Урок – лекция *по теме :*

«Показательные неравенства, их типы и методы решения»

Учитель математики МОУ – СОШ №2 р.п.Степное

Труфякова Галина Ивановна

Аннотация урока

- **Тема « Показательные неравенства» является важнейшей темой математики . По учебнику С. М. Никольского она изучается в 10 классе и на её изучение по планированию отводится 2 часа :**
1час-Простейшие показательные неравенства ;
1 час – Неравенства , сводящиеся к простейшим заменой неизвестного .
За это время нужно познакомить учащихся с новым и очень объёмным материалом , научить их решать все типы показательных неравенств и хорошо отработать эти навыки и умения .Поэтому уроки формирования новых знаний в виде лекций с применением информационно-коммуникационной технологии позволяют решать эти проблемы быстро и с большим успехом .

Показательные неравенства

их типы и методы решения

Альберт Эйнштейн

- « Мне приходится делить своё время между политикой и решением уравнений и неравенств . Однако решение уравнений и неравенств , по-моему, гораздо важнее , потому что политика существует только для данного момента , а уравнения и неравенства будут существовать вечно .»

Структура урока

1. Организационный момент
2. Постановка целей и задач
3. План лекции
4. Актуализация знаний учащихся в виде повторения ранее изученного материала
5. Введение новых знаний
6. Закрепление знаний в форме собеседования
7. Подведение итогов урока
8. Домашнее задание

Организационный момент

1. **Приветствовать учащихся**
2. **Отметить в классном журнале фамилии учащихся , отсутствующих на уроке**

Постановка целей и задач

1. **Объявить учащимся в начале урока его цели и задачи**
2. **Познакомить учащихся с планом лекции и записать его в тетради**

Цели урока

- Образовательные

1. **Формирование понятия показательного неравенства**
2. **Ознакомление учащихся с типами показательных неравенств**
3. **Формирование умений и навыков решения показательных неравенств**

Цели урока

- Воспитательные

1. **Воспитание трудолюбия**
2. **Воспитание самостоятельности в достижении цели**
3. **Формирование вычислительных навыков**
4. **Формирование эстетических навыков при оформлении записей**

Цели урока

- Развивающие

1. **Развитие мыслительной деятельности**
2. **Развитие творческой инициативы**
3. **Развитие познавательной активности**
4. **Развитие речи и памяти**

Задачи урока

1. **Повторить свойства показательной функции**
2. **Повторить правила решения квадратных и дробно – рациональных неравенств**
3. **Отработать алгоритм решения простейших показательных неравенств**
4. **Научить учащихся различать типы показательных неравенств**
5. **Научить учащихся решать показательные неравенства**

Тип урока

Урок формирования новых знаний

Вид урока

Урок - лекция

Методы обучения

Объяснительно-иллюстративный
Эвристический
Поисковый
Проблемный

Технология обучения

Информационно-коммуникационная технология, основанная на проблемном обучении

План лекции

1. Повторение свойств показательной функции
2. Простейшие показательные неравенства
3. Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим
4. Показательные неравенства, сводящиеся к квадратным неравенствам
5. Однородные показательные неравенства первой степени
6. Однородные показательные неравенства второй степени
7. Показательные неравенства, сводящиеся к рациональным неравенствам
8. Показательные нестандартные неравенства

Повторение ранее изученного материала

- **Решить на доске и в тетрадях :**
- **а) квадратные неравенства :**

1. $x^2 - 2x - 1 \geq 0$
2. $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

