

Решение простейших тригонометрических уравнений.

Шахова Т. А.

МОУ гимназия №3 г. Мурманска.



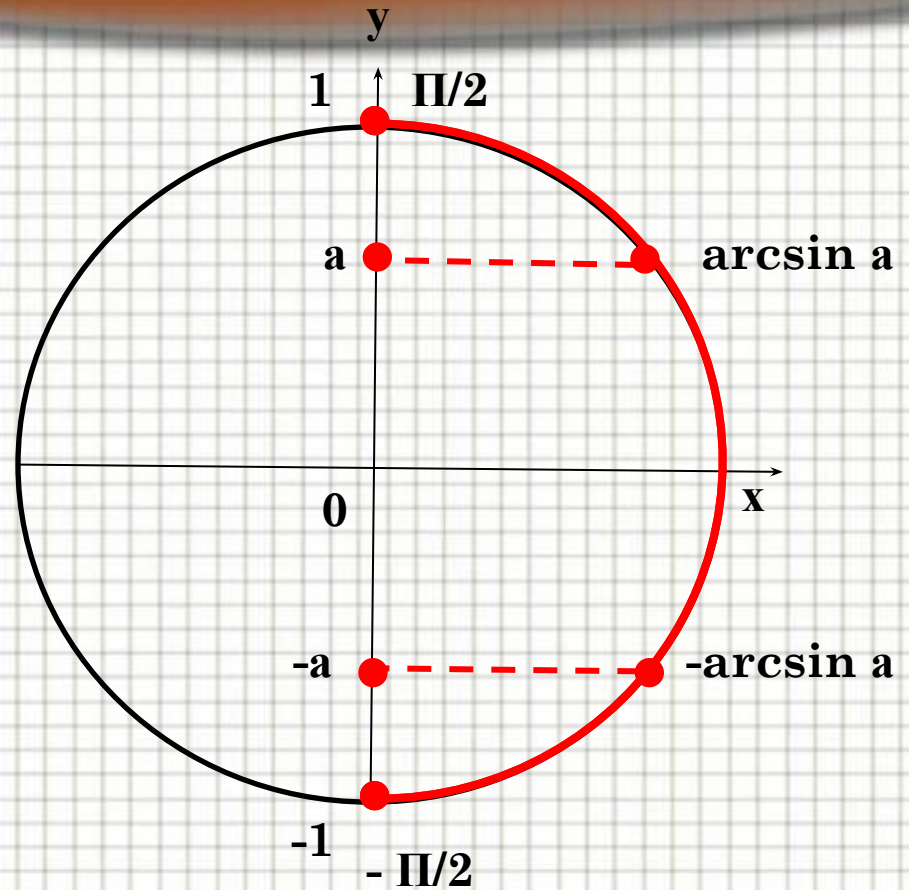
Чтобы успешно решать простейшие тригонометрические уравнения необходимо следующее:

- 1) уметь отмечать точки на числовой окружности;
- 2) уметь определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для точек числовой окружности;
- 3) знать свойства основных тригонометрических функций;
- 4) знать понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и уметь отмечать их на числовой окружности.



Арксинус и решение уравнений $\sin t = a$.

Арксинусом числа a называют такое число из отрезка $[-\pi/2; \pi/2]$, синус которого равен a .



