

Урок – лекция по теме :

***«Показательные неравенства,
их типы и методы решения»***

**Учитель математики МОУ – СОШ №2
р.п.Степное**

Труфякова Галина Ивановна

Аннотация урока

- Тема « Показательные неравенства» является важнейшей темой математики . По учебнику С. М. Никольского она изучается в 10 классе и на её изучение по планированию отводится 2 часа :
1 час-Простейшие показательные неравенства ;
1 час – Неравенства , сводящиеся к простейшим заменой неизвестного .
За это время нужно познакомить учащихся с новым и очень объёмным материалом , научить их решать все типы показательных неравенств и хорошо отработать эти навыки и умения . Поэтому уроки формирования новых знаний в виде лекций с применением информационно-коммуникационной технологии позволяют решать эти проблемы быстро и с большим успехом .

Показательные неравенства их типы и методы решения

Альберт Эйнштейн

- **« Мне приходится делить своё время между политикой и решением уравнений и неравенств . Однако решение уравнений и неравенств , по-моему, гораздо важнее , потому что политика существует только для данного момента , а уравнения и неравенства будут существовать вечно .»**

Структура урока

1. **Организационный момент**
2. **Постановка целей и задач**
3. **План лекции**
4. **Актуализация знаний учащихся в виде повторения ранее изученного материала**
5. **Введение новых знаний**
6. **Закрепление знаний в форме собеседования**
7. **Подведение итогов урока**
8. **Домашнее задание**



Организационный момент

1. **Приветствовать учащихся**
2. **Отметить в классном журнале фамилии учащихся , отсутствующих на уроке**

Постановка целей и задач

- 1. Объявить учащимся в начале урока его цели и задачи**
- 2. Познакомить учащихся с планом лекции и записать его в тетради**

Цели урока

- **Образовательные**
 1. **Формирование понятия показательного неравенства**
 2. **Ознакомление учащихся с типами показательных неравенств**
 3. **Формирование умений и навыков решения показательных неравенств**

Цели урока

- **Воспитательные**
 1. **Воспитание трудолюбия**
 2. **Воспитание самостоятельности в достижении цели**
 3. **Формирование вычислительных навыков**
 4. **Формирование эстетических навыков при оформлении записей**

Цели урока

■ Развивающие

1. Развитие мыслительной деятельности
2. Развитие творческой инициативы
3. Развитие познавательной активности
4. Развитие речи и памяти

Задачи урока

1. Повторить свойства показательной функции
2. Повторить правила решения квадратных и дробно – рациональных неравенств
3. Отработать алгоритм решения простейших показательных неравенств
4. Научить учащихся различать типы показательных неравенств
5. Научить учащихся решать показательные неравенства



Тип урока

Урок формирования
НОВЫХ ЗНАНИЙ



Вид урока

Урок - лекция



Методы обучения

Объяснительно-иллюстративный
Эвристический
Поисковый
Проблемный



Технология обучения

**Информационно-коммуникационная технология,
основанная на проблемном обучении**

План лекции

1. Повторение свойств показательной функции
2. Простейшие показательные неравенства
3. Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим
4. Показательные неравенства, сводящиеся к квадратным неравенствам
5. Однородные показательные неравенства первой степени
6. Однородные показательные неравенства второй степени
7. Показательные неравенства, сводящиеся к рациональным неравенствам
8. Показательные нестандартные неравенства

Повторение ранее изученного материала

- Решить на доске и в тетрадях :

