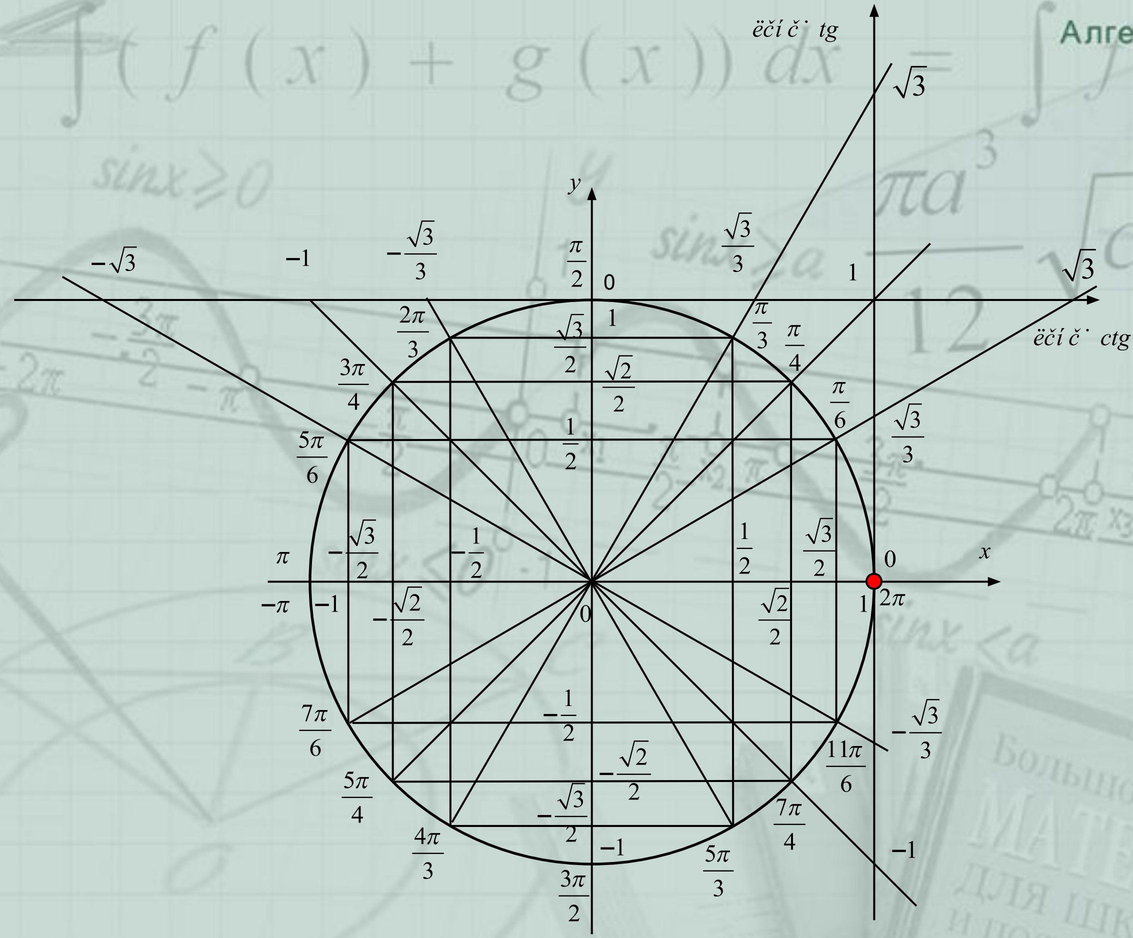


Тема : Решение простейших тригонометрических неравенств.

Выполнила: Моор Кристина студентка Петропавловска строительного –экономического колледжа

Петропавловск 2016г.

Под простейшими тригонометрическими неравенствами понимают неравенства вида:

$$\sin t \text{ £ } a$$

$$\cos t \text{ £ } a$$

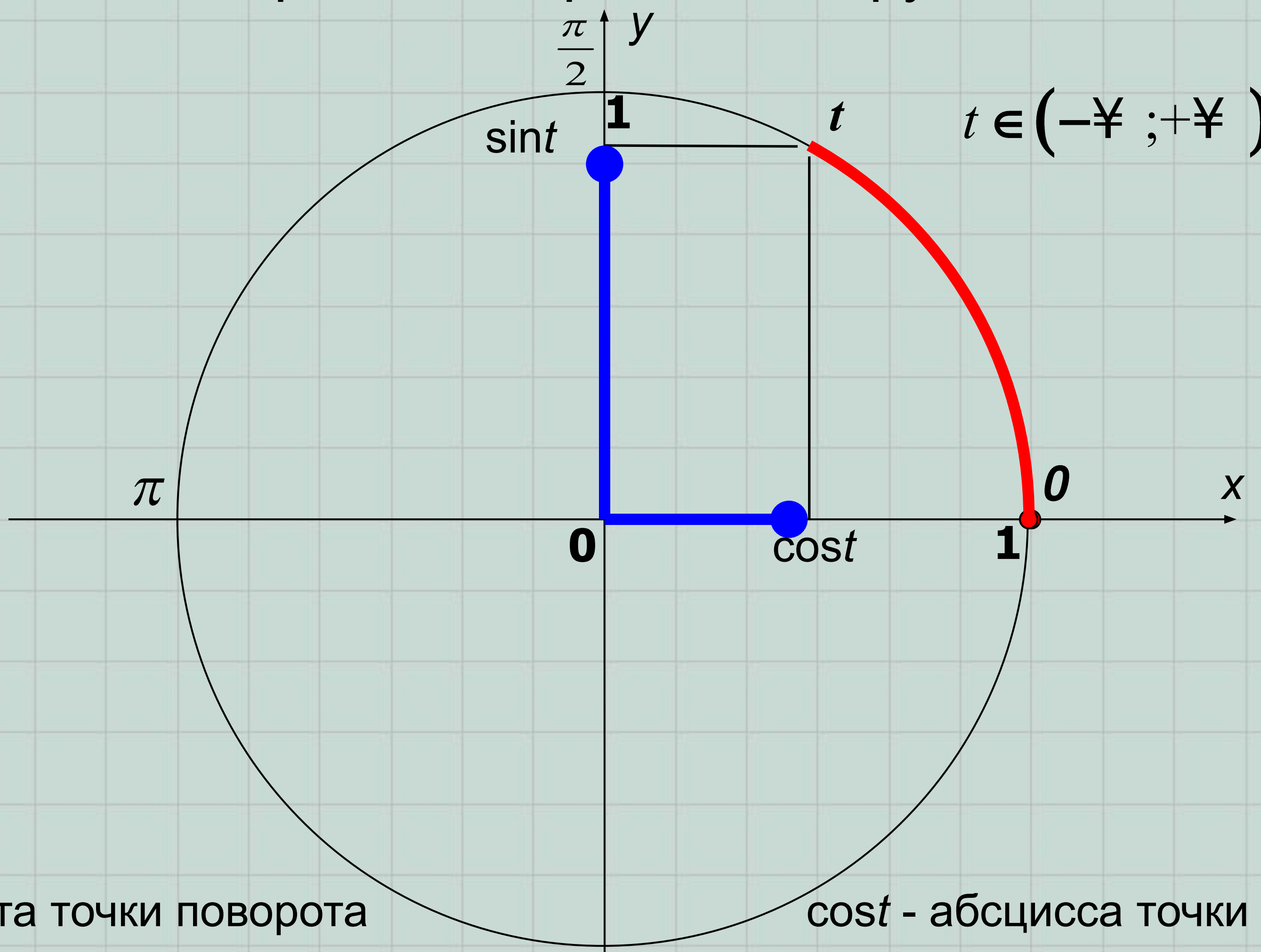
$$tg t \text{ £ } a$$

$$ctg t \text{ £ } a$$

,где t – выражение с переменной, $a \in$ □.

Под знаком “□” следует понимать любой из четырёх знаков неравенств: <, >, □, □.

Для решения тригонометрических неравенств необходимо уметь работать с тригонометрическим кругом:



sin$t$ - ордината точки поворота

cos$t$ - абсцисса точки поворота

(под «точкой поворота» следует понимать – «точку единичной тригонометрической окружности, полученной при повороте на t радиан от начала отсчета»)

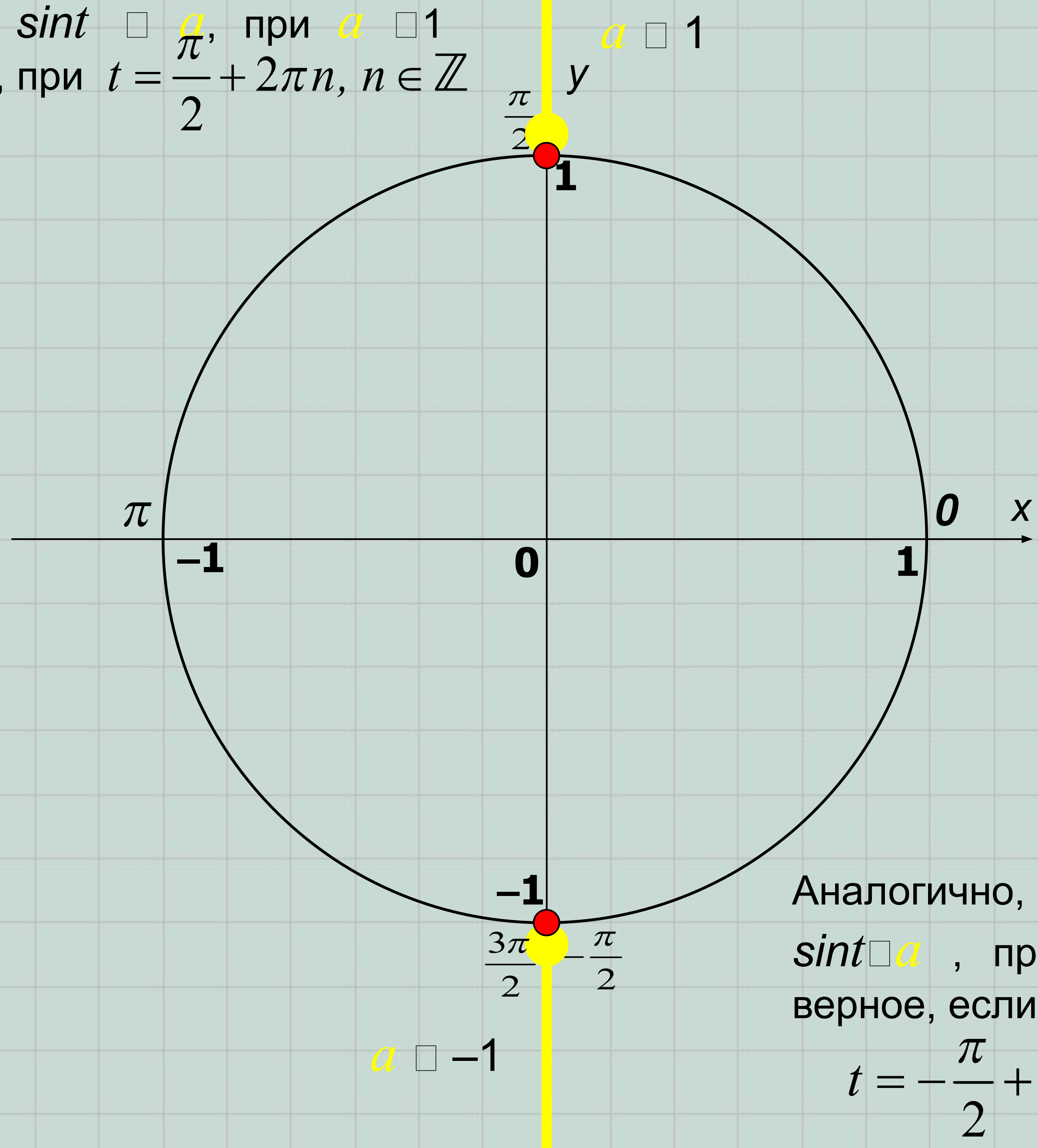
Неравенство *sint*>*a*, при *a* □1 не имеет решений.

