиях части «С» ЕГЭ, на олимпиадах. Мы представляем решение таких уравнений, в которых показываем несколько методов.

При овладении этими методами решения отдельных уравнений, метод будет являться стандартным. Эти методы не являются исчерпаемыми. Наша цель, показать как анализировать, видеть и организовывать поиск метода решения. Некоторые уравнения взяты из указанной ниже литературы, некоторые составлены авторами.

При желании эта тема может быть продолжена, расширена другими методами (графическим, функционально-аналитическим, графоаналитическим, логическими и другими), можно рассматривать сложно-степенные уравнения.

Нашей задачей из всего многообразия уравнений и методов решений выделить отдельные, на наш взгляд представляющих интерес.

План

- **1. Биквадратные уравнения.**
- **2. Симметричные уравнения.**
- **3. Степенные уравнения.**
- 3.1) *Кубические уравнения.*
- 3.2) *Уравнения 4-й степени.*
- **4. Графический метод решения уравнений.**

1. Решение биквадратных уравнений.

Биквадратные уравнения имеют общий вид:

$\mathbf{ax^4 + вx^2 + c = 0}$ где **а**, **в** и **с** некоторые числа, а **х** – переменная. Такие уравнения решаются методом замены переменной. Например:

$\mathbf{2x^4 - 5x^2 + 2 = 0}$ пусть $\mathbf{x^2 = a}$**,** тогда получим уравнение вида

$\mathbf{2a^2 - 5a + 2 = 0}$

$\mathbf{D = в^2 - 4ac = 25 - 16 = 9.}$ $\quad a_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

$X^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$X^2 = 2 \Rightarrow X_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $X_{3,4} = \pm\sqrt{2}$

Биквадратные уравнения для самостоятельного решения

1). $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

2). $3X^4 - 11X^2 + 2,5 = 0$

3). $5X^4 - 3X^2 - 5 = 0$

4). $2X^4 + 3x^2 + 1 = 0$

5). $X^4 - 2X^2 + 1 = 0$

2. Решения симметричных уравнений.

Симметричные уравнения имеют общий вид:

$ax^4 + вx^3 + cx^2 + вx + a = 0$ где $a \neq o$

Например: **$2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$**

Так как **0** не является корнем этого уравнения, то разделим его на **x^2**, в результате получим: $2X^2 - 5x + 6 - \frac{\square}{x} + \frac{\square}{x^{\square}}$ **= 0.**

Далее произведём группировку: $(2X^2 + \frac{2}{x^2}) + 6 - (5X + \frac{\square}{x}) = \square$

Вынесем за скобки общие множители: **$2\,(x^2 + \frac{\square}{x^2}) + 6 - 5(x + \frac{\square}{x}) = 0$**

Заменим **$x + \frac{\square}{x} = t$,** возведём это выражение в квадрат: **$(x + \frac{\square}{x})^2 = t^2$**

$X^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

Найдём t: $D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \bullet 2 \bullet 2 = 9$

$t_1 = \frac{\square + \square}{\square}$ $= 2$; **$t_2 = \frac{\square - \square}{\square} = \frac{\square}{\square}$**

В результате получим 2 уравнения :

1. $\mathbf{x + \frac{\square}{x} = }\ 2$ До множим это уравнение на **x**

$\mathbf{x^2 - 2x + 1 = 0}$ $(x - \square)^{\square} = \square \Rightarrow x = \square$

2. $\mathbf{x + \frac{\square}{x} = \frac{\square}{\square}}$

$2x^2 - 2x + 2 = 0;$

Найдём дискриминант: $D = 1 - 4 \bullet 2 \bullet 2 = -15;$

$\mathbf{D} < \square \Rightarrow$ нет корней на множестве **R.**

Ответ : $x = 1$

Симметричные уравнения для самостоятельного решения.

1). $5x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 5 = 0$

2). $6x^4 - 35x^3 - 62x^2 - 35x + 6 = 0$

3). $3x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 3 = 0$

3. Решение сложных степенных уравнений.