$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$



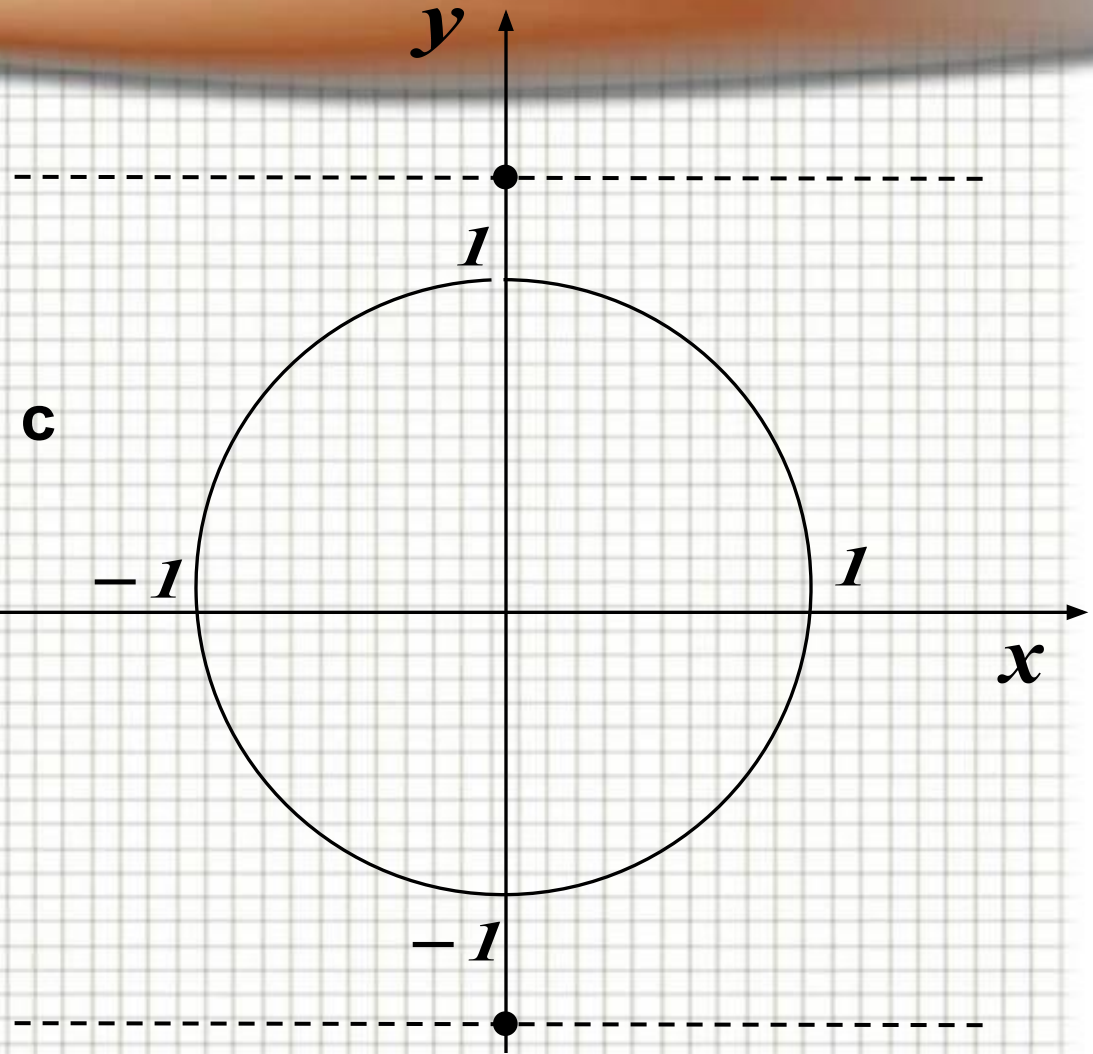
Арксинус и решение уравнений $\sin t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\sin t = a$.

1) $|a| > 1$

Нет точек пересечения с
окружностью.

Уравнение не имеет
решений.