На окружности не существует точек поворота, ординаты которых больше единицы.

Аналогично, неравенство *sint*<*a* , при *a*□–1 также не имеет решений.

На окружности не существует точек поворота, ординаты которых меньше минус единицы.

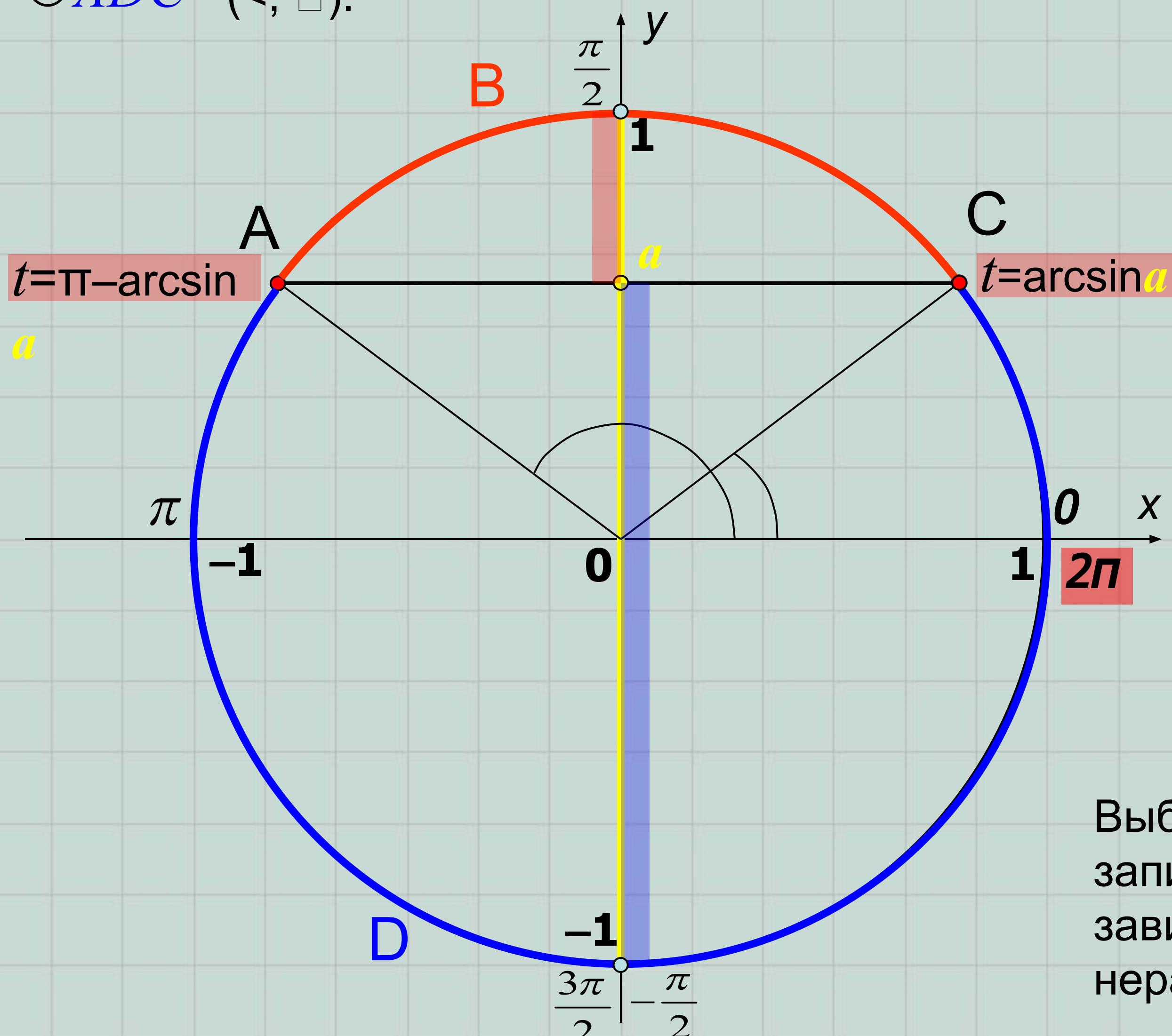
Если знак неравенства нестрогий, то неравенство $\sin t$ □ a, при a □1 выполняется, при $t=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$



Аналогично, неравенство $\sin t$□a , при a□–1 будет верное, если

$$t=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Если $a \in (-1;1)$, то неравенство $\sin t \,□\, a$ выполняется либо на дуге $\cup CBA$ (>, □), либо на дуге $\cup ADC$ (<, □).



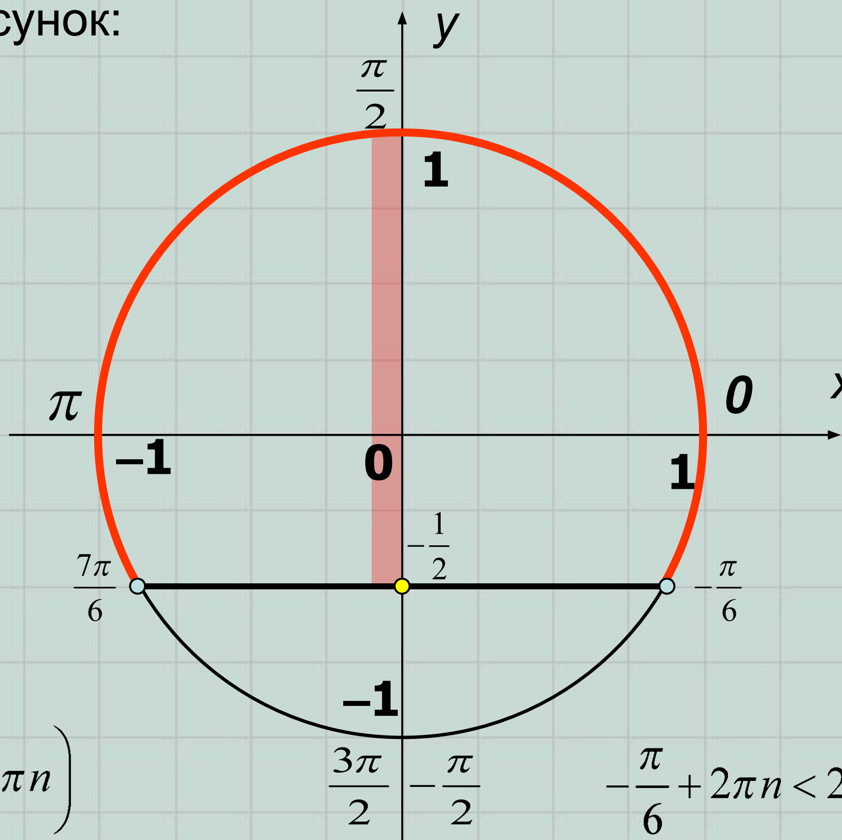
Выбор скобок в записи ответа зависит от знака неравенства