- **б) дробно- рациональное неравенство :**

1. $(x - 5) \backslash (x - 2) \leq 0$

Повторение свойств показательной функции

Свойства показательной функции

1. Область определения функции	$(-\infty;\infty)$	
2. Область значений функции	$(0;\infty)$	
3. Промежутки сравнения значений функции с единицей	$y=a^x, a>1$	$y=a^x, 0<a<1$
	при $x>0,\ a^x>1$	при $x>0,\ 0<a^x<1$
	при $x<0,\ 0<a^x<1$	при $x<0,\ a^x>1$
4. Четность, нечетность	Функция не является ни чётной, ни нечётной (функция общего вида).	
5. Монотонность	монотонно возрастает на **R**	монотонно убывает на **R**
6. Экстремумы	Показательная функция экстремумов не имеет	
7. Асимптота	Ось O_x является горизонтальной **асимптотой**	
8. При любых действительных значениях **x** и **y; a>0, a≠1; b>0, b≠1.**	1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$; 3) $(ab)^x = a^x b^x$; 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; 5) $(a^x)^y = a^{xy}$;	6) $r \in Q$ и $a<b$, то $a^r < b^r$ при $r>0$; $a^r > b^r$ при $r<0$; 7) $r, s \in Q$ и $r>s$, то $a^r > a^s$ при $a>1$; $a^r < a^s$ при $0<a<1$.

Задание № 1

Найдите область определения функции

$y = 2^{\frac{5}{2x-3}}$	$(-\infty;1{,}5)\cup(1{,}5;\infty)$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$	$(0;\infty)$
$y = 8^{\lg(-x)}$	$(-\infty;0)$
$y = (0{,}1)^{\cos x}$	R

Задание № 2

Определите значение a

$a^5 > a^8$	$0 < a < 1$	$5 < 8$
$a^{0,8} < a^{1,7}$	$a > 1$	$0,8 < 1,7$
$a^{-2} > a^{-1}$	$0 < a < 1$	$-2 < -1$
$a^{2,5} > a^{3,6}$	$0 < a < 1$	$2,5 < 3,6$

?

Задание № 3

Определите тип функции

$y = (1{,}3)^x$	возрастающая	$1{,}3 > 1$
$y = (0{,}8)^x$	убывающая	$0 < 0{,}8 < 1$
$y = e^x$	возрастающая	$e > 1$
$y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$	убывающая	$0 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$

Введение новых знаний

ОПРЕДЕЛЕНИЕ
простейших показательных неравенств:

Пусть **a** – данное положительное, не равное единице число и **b** – данное действительное число. Тогда неравенства

$a^x > b$ $(a^x \geq b)$ и $a^x < b$ $(a^x \leq b)$

называются простейшими показательными неравенствами.

ЧТО НАЗЫВАЕТСЯ
решением неравенства?

Решением неравенства с неизвестным x называют число x_0, при подстановке которого в неравенство получается верное числовое неравенство.