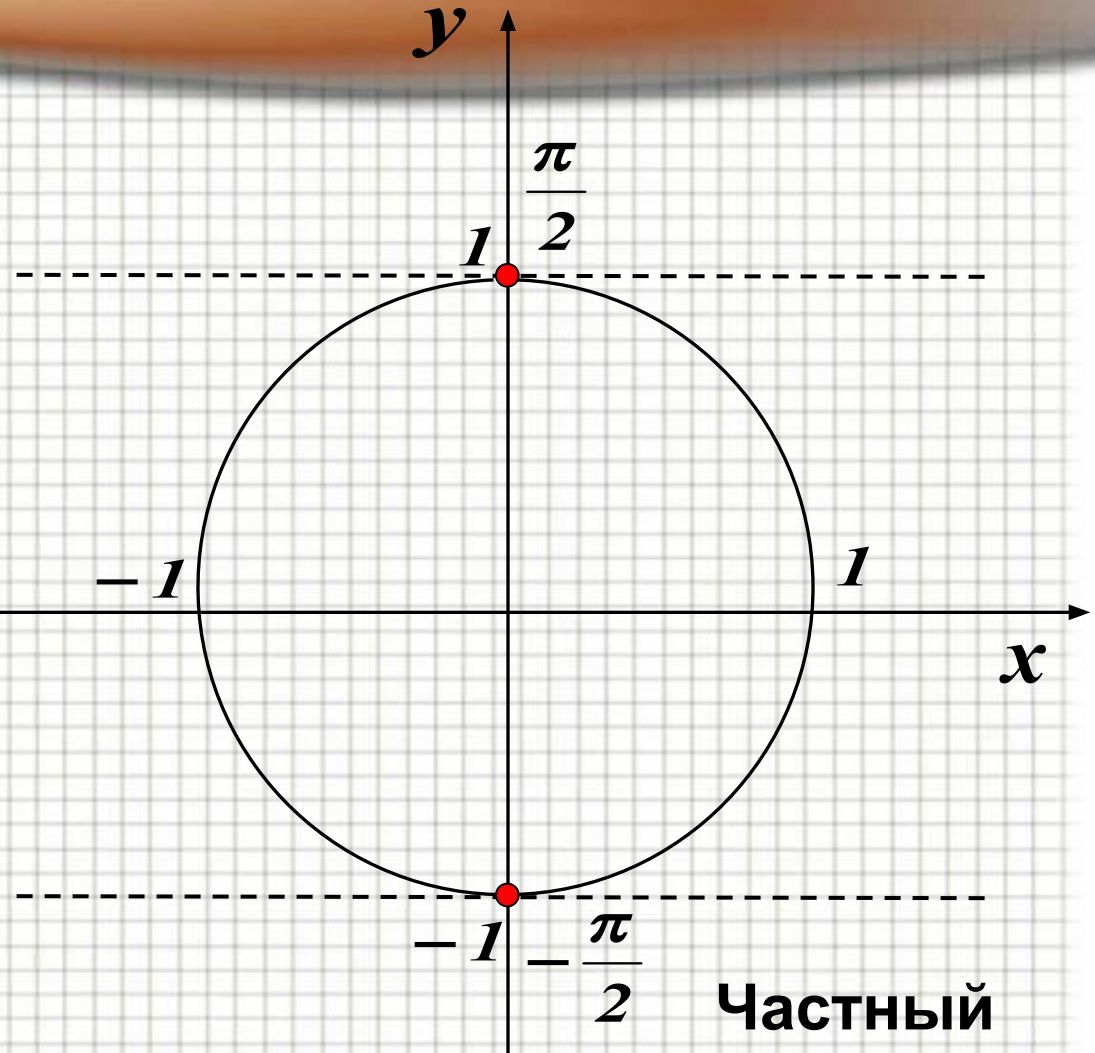
Арксинус и решение уравнений $\sin t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\sin t = a$.

2) $|a| = 1$

$\sin t = 1$
 $t = \pi/2 + 2\pi k$

$\sin t = -1$
 $t = -\pi/2 + 2\pi k$



Частный
случай.