Дугу $\cup$CBA можно записать в виде промежутка [(arcsin$a$+2πn; π–arcsin$a$+2πn)], $n \in$ □

а дугу $\cup$ADC – в виде промежутка [(π–arcsin$a$+2πk; arcsin$a$+2π+2πk)], $k \in$ □,

Пример. Решите неравенство $sin(2x-3)>-0,5$.

Решение. Выполняем рисунок:



$$(2x-3)\in\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$$

$$2x\in\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n+3;\frac{7\pi}{6}+2\pi n+3\right)$$

$$x\in\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{3}{2}+\pi n;\frac{7\pi}{12}+\frac{3}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$$

или

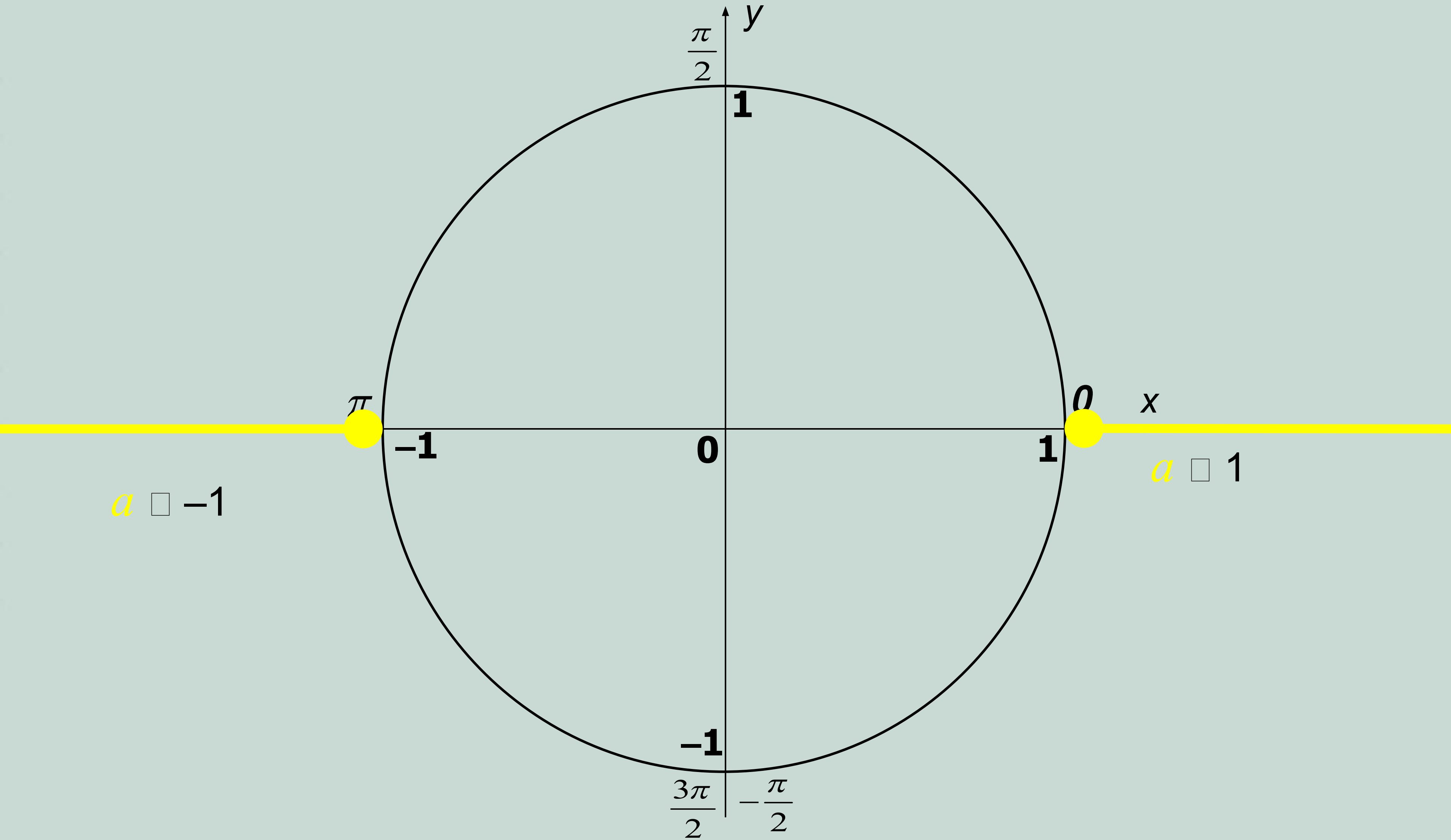
$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n<2x-3<\frac{7\pi}{6}+2\pi n$$

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n+3<2x<\frac{7\pi}{6}+2\pi n+3$$

$$-\frac{\pi}{12}+\frac{3}{2}+\pi n<x<\frac{7\pi}{12}+\frac{3}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