ЧТО ЗНАЧИТ **решить неравенство?**

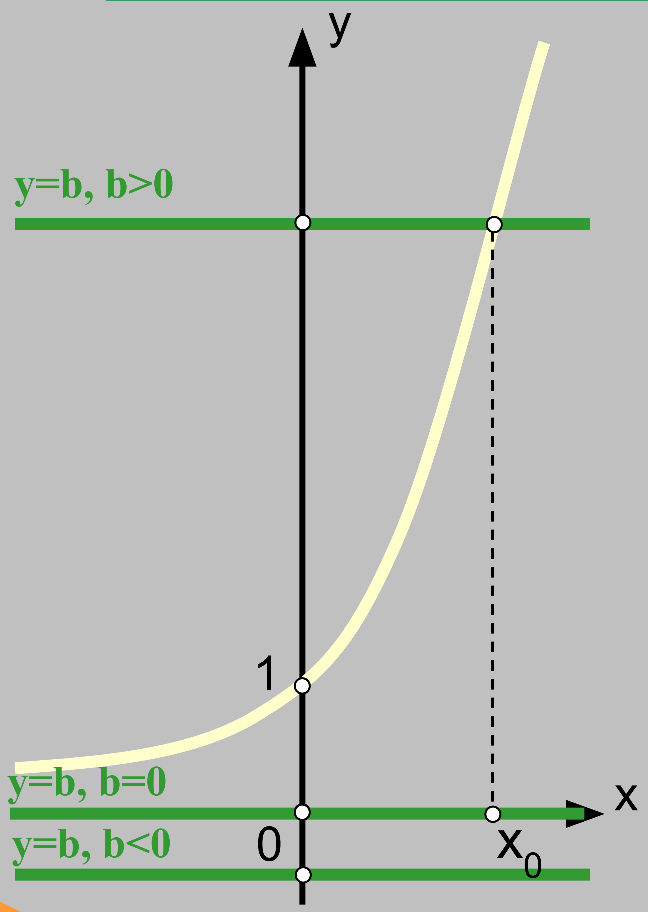
Решить неравенство –

значит, найти все его решения или

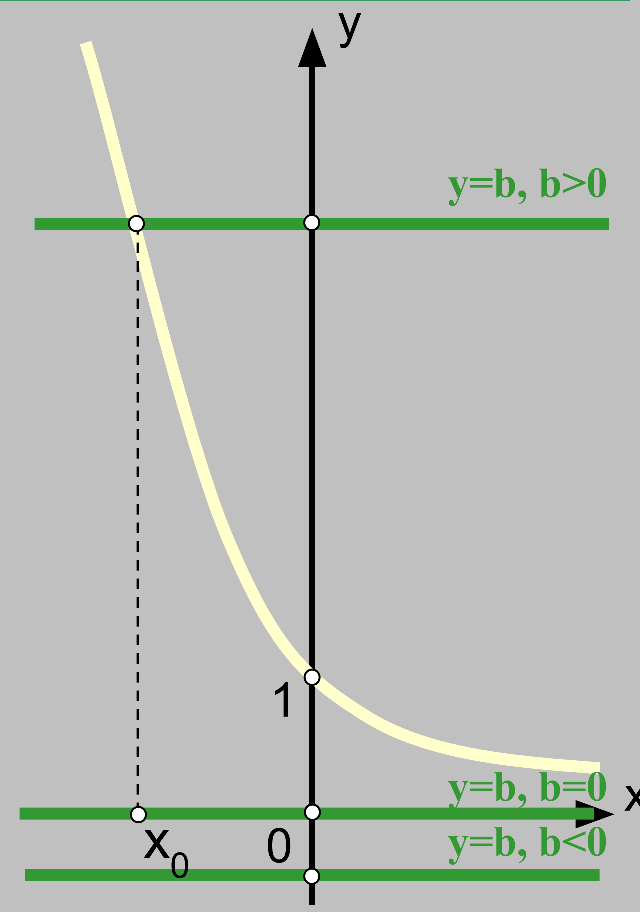
показать, что их нет.

Рассмотрим взаимное расположение графика функции $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ и прямой $y=b$

$y = a^x, a > 1$ и $b \in R$



$y = a^x, 0 < a < 1$ и $b \in R$



ВЫВОД №1:

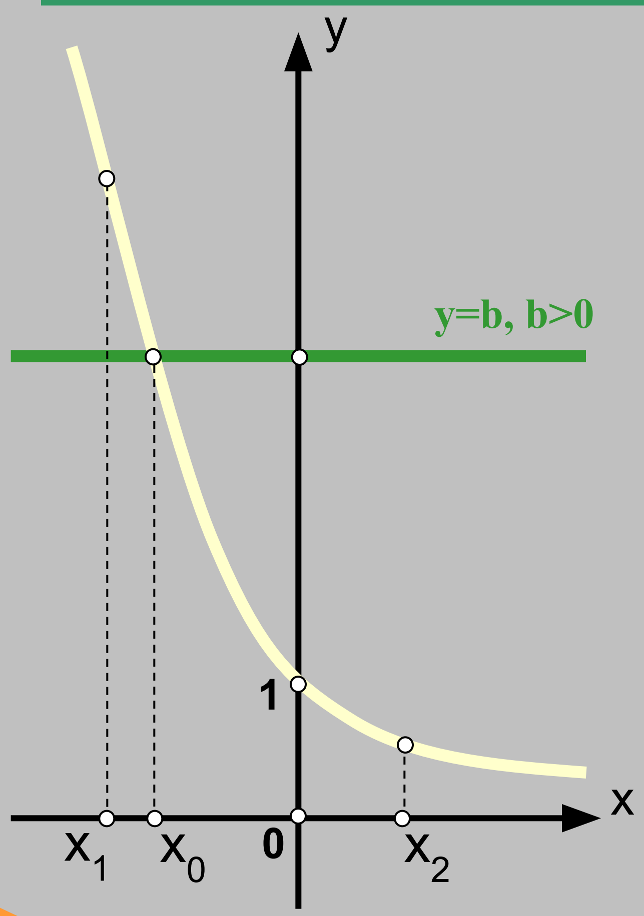
При **b ≤ 0** прямая **y=b** не пересекает график функции **$y=a^x$**, т.к. расположена ниже кривой **$y=a^x$**, поэтому неравенства **$a^x > b$ ($a^x \geq b$)** выполняются при **$x \in R$**, а неравенства **$a^x < b$ ($a^x \leq b$)** не имеют решения.