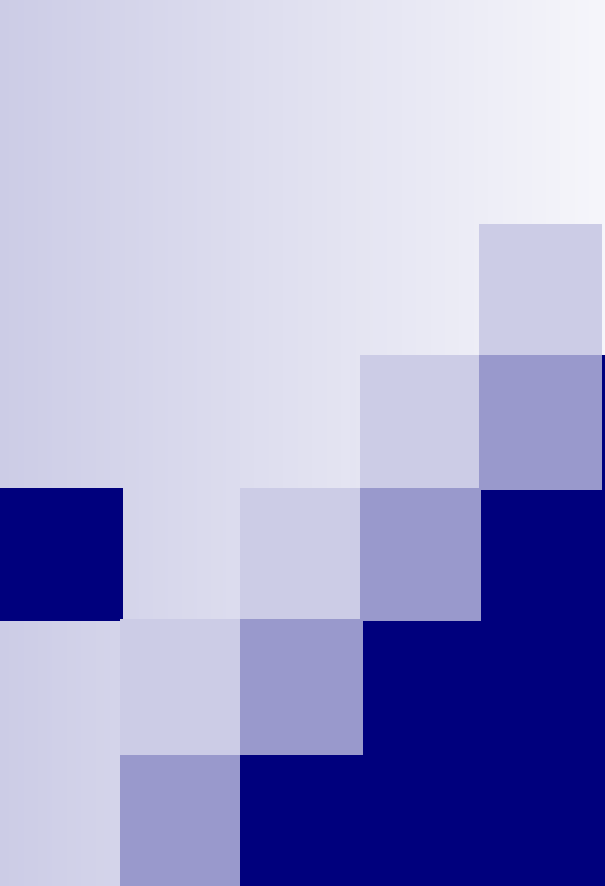
- а) квадратные неравенства :

1. $x^2 - 2x - 1 \geq 0$

2. $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

- б) дробно-рациональное неравенство :

1. $(x - 5) \setminus (x - 2) \leq 0$



Повторение свойств показательной функции

1. Область определения функции

 $(-\infty; \infty)$ 

2. Область значений функции

 $(0; \infty)$

3. Промежутки сравнения значений функции с единицей

$$y = a^x, a > 1$$

$$y = a^x, 0 < a < 1$$

$$\text{при } x > 0, a^x > 1$$

$$\text{при } x > 0, 0 < a^x < 1$$

$$\text{при } x < 0, 0 < a^x < 1$$

$$\text{при } x < 0, a^x > 1$$

4. Четность, нечетность

Функция не является ни чётной, ни нечётной (функция общего вида).

5. Монотонность

МОНОТОННО
возрастает на \mathbf{R} МОНОТОННО
убывает на \mathbf{R}

6. Экстремумы

Показательная функция экстремумов не имеет

7. Асимптота

Ось \mathbf{O}_x является горизонтальной
АСИМПТОТОЙ8. При любых действительных значениях x и y ; $a > 0, a \neq 1$; $b > 0, b \neq 1$.

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

6) $r \in \mathbf{Q}$ и $a < b$, то

2) $a^x : a^y = a^{x-y}$;

 $a^r < b^r$ при $r > 0$

3) $(ab)^x = a^x b^x$;

 $a^r > b^r$ при $r < 0$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

7) $r, s \in \mathbf{Q}$ и $r > s$, то $a^r > a^s$ при $a > 1$

5) $(a^x)^y = a^{xy}$;

 $a^r < a^s$ при $0 < a < 1$.

Найдите область определения функции

$$y = 2^{\frac{5}{2x-3}}$$

$$(-\infty; 1,5) \cup (1,5; \infty)$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$(0; \infty)$$

$$y = 8^{\lg(-x)}$$

$$(-\infty; 0)$$

$$y = (0,1)^{\cos x}$$

$$\mathbb{R}$$



Определите значение a

$$a^5 > a^8$$

$$0 < a < 1$$

$$5 < 8$$

$$a^{0,8} < a^{1,7}$$

$$a > 1$$

$$0,8 < 1,7$$

$$a^{-2} > a^{-1}$$

$$0 < a < 1$$

$$-2 < -1$$

$$a^{2,5} > a^{3,6}$$

$$0 < a < 1$$

$$2,5 < 3,6$$

Определите тип функции

$$y = (1,3)^x$$

возрастающая

$$1,3 > 1$$

$$y = (0,8)^x$$

убывающая

$$0 < 0,8 < 1$$

$$y = e^x$$

возрастающая

$$e > 1$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$$

убывающая

$$0 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$





Введение новых знаний

ОПРЕДЕЛЕНИЕ простейших показательных неравенств:

Пусть **a** – данное положительное, не равное единице число и **b** – данное действительное число. Тогда неравенства

$$\mathbf{a^x > b \ (a^x \geq b)} \text{ и } \mathbf{a^x < b \ (a^x \leq b)}$$

называются простейшими показательными неравенствами.

ЧТО НАЗЫВАЕТСЯ решением неравенства?