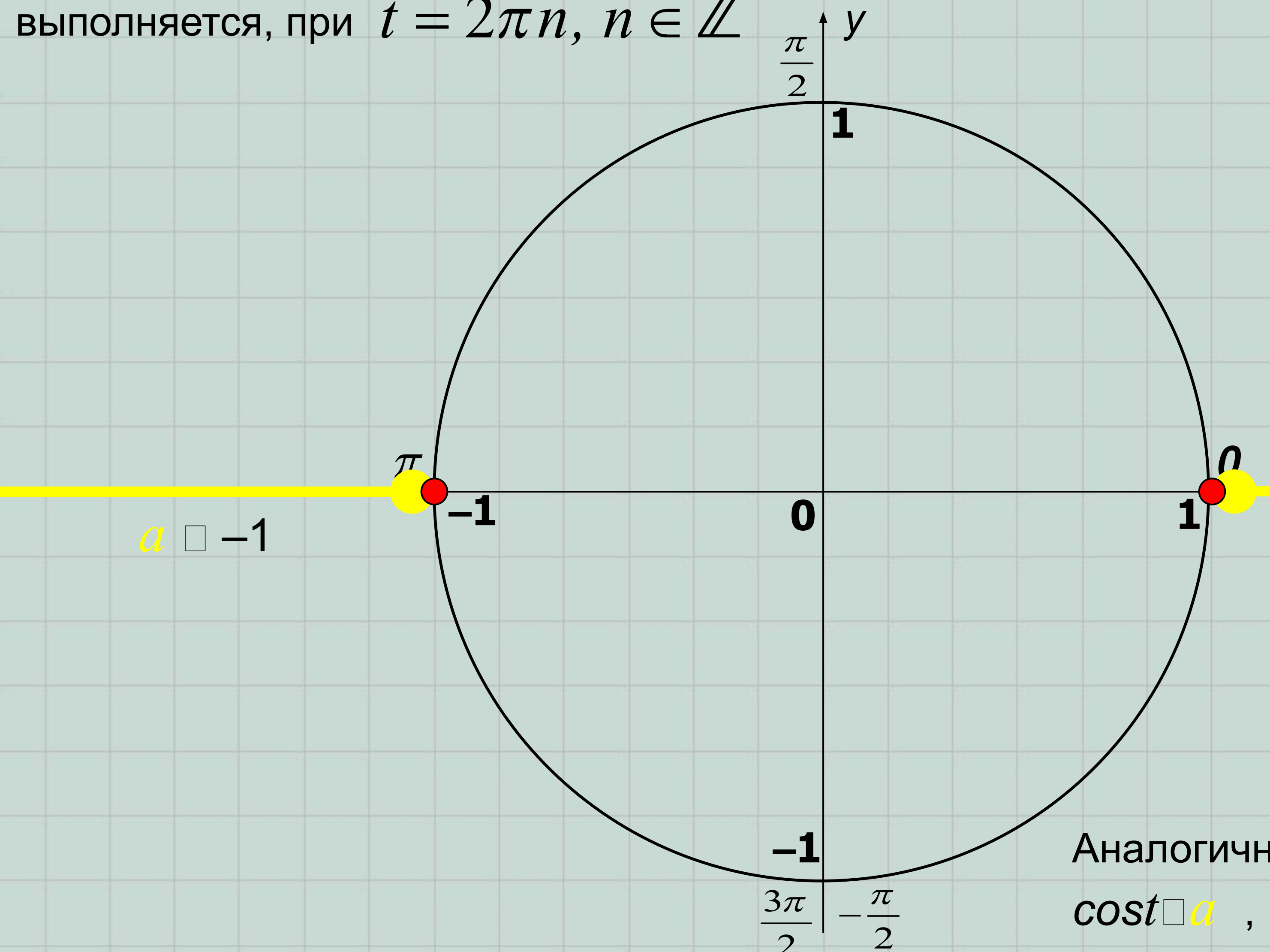
Ответ: $x\in\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{3}{2}+\pi n;\frac{7\pi}{12}+\frac{3}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$

Для неравенство *cost*>*a*, при *a* □1 и *cost*<*a*, при *a* □–1 проведите рассуждения самостоятельно (под руководством учителя).



$$t \in \varnothing$$

Если знак неравенства нестрогий, то неравенство *cost* □ *a*, при *a* □1 выполняется, при $t = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