3.1 Кубические уравнения содержащие радикалы.

□□ξ□□$x^3 - 22x^2 +$ □□□□ξ□□$x - 6 = 0$; Заменим $x = \frac{y}{\xi□□}$

В результате получим уравнение, не содержащее радикал:

$$2y^3 - 11y^2 + 17y - 6 = 0$$

Запишем уравнение в виде :

$$2y^3 - y^2 - 10y^2 + 5y + 12y - 6 = 0$$

Разложим левую часть на множители способом группировки:

$$y^2(2y - 1) - 5y(2y - 1) + 6(2y - 1) = 0$$

$$(2y - 1) \bullet (y^2 - 5y + 6) = 0$$

Получаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2y - 1 = 0 \\ y^2 - 5y + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ y = 2 \\ y = 3 \end{array}\right.$$

Для каждого **y** найдём **x:**

$$X_1 = \frac{y_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$X_2 = \frac{y_2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$X_3 = \frac{y_3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{2}}{4}; \sqrt{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right\}$

Уравнения для самостоятельного решения.

1. $5\sqrt{5}x^3 - 10x^2 + 8\sqrt{5}x - 6 = 0$

2. $7\sqrt{7}\,x^3 - 14x^2 + 6\sqrt{7}x - 5 = 0$

3.2. Решение уравнений четвёртой степени различными способами.

3.2.1. Метод понижения степени

$$X^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0$$

Так как **0** не является корнем данного уравнения, то разделим его на **x^2**

В результате получим:

$$X^2 - 5x + 10 - \frac{10}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$$

Представим уравнение в виде:

$$(x^2 + \frac{4}{x^2}) + 10 - (5x + \frac{10}{x}) = 0$$

$$4(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}) + 10 - 10 \cdot (\frac{x}{2} + \frac{1}{x}) = 0$$

Путь $\frac{x}{2}+\frac{1}{x}=a$, *тогда* $(\frac{x}{2}+\frac{1}{x})^2=a^2$

$$\frac{x^2}{4}+1+\frac{1}{x^2}=a^2 \Rightarrow \frac{x^4}{4}+\frac{1}{x^2}=a^2-1$$

$$4\bullet\square a^2-1\square+10-10a=0$$

$$4a^2-10a+6=0$$

$$\square\square=\square\square^2-4ac=100-96=4$$

$$a_1=\frac{10-2}{8}=1$$

$$a_2=\frac{10+2}{8}=\frac{3}{2}$$

Т.к. $a = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, то получим 2 следующих уравнения:

1) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = 1$ Приводим всё к общему знаменателю и избавляемся от него:

$X^2 – 2x – 2 = 0$; $D = 4 – 8 = - 4$ $D < 0$ (нет корней на множестве R)

2) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ помножаем на x это уравнение.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad D = 9 - 8 = 1$$

$$X_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$X_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Ответ: $\{1 ;\ 2\}$

3.2.2. Метод разложения на множители.

$$\mathbf{X^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0}$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$(x^4 - x^3) - (4x^3 - 4x^2) + (6x^2 - 6x) - (4x - 4) = 0$$

$$X^3(x - 1) - 4x^2(x - 1) + 6x(x - 1) - 4(x - 1) = 0$$

$$(x - 1) \bullet (x^3 - 4x^2 + 6x - 4) = 0$$

$$1)\ x - 1 = 0$$

$$x_1 = 1$$

2) $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$

$X^3 - x^2 - 3x^2 + 3x + 3x - 3 - 1 = 0$

$x^2(x - 1) - 3x(x - 1) + 3(x - 1) - 1 = 0$

$(x - 1) \bullet (x^2 - 3x + 3) - 1 = 0$

$(x - 1) \bullet \mathbf{(}x^2 - x - 2x + 2 + 1\mathbf{)} - 1 = 0$

$(x - 1) \bullet \mathbf{(}x \bullet (x - 1) - 2(x - 1) + 1\mathbf{)} - 1 = 0$

$(x - 1) \bullet \mathbf{(}\ (x - 1) \bullet (x - 2) + 1\mathbf{)} - 1 = 0$

$(x - 1)^2 \bullet (x - 2) + x - 1 - 1 = 0$

$(x - 2)((x - 1)^2 + 1) = 0$

$x - 2 = 0$ и $(x - 1)^2 + 1 = 0$

$x_2 = 2$ $\quad x^2 - 2X + 2 = 0$ $\quad D = 4 - 4 \bullet 2 = -4$ $\quad D < 0$