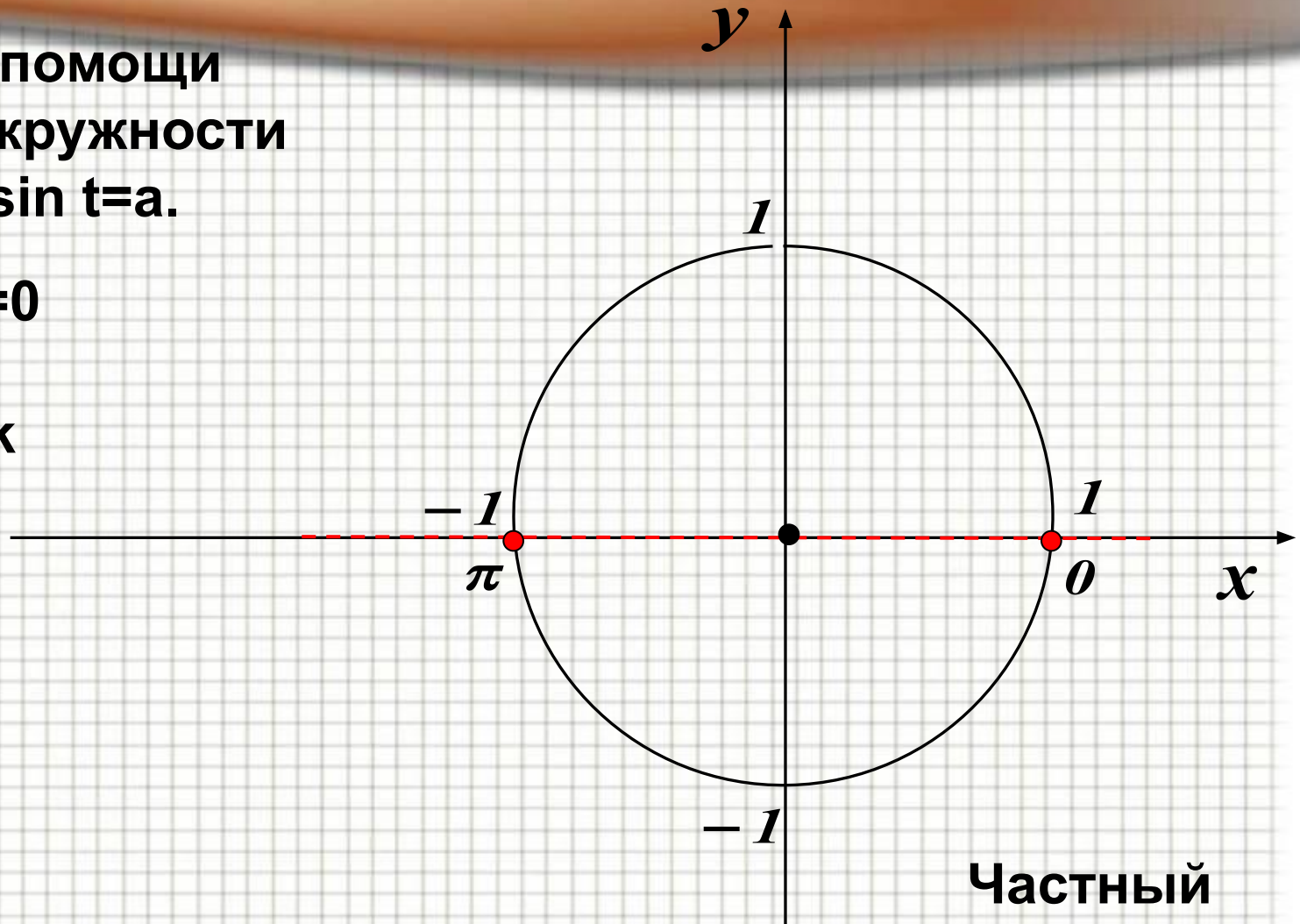


Арксинус и решение уравнений $\sin t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\sin t = a$.

$$3) a = 0$$

$$t = \pi k$$



Частный
случай.



Арксинус и решение уравнений $\sin t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\sin t = a$.