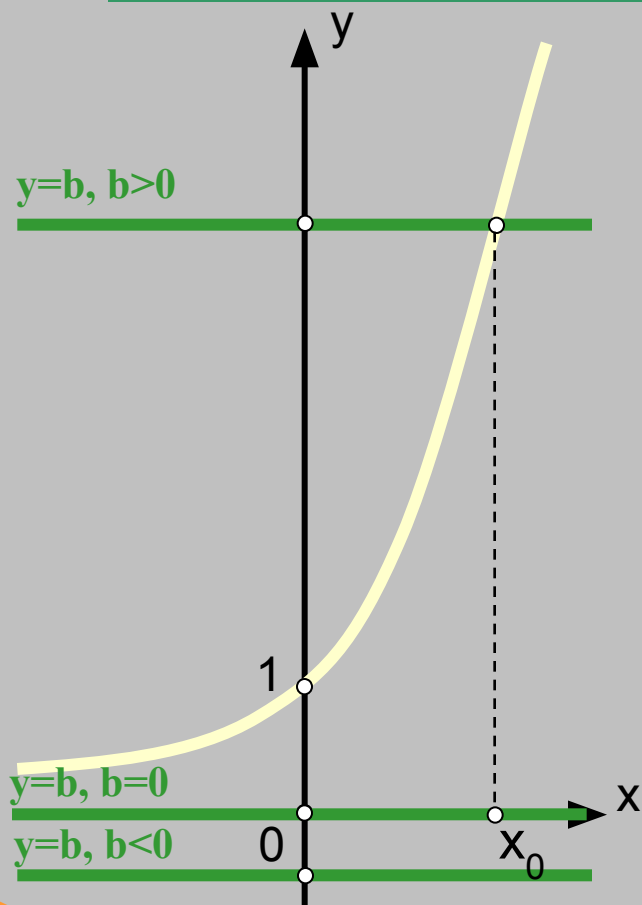
Решением неравенства с неизвестным x называют число x_0 , при подстановке которого в неравенство получается верное числовое неравенство.

ЧТО ЗНАЧИТ решить неравенство?

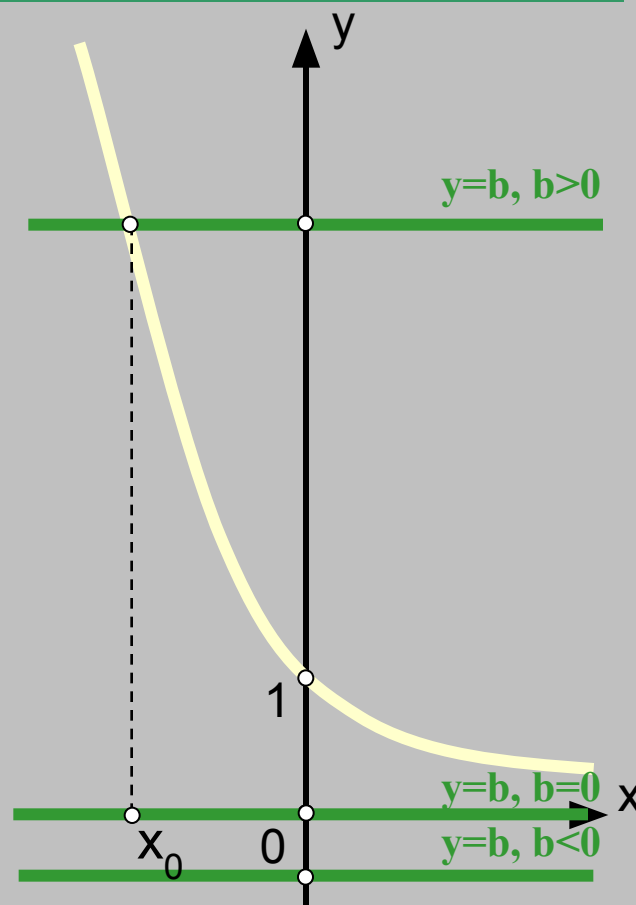
Решить неравенство –
значит, найти все его решения или
показать, что их нет.