(нет корней на множестве **R**)

Ответ:□1: 2□

3.2.3 Применение бинома Ньютона

$$\mathbf{x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0}$$

Так как **0** не корень этого уравнения, то умножим его на **x**.

В результате получим уравнение:___ $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 4x = 0$

Запишем уравнение в виде:____ $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 + 1 - x = 0$

Докажем что выражение:______$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = (x-1)^5$

Доказательство: разложим по биному Ньютона выражение: $(x-1)^5$

$$(x-1)^5 = x^5 + C_5^1 x^4 \bullet (-1) + C_5^2 x^3 \bullet (-1)^2 + C_5^3 x^2 \bullet (-1)^3 + C_5^4 x \bullet (-1)^4 + C_5^5 \bullet (-1)^5 =$$

$$= x^5 - C_5^1 x^4 + C_5^2 x^3 - C_5^3 x^2 + C_5^4 x - 1$$

По коэффициентам треугольника Паскаля видим, что выражение :

$$x^5 - C_5^1 x^4 + C_5^2 x^3 - C_5^3 x^2 + C_5^4 x - 1 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 \Rightarrow$$

$(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$ является справедливым равенством.

С учетом этого, получим уравнение:

$(x-1)^5-(x-1)=0.$ Заменим: **x – 1 = a**

$$a^5-a=0$$

$$a\bullet\left(a^4-1\right)=0$$

$a_1 = 0$ и $a^4 - 1 = 0$

$a=\pm 1$

$x - 1 = 0$ и $x - 1 = 1$ $x - 1 = -1$

$x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = 0$- посторонний корень

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

Уравнения для самостоятельного решения.

$\square$. $x^{\square\square}+\square\square x^{\square\square}+\square\square\square\square x^{\square\square}+\square\square\square\square x^{\square\square}+\square\square\square\square x^{\square\square}+\square\square x+\square\square=\square\square$

2. $\square\square x^{\square\square}-\square\square x^{\square\square}+\square\square x^{\square\square}-\square\square x-\square\square=\square\square$

3. $x^{\square\square}-\square\square x^{\square\square}+\square\square x^{\square\square}-\square\square x=\square\square$

4. $x^{\square\square}+\square\square x^{\square\square}+\square\square\square\square x+\square\square\square\square=\square\square$

5. $x^{\square\square}-x^{\square\square}-x^{\square\square}=x^{\square\square}-x^{\square\square}-x$

Графический метод решения уравнений повышенной степени.

$$\frac{-x^7+4x^5+x^3-x^2-4x}{x^3+x} = 0$$ Выносим из числителя и знаменателя за знак скобок X и сокращаем его.

$$\frac{-x^6+4x^4+x^2-x-4}{x^2+1} = 0 \qquad \frac{-x^6+4x^4+x^2-4}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} = 0$$

$$\frac{-x^4(x^2-4)+(x^2-4)}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} \qquad \frac{(x^2-4)(1-x^4)}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{(x^2-4)(1-x^2)(1+x^2)}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} \qquad -x^4+5x^2-4 = \frac{x}{x^2+1}$$

Корнями данного уравнения будут являться точки пересечения графиков функций: $y = -x^4+5x^2-4$ и $y = \frac{x}{x^2+1}$. Исследуем и отобразим на графике данные функции.

$1. y=-x^4+5x^2-4$

1)*Д(у)*$=(-\infty;+\infty)$

2) $y(-x)=-x^4+5x^2-4$ значет $y(x)=y(-x) \Rightarrow$ функция чётная.