$2^x > -5$ справедливо при любых x	$2^x > 0$ и $-5 < 0$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq -4$ справедливо при любых x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$ и $-4 < 0$
$10^x < -3$ решений нет	$10^x > 0$ и $-3 < 0$
$\left(\frac{1}{7}\right)^x \leq -10$ решений нет	$\left(\frac{1}{7}\right)^x > 0$ и $-10 < 0$

ВЫВОД №2:

При **b > 0** прямая у **= b** пересекает график функции $y = a^x$ в единственной точке, абсцисса которой $x_0 = \log_a b$

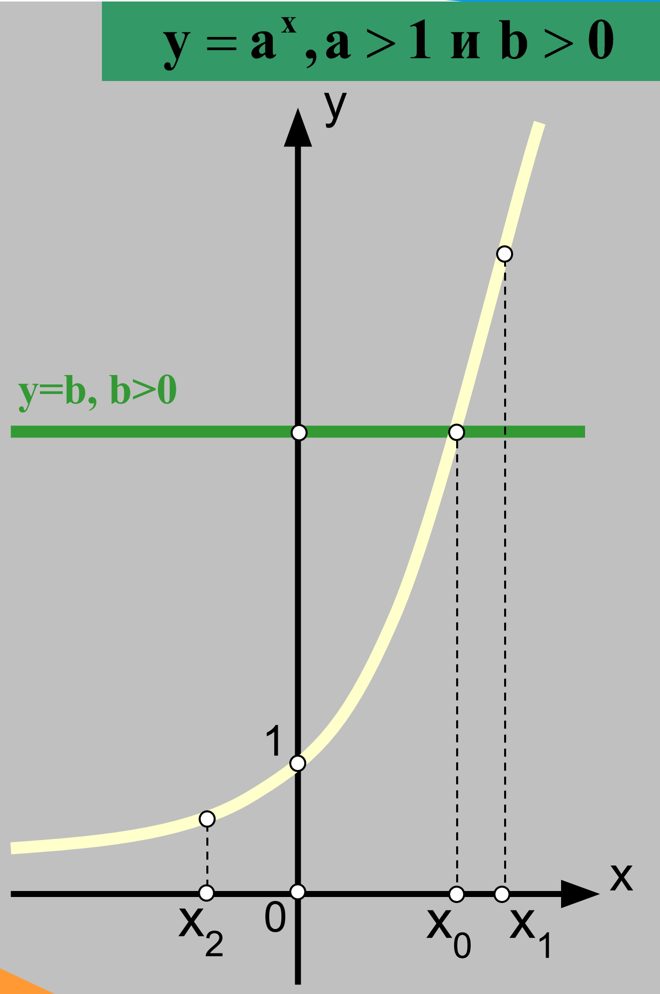
$y = a^x$, $0 < a < 1$ и $b > 0$



Если **a > 1 и b > 0**, то для каждого $x_1 < x_0$ соответствующая точка графика функции $y = a^x$ находится выше прямой **y = b**, а для каждого $x_2 > x_0$ - ниже прямой **y = b**.