Рассмотрим взаимное расположение графика функции $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ и прямой $y=b$

$$y = a^x, a > 1 \text{ и } b \in \mathbb{R}$$



$$y = a^x, 0 < a < 1 \text{ и } b \in \mathbb{R}$$



При $b \leq 0$ прямая $y=b$ не пересекает график функции $y=a^x$, т.к. расположена ниже кривой $y=a^x$, поэтому неравенства $a^x > b$ ($a^x \geq b$) выполняются при $x \in \mathbb{R}$, а неравенства $a^x < b$ ($a^x \leq b$) не имеют решения.

$2^x > -5$ справедливо при любых x

$2^x > 0$ и $-5 < 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq -4$ справедливо при любых x

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$ и $-4 < 0$

$10^x < -3$ решений нет

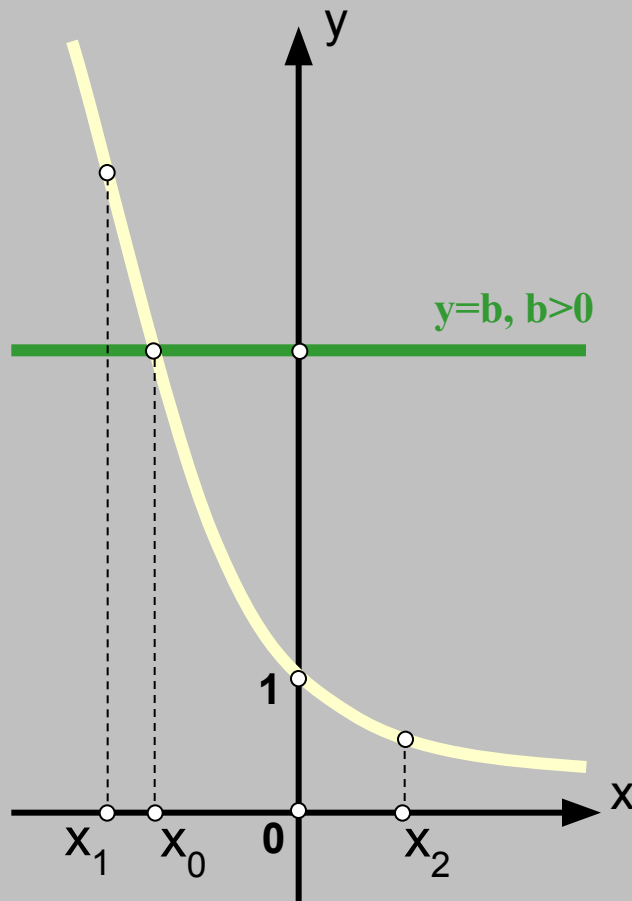
$10^x > 0$ и $-3 < 0$

$\left(\frac{1}{7}\right)^x \leq -10$ решений нет

$\left(\frac{1}{7}\right)^x > 0$ и $-10 < 0$

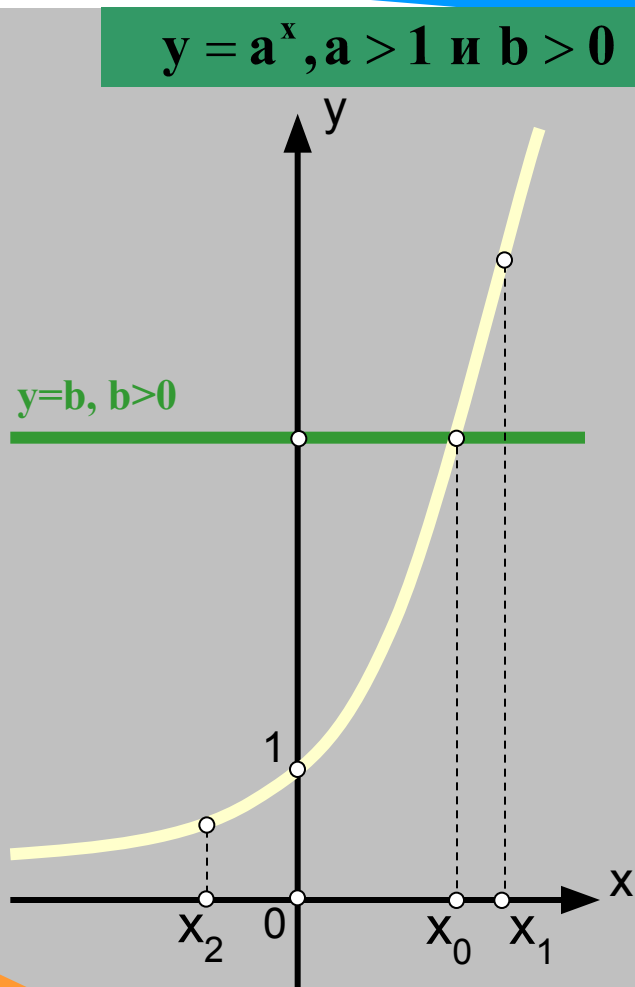
При $b > 0$ прямая $y = b$ пересекает график функции $y = a^x$ в единственной точке, абсцисса которой $x_0 = \log_a b$