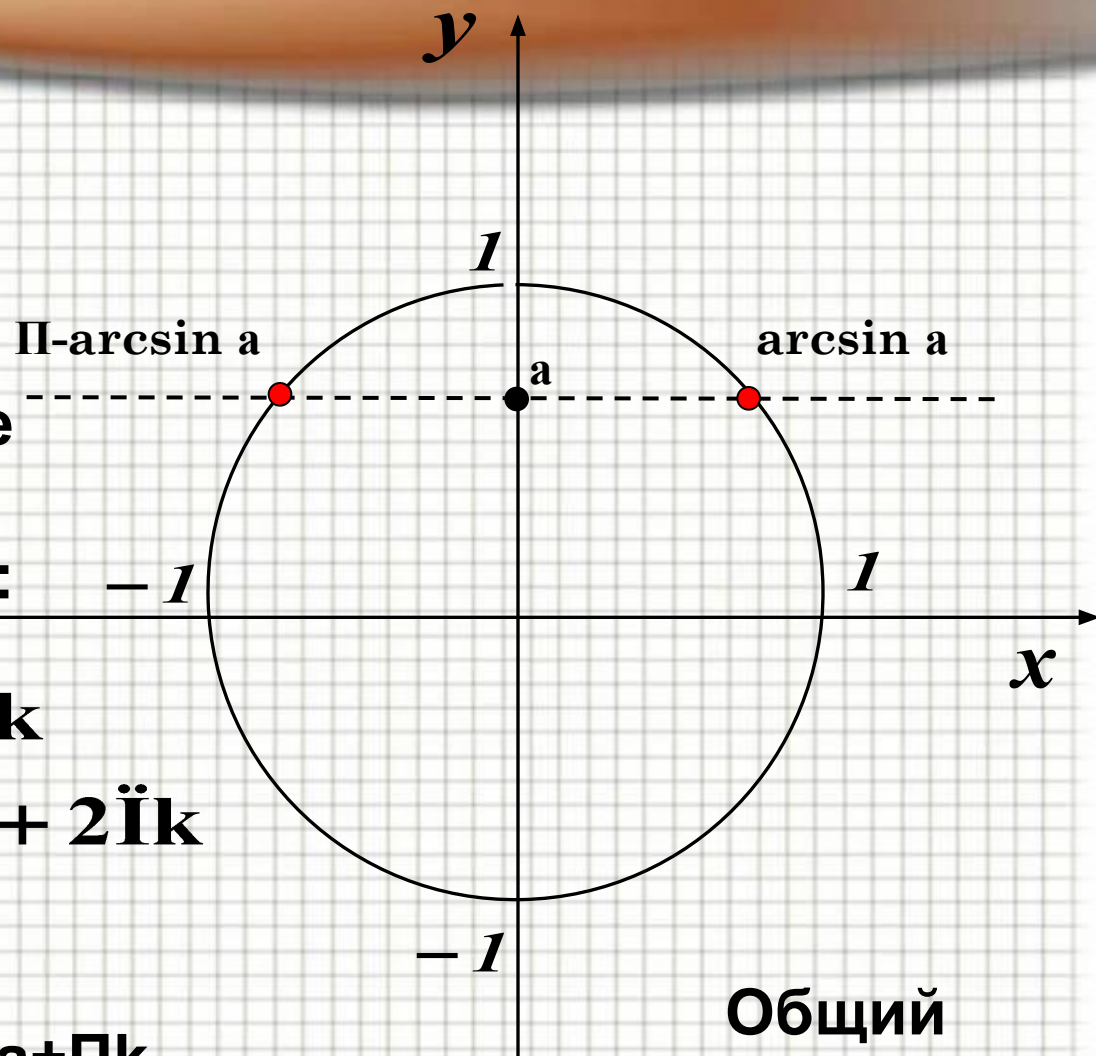
4) $|a| < 1$

Корни, симметричные
относительно Oy
могут быть записаны:

$$t = \begin{cases} \arcsin a + 2\pi k \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k \end{cases}$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k$$