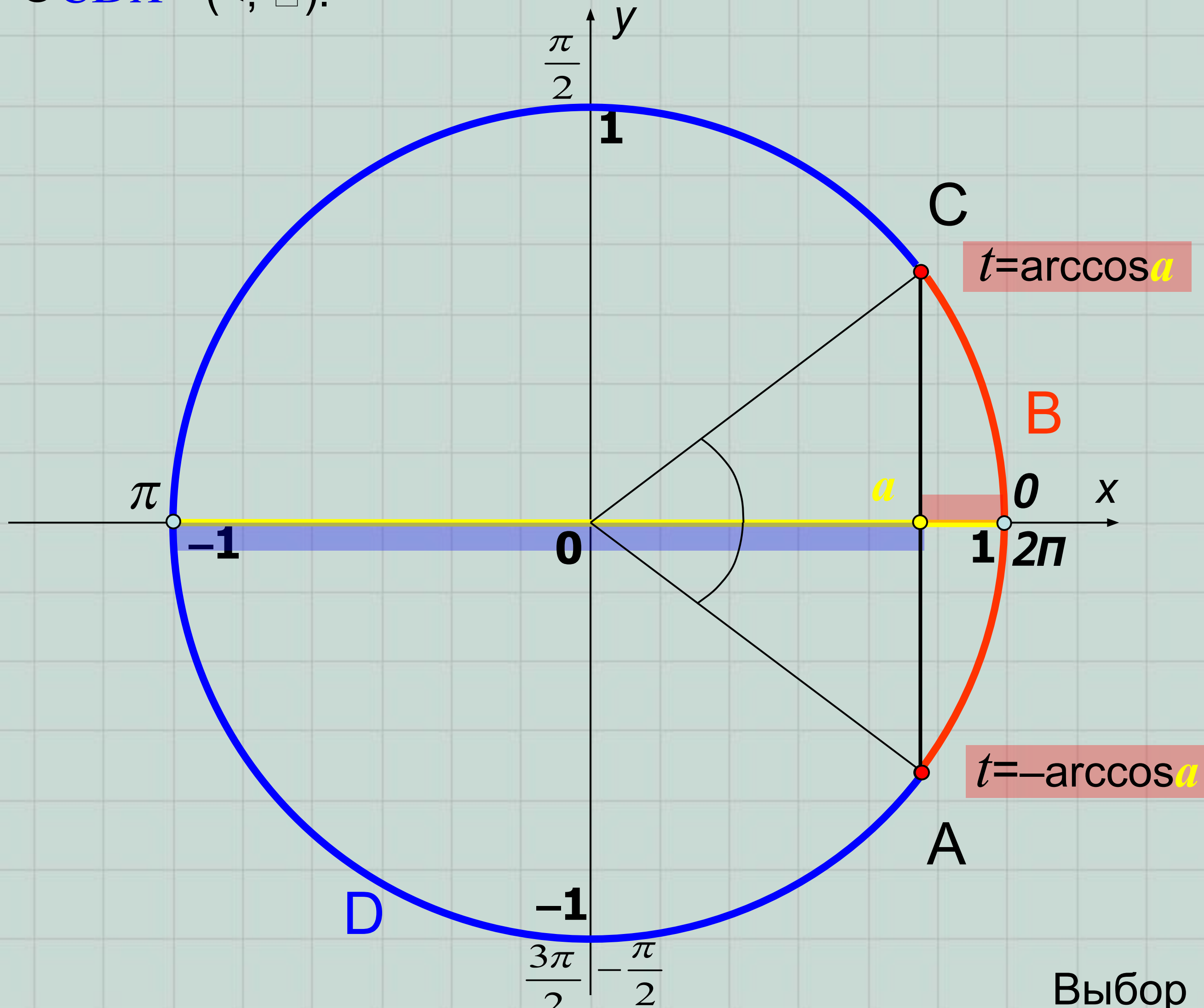


Аналогично, неравенство *cost*□*a* , при *a*□–1 будет верное, если

$$t = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Если $a \in (-1;1)$, то неравенство $\cos t$ □ a выполняется либо на дуге $\cup ABC$ (>, □),

либо на дуге $\cup CDA$ (<, □).



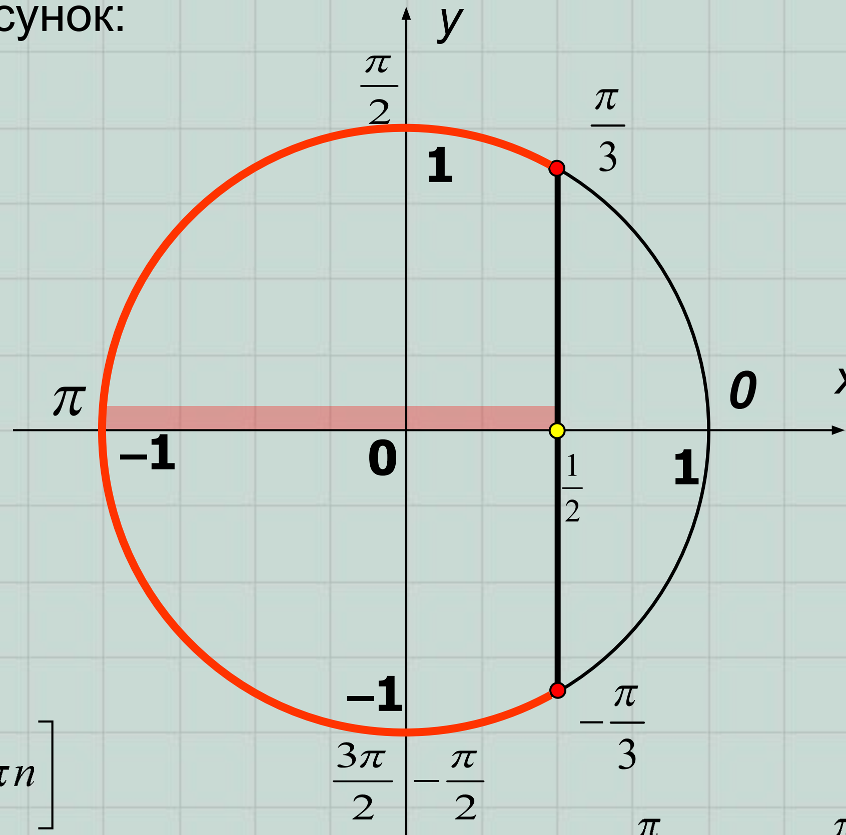
В первом случае $t \in \left(\left[-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n \right] \right),\ n \in \mathbb{Z}$

Во втором, $t \in \left(\left[\arccos a + 2\pi k; 2\pi - \arccos a + 2\pi k \right] \right),\ k \in \mathbb{Z}$

Выбор скобок в записи ответа зависит от знака неравенства

Пример. Решите неравенство $cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\leq\frac{1}{2}$.

Решение. Выполняем рисунок:



$$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\in\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$$

$$-\frac{x}{2}\in\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$$

$$x\in\left[-\frac{17\pi}{6}+4\pi n;-\frac{\pi}{6}+4\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$$

или

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n\leq\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\leq\frac{5\pi}{3}+2\pi n$$