$$y = a^x, 0 < a < 1 \text{ и } b > 0$$



Если $a > 1$ и $b > 0$, то для каждого $x_1 < x_0$ соответствующая точка графика функции $y = a^x$ находится выше прямой $y = b$, а для каждого $x_2 > x_0$ - ниже прямой $y = b$.

При $b > 0$ прямая $y = b$ пересекает график функции $y = a^x$ в единственной точке, абсцисса которой $x_0 = \log_a b$



Если $a > 1$ и $b > 0$,
то для каждого $x_1 > x_0$
соответствующая
точка графика функции $y = a^x$
находится выше прямой $y = b$,
а для каждого $x_2 < x_0$ - ниже
прямой $y = b$.

Простейшие показательные неравенства

$$a > 1$$

$$a^x > b$$

$$a^x < b$$

$$a^x > a^{\log_a b}$$

$$a^x < a^{\log_a b}$$

$$x > \log_a b$$

$$x < \log_a b$$

$$0 < a < 1$$

$$a^x > b$$

$$a^x < b$$

$$a^x > a^{\log_a b}$$

$$a^x < a^{\log_a b}$$

$$x < \log_a b$$

$$x > \log_a b$$

$$2^x < 8$$

Решение:

$$2^x < 8,$$

$$2^x < 2^3, \quad y = 2^t (2 > 1)$$

возрастает на всей области определения,

$$x < 3.$$

Ответ:

$$(-\infty; 3)$$

Пример №1.2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 27$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 27,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^t \left(0 < \frac{1}{3} < 1\right) \text{ убывает на всей области определения,}$$

$$x < -3.$$

Ответ:

$$(-\infty; -3)$$

$$3^x > 5$$

Решение:

$$3^x > 5,$$

$$3^x > 3^{\log_3 5}, \quad y = 3^t (3 > 1) \text{ возрастает на всей}$$

области определения,

$$x > \log_3 5.$$

Ответ:

$$(\log_3 5; \infty)$$

1) Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим

Решение:

Пример №1

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4$$

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4,$$

$$2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 2^2, \quad y = 2^t \quad (2 > 1)$$

возрастает на всей области определения

$$\frac{x+1}{x-2} \geq 2,$$

$$\frac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0,$$

$$\frac{x-5}{x-2} \leq 0,$$

$$2 < x \leq 5.$$

Ответ:

(2;5]

Пример №1.4

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < 7$$

Решение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < 7,$$

$$4^{-x} < 4^{\log_4 7}, \quad y = 4^t (4 > 1) \quad \text{возрастает на всей области определения,}$$

$$-x < \log_4 7,$$

$$x > -\log_4 7.$$

Ответ:
 $(-\log_4 7; \infty)$

1) Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим

Решение:

$$-4 \leq 3^{x^2-2x-1} - 5 \leq 4,$$

$$1 \leq 3^{x^2-2x-1} \leq 9,$$

$$\begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \geq 1, \\ 3^{x^2-2x-1} \leq 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \geq 3^0, \\ 3^{x^2-2x-1} \leq 3^2; \end{cases}$$

$y = 3^t (3 > 1)$ **возрастает на всей области определения**

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 1 \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 - \sqrt{2}, \\ x \geq 1 + \sqrt{2}; \\ -1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 3, \\ x \leq 1 - \sqrt{2}, \\ -1 \leq x \leq 3, \\ x \geq 1 + \sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 - \sqrt{2}, \\ 1 + \sqrt{2} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Пример №2

$$-4 \leq 3^{x^2-2x-1} - 5 \leq 4$$

Ответ:

$$[-1; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; 3]$$

Решение:

2) Показательные неравенства, сводящиеся к квадратным неравенствам

$$2^{2x} + 2 > 3 \cdot 2^x,$$

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 > 0.$$

Пусть $2^x = t, t > 0$, тогда

$$\begin{cases} t^2 - 3t + 2 > 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t < 1, \\ t > 2, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t > 0, \\ t < 1, \\ t > 0, \\ t > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < t < 1, \\ t > 2. \end{cases}$$

Вернёмся к переменной x

$$\begin{cases} 0 < 2^x < 1, \\ 2^x > 2; \end{cases} \quad 2^x > 0 \quad \text{при } x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} 2^x < 1, \\ 2^x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x < 2^0, \\ 2^x > 2; \end{cases}$$

функция $y = 2^t (2 > 1)$

возрастает при всех x
из области определения

$$\begin{cases} x < 0, \\ x > 1. \end{cases}$$

Пример

$$2^{2x} + 2 > 3 \cdot 2^x$$

Ответ:
 $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$

3) Однородные показательные неравенства первой и второй степени. Однородные показательные неравенства первой степени

Решение:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right) > 5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \frac{5}{4} > 5,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 4,$$

$$(2)^{2-x} > 2^2, \quad y = 2^t (2 > 1) \text{ возрастает на всей области определения}$$

$$2 - x > 2,$$

$$x < 0.$$

Пример №1

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > 5$$

Ответ:

$$(-\infty; 0)$$

3) Однородные показательные

Решение:

Сравнения первой и второй степени. Однородные показательные неравенства первой степени

$$3^{x+2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1},$$

$$3^{x+2} - 34 \cdot 3^{x-1} < 4 \cdot 7^{x-1} - 7^x,$$

$$3^{x-1}(3^3 - 34) < 7^{x-1}(4 - 7),$$

$$3^{x-1}(-7) < 7^{x-1}(-3),$$

$$3^{x-2} > 7^{x-2}, 7^{x-2} > 0, \text{ при } x \in \mathbf{R}$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-2} > 1,$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-2} > \left(\frac{3}{7}\right)^0, y = \left(\frac{3}{7}\right)^t \left(0 < \frac{3}{7} < 1\right),$$

$$x - 2 < 0.$$

$$x < 2.$$

Пример №2

$$3^{x+2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1}$$

убывает на всей
области определения

Ответ:

$$(-\infty; 2)$$

3) Однородные показательные неравенства первой и второй степени. Однородные показательные неравенства второй степени

Решение:

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0,$$

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot (2 \cdot 3)^x + 2 \cdot 3^{2x} < 0,$$

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{2x} < 0, \quad 3^{2x} > 0, \quad \text{при } x \in \mathbf{R}$$

$$3 \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - 5 \frac{2^x 3^x}{3^{2x}} + 2 \frac{3^{2x}}{3^{2x}} < 0,$$

$$3 \left(\frac{2}{3} \right)^{2x} - 5 \left(\frac{2}{3} \right)^x + 2 < 0.$$

Вернёмся к переменной x

$$\frac{2}{3} < \left(\frac{2}{3} \right)^x < 1, \quad \frac{2}{3} < \left(\frac{2}{3} \right)^x < \left(\frac{2}{3} \right)^0, \quad y = \left(\frac{2}{3} \right)^r \left(0 < \frac{2}{3} < 1 \right) \text{ убывает на всей области определения}$$

$$0 < x < 1.$$

Пример №3

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0$$

Пусть $\left(\frac{2}{3} \right)^x = t, t > 0$, тогда

$$\begin{cases} 3t^2 - 5t + 2 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3} < t < 1, \\ t > 0; \end{cases} \quad \frac{2}{3} < t < 1.$$

Ответ:

(0;1)

Решение:

4) Показательные неравенства, сводящиеся к рациональным неравенствам

Пример

$$2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$$

$$2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0,$$

$$2^x + \frac{2}{2^x} - 3 < 0,$$

Пусть $2^x = t, t > 0$, тогда

$$\begin{cases} t + \frac{2}{t} - 3 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{t^2 - 3t + 2}{t} < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 3t + 2 < 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < t < 2, \\ t > 0; \end{cases}$$