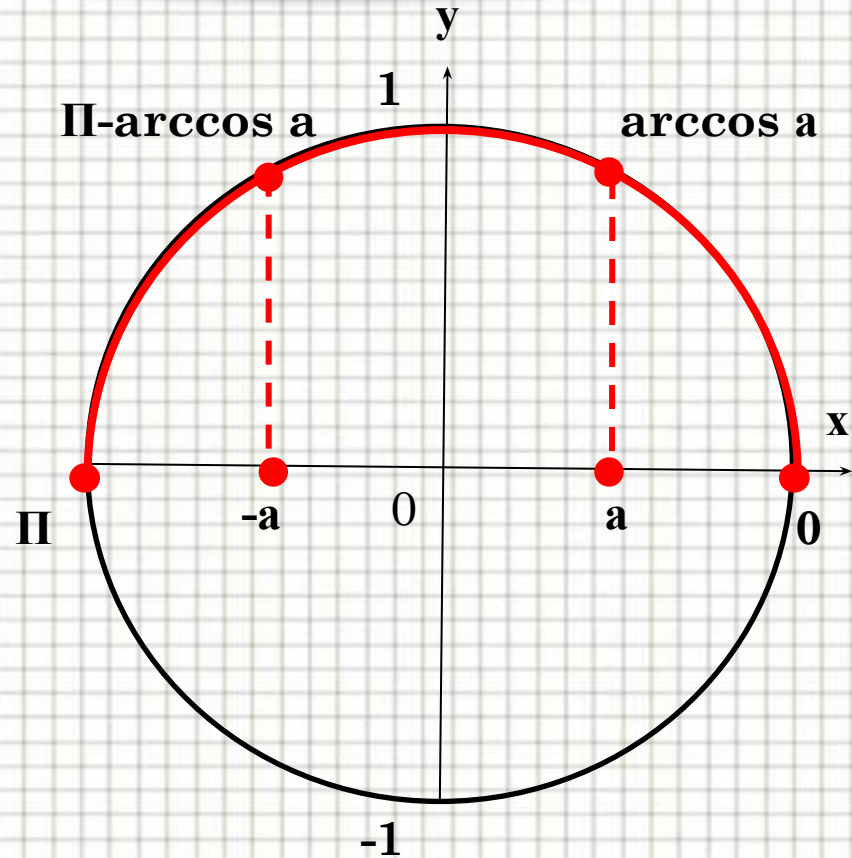


Общий
случай.



Арккосинус и решение уравнений $\cos t = a$.

Арккосинусом числа a называют такое число из промежутка $[0; \Pi]$, косинус которого равен a



$$\arccos(-a) = \Pi - \arccos a$$



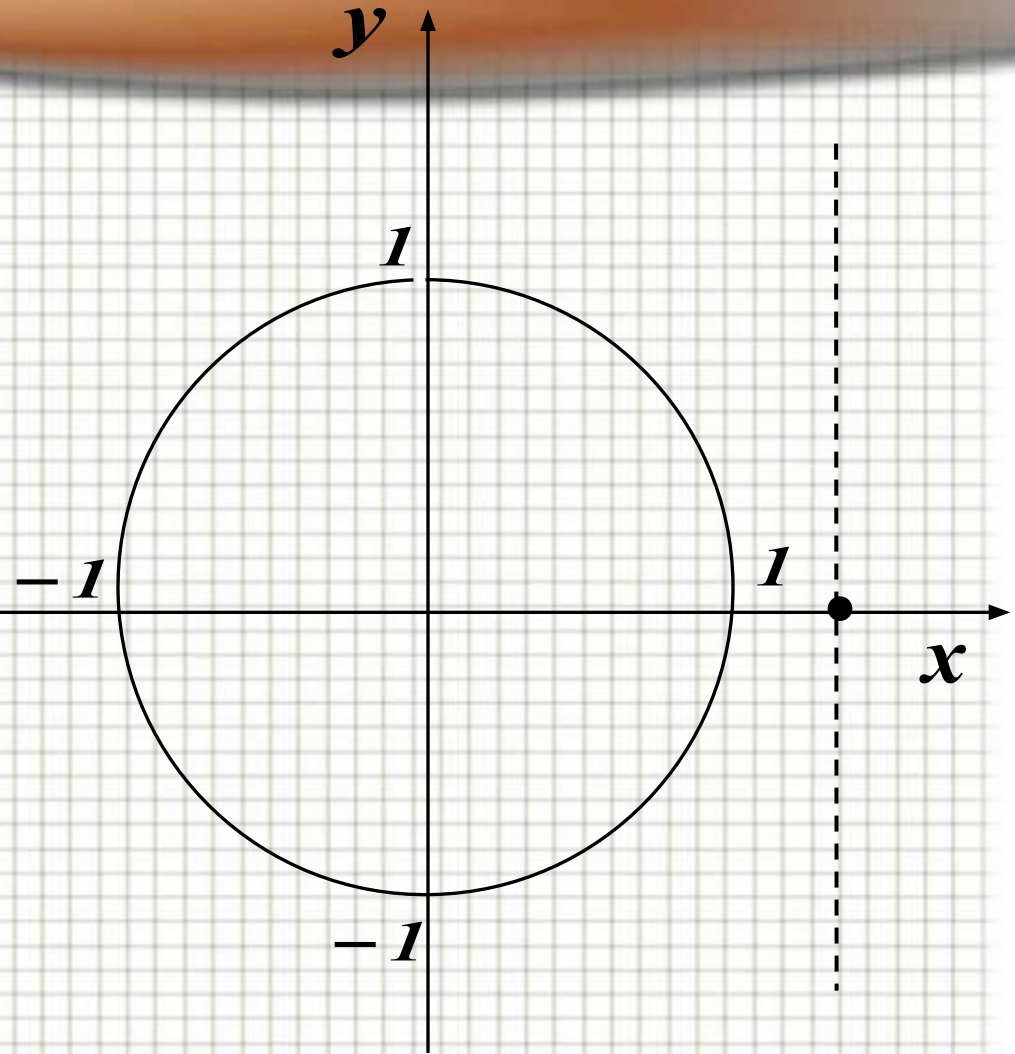
Арккосинус и решение уравнений $\cos t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos t = a$.