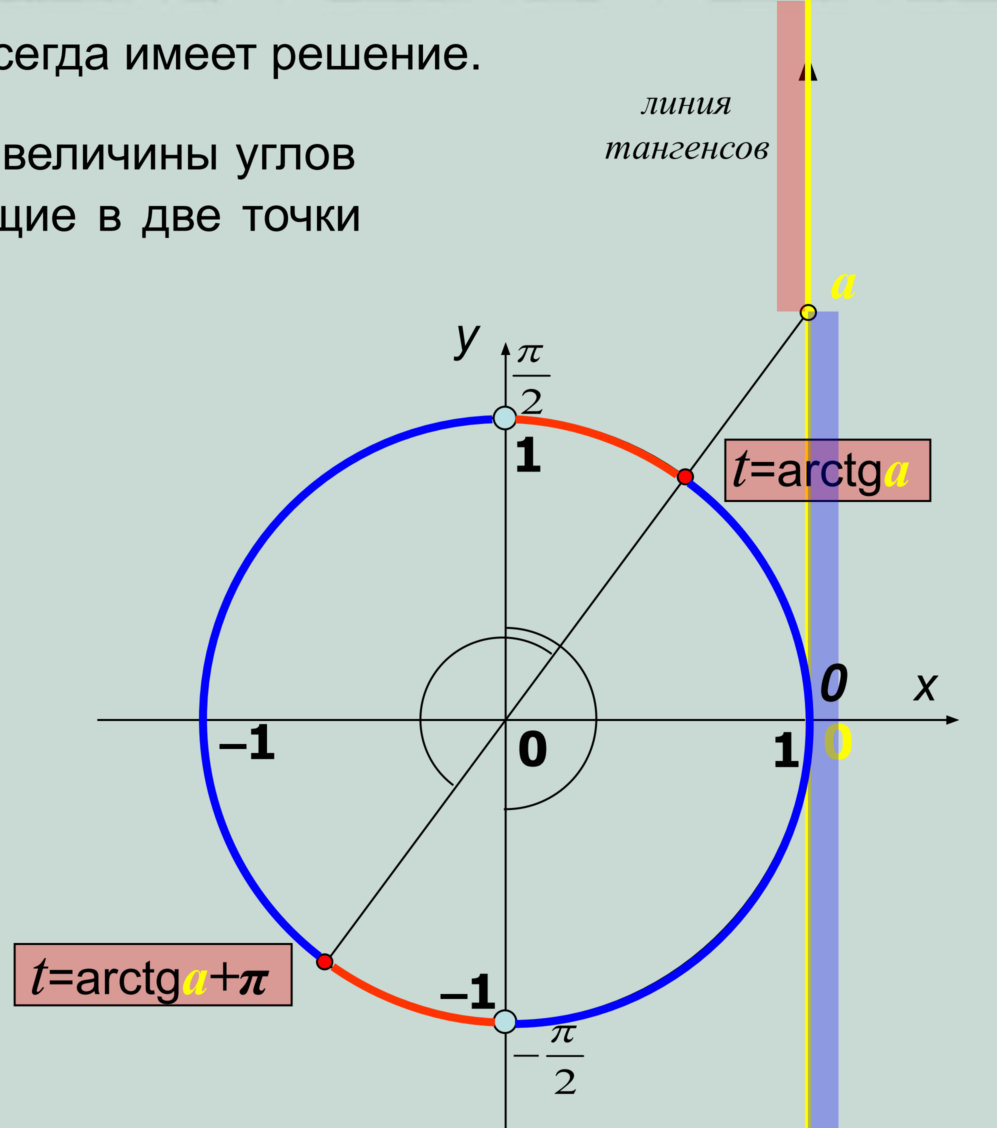
$$\frac{\pi}{3}+2\pi n-\frac{\pi}{4}\leq-\frac{x}{2}\leq\frac{5\pi}{3}+2\pi n-\frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{17\pi}{6}+4\pi n\leq x\leq-\frac{\pi}{6}+4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x\in\left[-\frac{17\pi}{6}+4\pi n;-\frac{\pi}{6}+4\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$.

Так как $E(tg)$=□, то неравенство tg$t$□a всегда имеет решение.

Значению tg$t$=a соответствуют числа t (величины углов поворота в радианной мере), попадающие в две точки тригонометрического круга.



Для неравенств tg$t$>a или tg$t$□a получаем две дуги.

Обе они могут быть записаны в виде промежутка:

$$t \in \left[\left(arctga + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)\right), n \in \mathbb{Z}$$

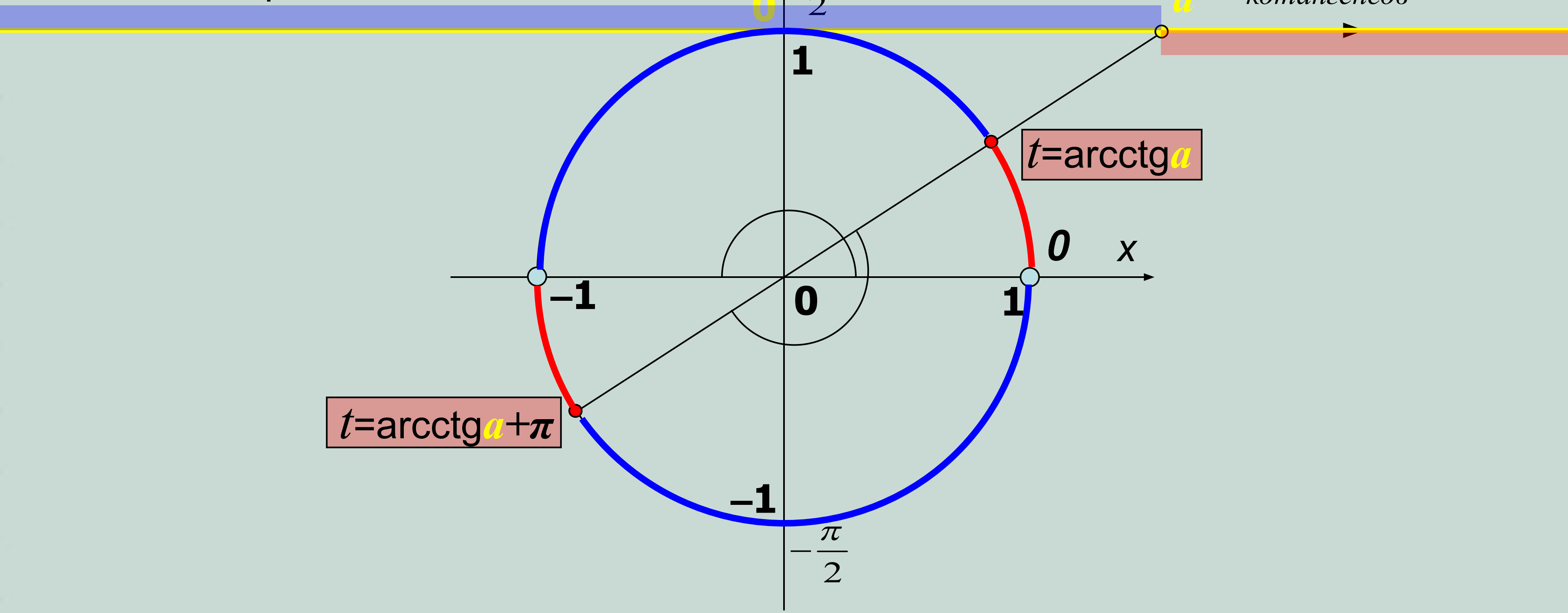
Для неравенств tg$t$<a или tg$t$□a получаем две дуги.