$1 < t < 2$. Вернёмся к переменной x

$$1 < 2^x < 2,$$

$$y = 2^r \quad (2 > 1)$$

возрастает на всей области определения

$$0 < x < 1.$$

Ответ:

(0;1)

5) Показательные нестандартные неравенства

Решение:

$$(x^2 - 4x + 4)^{x-1,5} \geq 1,$$

$$((x-2)^2)^{x-1,5} \geq 1,$$

$$|x-2|^{2x-3} \geq 1.$$

Пример

$$(x^2 - 4x + 4)^{x-1,5} \geq 1$$

Неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} |x-2|^{2x-3} > 1, \\ |x-2|^{2x-3} = 1. \end{cases}$$

Решим каждое утверждение совокупности отдельно.

$$|x-2|^{2x-3} > 1,$$

$$|x-2|^{2x-3} > |x-2|^0$$

$$\begin{cases} 0 < |x-2| < 1, \\ 2x-3 < 0; \\ |x-2| > 1, \\ 2x-3 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-2| > 0, \\ |x-2| < 1, \\ 2x-3 < 0; \\ |x-2| > 1, \\ 2x-3 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 2, \\ -1 < x-2 < 1, \\ 2x < 3; \\ x-1 > 1, \\ x-2 < -1, \\ 2x > 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 2, \\ 1 < x < 3, \\ x < 1,5; \\ x > 3, \\ x < 1, \\ x < 1,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < x < 1,5, \\ x > 3. \end{cases}$$

5) Показательные нестандартные неравенства

Решение:

$$|x - 2|^{2x-3} = 1.$$

1.

$$\begin{cases} x - 2 = -1, \\ x - 2 = 0, \\ x - 2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 2x - 3 = 0, \\ 2x = 3, \\ x = 1,5. \end{cases}$$

Проверка

$$x = 1$$

$$|1 - 2|^{2-3} = 1,$$

$$|-1|^{-1} = 1,$$

$$1 = 1. (\text{верно})$$

$$x = 2$$

$$|2 - 2|^{2 \cdot 2 - 3} = 1,$$

$$0^1 = 1,$$

$$0 = 1. (\text{неверно})$$

$$x = 3$$

$$|3 - 2|^{3 \cdot 2 - 3} = 1,$$

$$1^3 = 1,$$

$$1 = 1. (\text{верно})$$

$$x = 1,5$$

$$|1,5 - 2|^{2 \cdot 1,5 - 3} = 1,$$

$$|-0,5|^0 = 1,$$

$$1 = 1. (\text{верно})$$

Проверка показала, что $x=1$, $x=3$, $x=1,5$ являются решениями уравнения, а $x=2$ не является решением уравнения.

Итак, $\begin{cases} 1 < x < 1,5, \\ x > 3, \\ x = 1, x = 3, x = 1,5; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 1,5, \\ x \geq 3. \end{cases}$

Пример

$$(x^2 - 4x + 4)^{x-1,5} \geq 1$$

Ответ:

$$[1; 1,5] \cup [3; \infty).$$

Закрепление знаний

1. Какие неравенства называются показательными ?
2. Когда показательное неравенство имеет решение при любых значениях x ?
3. Когда показательное неравенство не имеет решений ?
4. Какие типы неравенств вы узнали на этом уроке ?
5. Как решаются простейшие неравенства ?
6. Как решаются неравенства , сводящиеся к квадратным ?
7. Как решаются однородные неравенства ?
8. Как решаются неравенства , сводящиеся к рациональным ?



Итог урока

1. **Выяснить , что нового узнали учащиеся на этом уроке**
2. **Выставить оценки учащимся за работу на уроке с подробным комментированием**



Домашнее задание

**Учебник для 10 класса «Алгебра и
начала анализа» автор С.М.
Никольский**

**Пункты 6.4 и 6.6 изучить ,
№ 6.31-6.35 и № 6.45- 6.50 решить**

Показательные неравенства их типы и методы решения



Спасибо за хорошую
работу и внимание !