ВЫВОД №2:

При $b > 0$ прямая $y = b$ пересекает график функции $y = a^x$ в единственной точке, абсцисса которой $x_0 = \log_a b$



Если $a > 1$ и $b > 0$, то для каждого $x_1 > x_0$ соответствующая точка графика функции $y = a^x$ находится выше прямой $y = b$, а для каждого $x_2 < x_0$ - ниже прямой $y = b$.

Простейшие показательные неравенства

$a > 1$		$0 < a < 1$	
$a^x > b$	$a^x < b$	$a^x > b$	$a^x < b$
$a^x > a^{\log_a b}$	$a^x < a^{\log_a b}$	$a^x > a^{\log_a b}$	$a^x < a^{\log_a b}$
$x > \log_a b$	$x < \log_a b$	$x < \log_a b$	$x > \log_a b$

Пример №1.1

$$2^x < 8$$

Решение:

$2^x < 8,$

$2^x < 2^3, \quad y = 2^t \left(2 > 1\right)$ **возрастает на всей области определения,**

$x < 3.$

Ответ:

$\left(-\infty; 3\right)$

Пример №1.2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 27$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 27,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^t \left(0 < \frac{1}{3} < 1\right)$$ **убывает на всей области определения,**

$$x < -3.$$

Ответ: $(-\infty;-3)$

Пример №1.3

$$3^x > 5$$

Решение:

$$3^x > 5,$$

$$3^x > 3^{\log_3 5}, \quad y = 3^t \left(3 > 1\right)$$ **возрастает на всей области определения,**

$$x > \log_3 5.$$

Ответ:

$$\left(\log_3 5; \infty\right)$$

1) Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим

Пример №1

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4$$

Решение:

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4,$$

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 2^2, \ y = 2^t \left(2 > 1\right)$$

возрастает на всей области определения

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 2,$$

$$\frac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0,$$

$$\frac{x-5}{x-2} \leq 0,$$

$$2 < x \leq 5.$$

Ответ: $(2;5]$

Пример №1.4

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x} < 7$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x} < 7,$$

$4^{-x} < 4^{\log_4 7}$, $\quad y = 4^{t}\,(4 > 1)$ возрастает на всей области определения,

$$-x < \log_4 7,$$

$$x > -\log_4 7.$$

Ответ: $\left(-\log_4 7;\infty\right)$

1) Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим

Пример №2

$$-4 \le 3^{x^2-2x-1} - 5 \le 4$$

Решение:

$$-4 \le 3^{x^2-2x-1} - 5 \le 4,$$

$$1 \le 3^{x^2-2x-1} \le 9,$$

$$\begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \ge 1, \\ 3^{x^2-2x-1} \le 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \ge 3^0, \\ 3^{x^2-2x-1} \le 3^2; \end{cases}$$

$y = 3^t \left(3 > 1\right)$ **возрастает на всей области определения**

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 \ge 0, \\ x^2 - 2x - 1 \le 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 1 - \sqrt{2}, \\ x \ge 1 + \sqrt{2}; \end{array} \right. \\ -1 \le x \le 3, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ x \le 1 - \sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x \le 3, \\ x \ge 1 + \sqrt{2}; \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le 1 - \sqrt{2}, \\ 1 + \sqrt{2} \le x \le 3. \end{array} \right.$$

Ответ:

$$\left[-1; 1-\sqrt{2}\right] \cup \left[1+\sqrt{2}; 3\right]$$

2) Показательные неравенства, сводящиеся к квадратным неравенствам

Решение:

Пример

$$2^{2x}+2>3\cdot 2^{x}$$

$$2^{2x}+2>3\cdot 2^{x},$$

$$2^{2x}-3\cdot 2^{x}+2>0.$$

Пусть $2^{x}=t, t>0,$ **тогда**

$$\begin{cases} t^2-3t+2>0, \\ t>0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t<1, \\ t>2, \end{array}\right. \\ t>0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t>0, \\ t<1, \end{cases} \\ \begin{cases} t>0, \\ t>2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 0<t<1, \\ t>2. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной x

$$\left[\begin{array}{l} 0<2^{x}<1, \\ 2^{x}>2; \end{array}\right. \quad 2^{x}>0 \quad \text{при } x\in R \quad \left[\begin{array}{l} 2^{x}<1, \\ 2^{x}>2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2^{x}<2^{0}, \\ 2^{x}>2; \end{array}\right.$$

функция $y=2^{t}\,(2>1)$

возрастает при всех x из области определения

$$\left[\begin{array}{l} x<0, \\ x>1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$

3) Однородные показательные неравенства первой и второй степени. Однородные показательные неравенства первой степени

Пример №1

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>5$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+1\right)>5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\frac{5}{4}>5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}>4,$$

$$(2)^{2-x}>2^{2},\qquad y=2^{t}\,(2>1)$$ **возрастает на всей области определения**

$$2-x>2,$$

$$x<0.$$

Ответ: $(-\infty;0)$

3) Однородные показательные неравенства первой и второй степени. **Однородные показательные неравенства первой степени**

Решение:

Пример №2

$$3^{x+2}+7^{x}<4\cdot 7^{x-1}+34\cdot 3^{x-1}$$

$$3^{x+2}+7^{x}<4\cdot 7^{x-1}+34\cdot 3^{x-1},$$

$$3^{x+2}-34\cdot 3^{x-1}<4\cdot 7^{x-1}-7^{x},$$

$$3^{x-1}\left(3^{3}-34\right)<7^{x-1}\left(4-7\right),$$

$$3^{x-1}\left(-7\right)<7^{x-1}\left(-3\right),$$

$$3^{x-2}>7^{x-2}, 7^{x-2}>0, \text{ при } x\in R$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-2}>1,$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-2}>\left(\frac{3}{7}\right)^{0},\ y=\left(\frac{3}{7}\right)^{t}\left(0<\frac{3}{7}<1\right),$$

убывает на всей области определения

$$x-2<0.$$

$$x<2.$$

Ответ: $\left(-\infty;2\right)$

3) Однородные показательные неравенства первой и второй степени. Однородные показательные неравенства второй степени

Решение:

Пример №3

$$3\cdot 4^x+2\cdot 9^x-5\cdot 6^x<0$$

$$3\cdot 4^x+2\cdot 9^x-5\cdot 6^x<0,$$

$$3\cdot 2^{2x}-5\cdot(2\cdot 3)^x+2\cdot 3^{2x}<0,$$

$$3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 3^{2x}<0,\ 3^{2x}>0,\ \text{при}\ x\in R$$

$$3\frac{2^{2x}}{3^{2x}}-5\frac{2^x3^x}{3^{2x}}+2\frac{3^{2x}}{3^{2x}}<0,$$

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\left(\frac{2}{3}\right)^x+2<0.$$

$$\text{Пусть}\left(\frac{2}{3}\right)^x=t,t>0,\text{тогда}$$

$$\begin{cases}3t^2-5t+2<0,\\ t>0;\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{2}{3}<t<1,\\ t>0;\end{cases}\quad \frac{2}{3}<t<1.$$

Вернёмся к переменной x

$$\frac{2}{3}<\left(\frac{2}{3}\right)^x<1,\quad \frac{2}{3}<\left(\frac{2}{3}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^0,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(0<\frac{2}{3}<1\right)$$ **убывает на всей области определения**

$$0<x<1.$$

Ответ: $(0;1)$

4) Показательные неравенства, сводящиеся к рациональным неравенствам

Решение:

Пример

$$2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$$

$$2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0,$$

$$2^x + \frac{2}{2^x} - 3 < 0,$$

Пусть $2^x = t, t > 0,$ **тогда**

$$\begin{cases} t + \dfrac{2}{t} - 3 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t} < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 3t + 2 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < t < 2, \\ t > 0; \end{cases}$$

$$1 < t < 2.$$

Вернёмся к переменной x

$$1 < 2^x < 2,$$

$$y = 2^r \left(2 > 1\right)$$

возрастает на всей области определения

$$0 < x < 1.$$

Ответ: $\left(0;1\right)$

5) Показательные нестандартные неравенства

Решение:

Пример

$$\left(x^2-4x+4\right)^{x-1,5}\ge 1$$

$$\left(x^2-4x+4\right)^{x-1,5}\ge 1,$$

$$\left((x-2)^2\right)^{x-1,5}\ge 1,$$

$$|x-2|^{2x-3}\ge 1.$$

Неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}|x-2|^{2x-3}>1,\\ |x-2|^{2x-3}=1.\end{array}\right.$

Решим каждое утверждение совокупности отдельно.

$$|x-2|^{2x-3}>1,$$

$$|x-2|^{2x-3}>|x-2|^{0}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<|x-2|<1,\\ 2x-3<0;\end{cases}\\ \begin{cases}|x-2|>1,\\ 2x-3>0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x-2|>0,\\ |x-2|<1,\\ 2x-3<0;\end{cases}\\ \begin{cases}|x-2|>1,\\ 2x-3>0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ne 2,\\ -1<x-2<1,\\ 2x<3;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-1>1,\\ x-2<-1,\end{array}\right.\\ 2x>3;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ne 2,\\ 1<x<3,\\ x<1,5;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<1,\end{array}\right.\\ x<1,5;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}1<x<1,5,\\ x>3.\end{array}\right.$$

5) Показательные нестандартные неравенства

Решение:

Пример

$$\left(x^2-4x+4\right)^{x-1,5}\ge 1$$

$$|x-2|^{2x-3}=1.$$

1.

$$\left[\begin{array}{l} x-2=-1, \\ x-2=0, \\ x-2=1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$$

2.

$$2x-3=0,$$
$$2x=3,$$
$$x=1,5.$$

Проверка

$x=1$: $|1-2|^{2-3}=1,$ $|-1|^{-1}=1,$ $1=1.(\text{верно})$

$x=2$: $|2-2|^{2\cdot 2-3}=1,$ $0^1=1,$ $0=1.(\text{неверно})$

$x=3$: $|3-2|^{3\cdot 2-3}=1,$ $1^3=1,$ $1=1.(\text{верно})$

$x=1,5$: $|1,5-2|^{2\cdot 1,5-3}=1,$ $|-0,5|^0=1,$ $1=1.(\text{верно})$

Проверка показала, что x=1, x=3, x=1,5 являются решениями уравнения, а x=2 не является решением уравнения.

Итак,

$$\left[\begin{array}{l} 1<x<1,5, \\ x>3, \\ x=1, x=3, x=1,5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 1\le x\le 1,5, \\ x\ge 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $[1;1,5]\cup[3;\infty).$

Закрепление знаний

1. **Какие неравенства называются показательными ?**
2. **Когда показательное неравенство имеет решение при любых значениях х ?**
3. **Когда показательное неравенство не имеет решений ?**
4. **Какие типы неравенств вы узнали на этом уроке ?**
5. **Как решаются простейшие неравенства ?**
6. **Как решаются неравенства , сводящиеся к квадратным ?**
7. **Как решаются однородные неравенства ?**
8. **Как решаются неравенства , сводящиеся к рациональным ?**

Итог урока

1. **Выяснить , что нового узнали учащиеся на этом уроке**
2. **Выставить оценки учащимся за работу на уроке с подробным комментированием**

Домашнее задание

Учебник для 10 класса «Алгебра и начала анализа « автор С.М. Никольский

Пункты 6.4 и 6.6 изучить ,
№ 6.31-6.35 и № 6.45- 6.50 решить

Показательные неравенства
их типы и методы решения

Спасибо за хорошую работу и внимание !