Обе они могут быть записаны в виде промежутка:

$$t \in \left(\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; arctga + \pi k \right)\right], k \in \mathbb{Z}$$

Выбор скобок в записи ответа зависит от знака неравенства

Так как $E(tg)$=□, то неравенство ctg$t$□a всегда имеет решение.



Проследите за ходом решения и выведите общие формулы для неравенств:

ctg$t>a$

$$t \in (\pi n; arcctga + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}$$

ctg$t<a$

$$t \in (arcctga + \pi n; \pi + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}$$

ctg$t$□a

$$t \in (\pi n; arcctga + \pi n],\ n \in \mathbb{Z}$$

ctg$t$□a

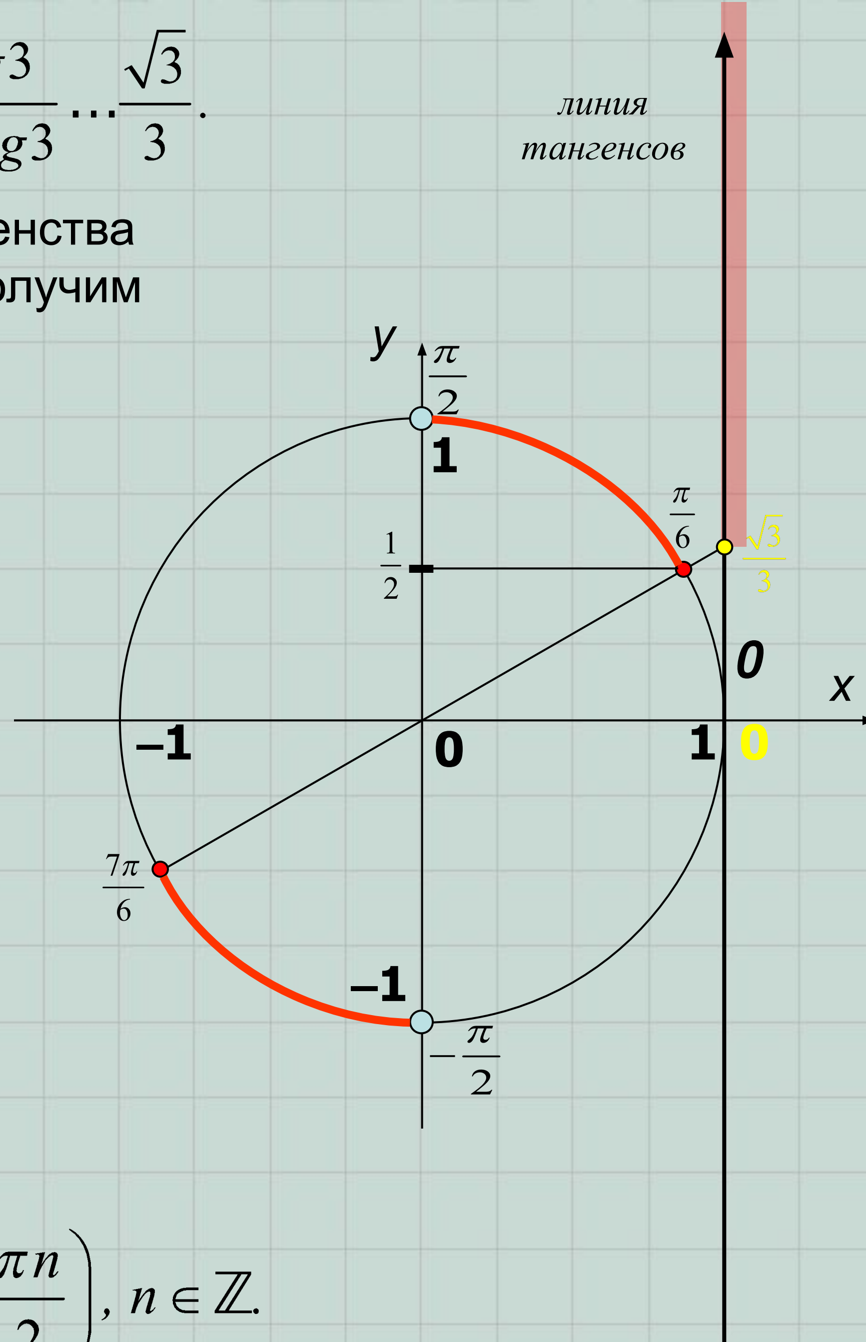
$$t \in [arcctga + \pi n; \pi + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}$$

Пример. Решите неравенство $\dfrac{tg(2x)-tg3}{1+tg(2x)\cdot tg3}\ldots\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Решение. Применив к левой части неравенства формулу тангенса разности, получим равносильное неравенство:

$$tg(2x-3)\ldots\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Выполняем рисунок.



Получаем:

$$\frac{\pi}{6}+\pi n „ 2x-3<\frac{\pi}{2}+\pi n;$$

$$\frac{\pi}{6}+\pi n+3 „ 2x<\frac{\pi}{2}+\pi n+3;$$

$$\frac{\pi}{12}+\frac{3}{2}+\frac{\pi n}{2} „ x<\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x\in\left[\frac{\pi}{12}+\frac{3}{2}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in\mathbb{Z}.$