1) $|a| > 1$

Нет точек пересечения с
окружностью.

Уравнение не имеет
решений.



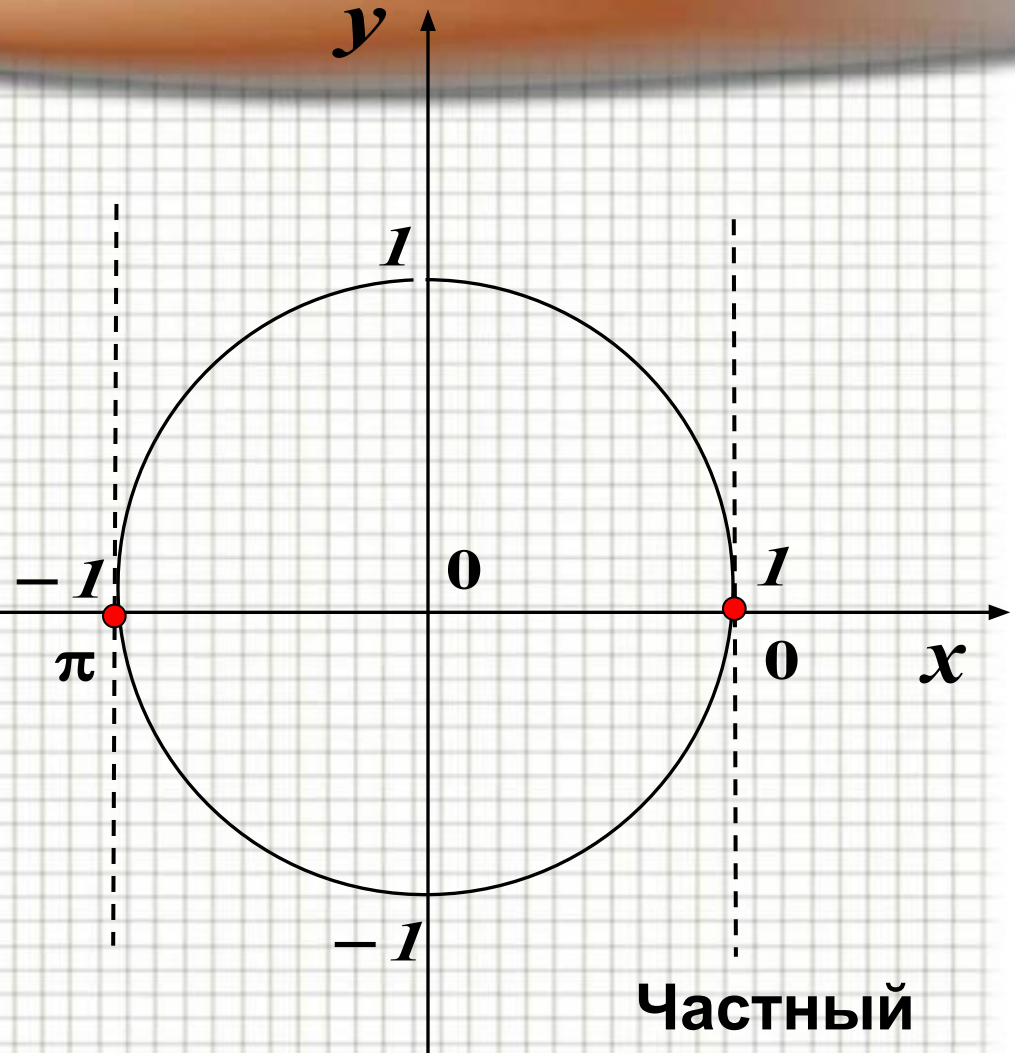
Арккосинус и решение уравнений $\cos t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos t = a$.