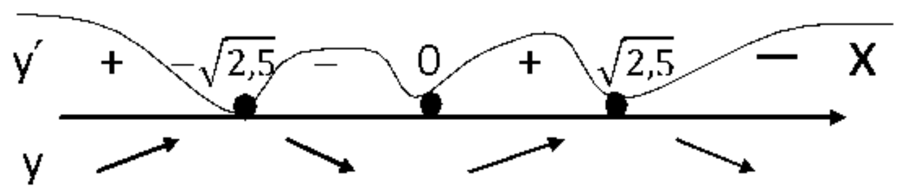
3)Вертикальных и горизонтальны асимптот не имеет.

4)$y'=-4x^3+10x=-2x(2x^2-5)$

Найдём стационарные точки: $-2x(2x^2-5)=0$

$x_1=0 \quad x_{2,3}=\pm\sqrt{2,5}$

Определим поведение функции



5) Дополнительные точки. При x=-2;-1;1;2 y=0

2. $y=\frac{x}{x^2+1}$

1) $Д(y)=(-\infty;+\infty)$

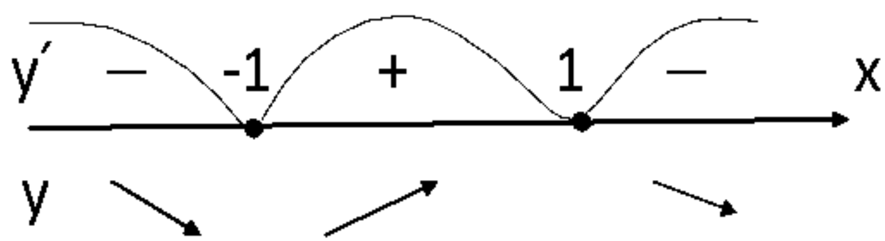
2) $y(-x)=-\frac{x}{x^2+1}=-y(x)$ ⇒ Функция нечётная.

3)Вертикальная асимптота отсутствует горизонтальная асимптота =

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0$

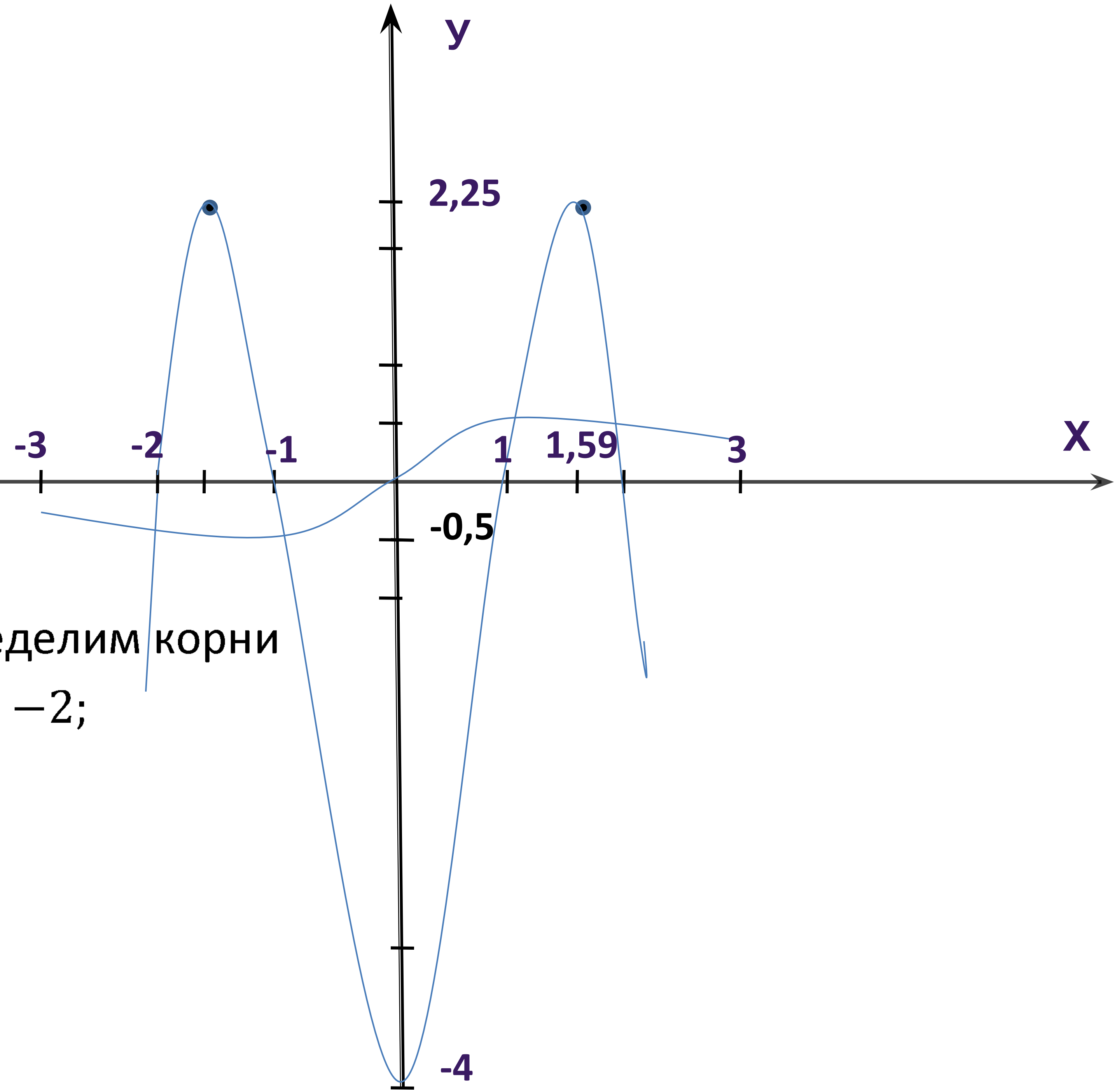
4) $y'=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ Найдём стационарные точки: $1-x^2=0$

$x=\pm1$



5) Дополнительные точки:

x	-3	-2	2	3
y	-0,3	-0,4	0,4	0,3



По графику определим корни уравнения: $x_1 \approx -2$;

$x_2 \approx -0{,}98$;

$x_3 \approx 1{,}1$;

$x_4 \approx 1{,}9$.

$$x^{\log_{x^2} 16 - \log_{\sqrt{x}} 7} + x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3\frac{4}{49} = 0$$

Упростим степень: $\log_{x^2} 16 - \log_{\sqrt{x}} 7 = \frac{1}{2}\log_x 16 - 2\log_x 7 =$

$= \log_x 4 - \log_x 49 = \log_x \frac{4}{49}$

$$x^{\log_x \frac{4}{49}} + x^5 + x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 11x - 3 - \frac{4}{49}$$

$$x^5 + x^4 - 6x^3 - 4x^2 - 11x - 3 = 0$$

Для решения этого уравнения воспользуемся свойством уравнений вида $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$-являются целыми коэффициентами, причём корень $x_0 \neq 0$ целое число, а $\frac{a_n}{x_0}$ тоже целое число.

$-\frac{3}{x_0} \in \cancel{Z} \Rightarrow x$ может быть равным -3, -1, 1, 3. Проверкой исключим посторонние корни. Ответ: $x_1=1$; $x_2=3$

Литература:

1. «Задачи по элементарной математике» - В. Б. Лидинский и др. Издательство «Наука» - 1968г.
2. «Дидактические материалы по алгебре и начале анализа.» – ЭЛ. И. Звавич и др. Издательство «Дрофа» 1999г.
3. «Задачи по математике для внеклассных занятий», И. Х. Сивашенский и др. Издательство «Просвещение» - 1968г.
4. «Алгебраический тренажёр» А. Г. Мерзляк и др. Издательство «Илекса» Москва – 1998г.
5. «Материалы ЕГЭ последних лет».

Спасибо за внимание.