2) $|a| = 1$

$\cos t = 1$
 $t = 2\pi k$

$\cos t = -1$
 $t = \pi + 2\pi k$



Частный
случай.

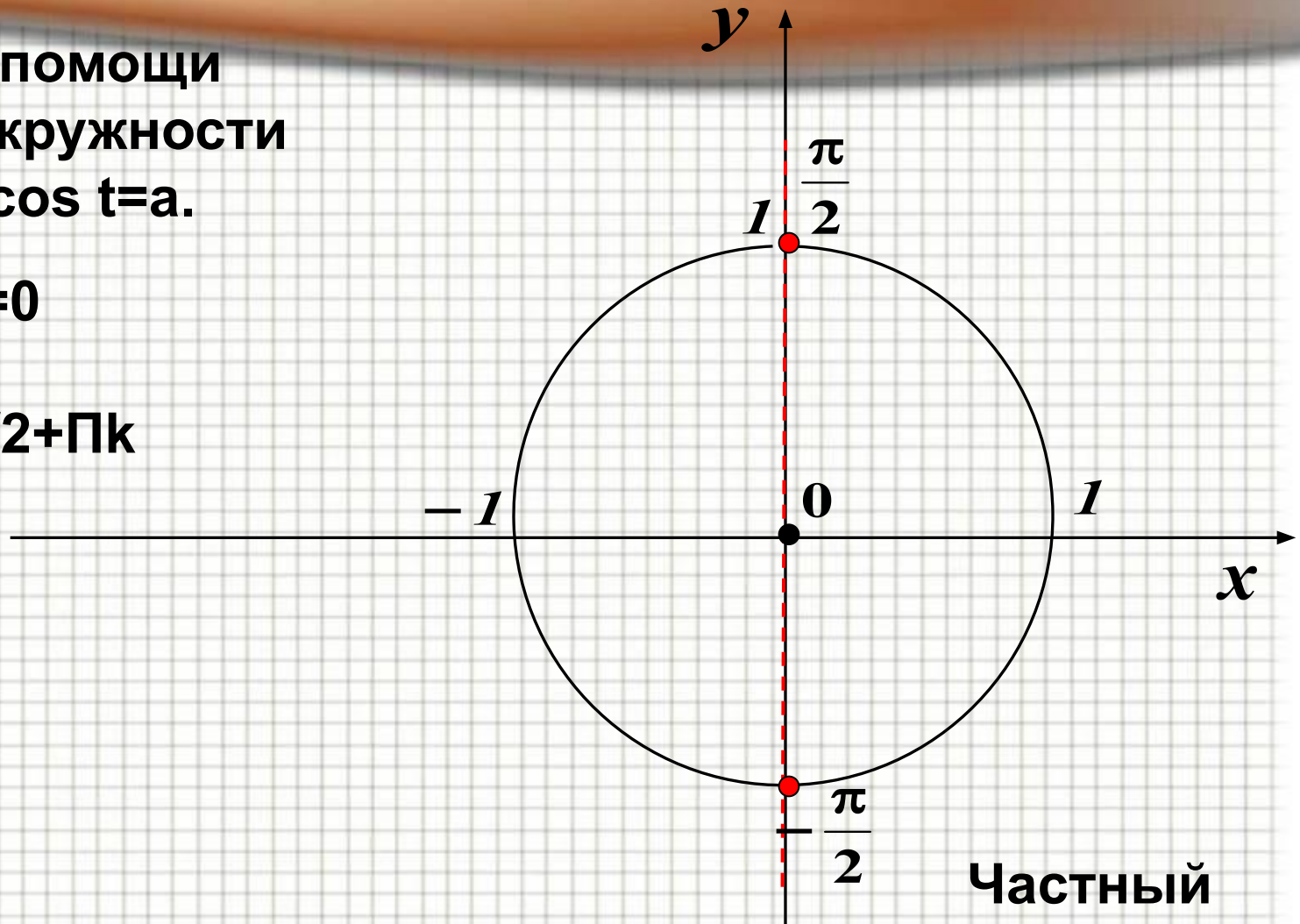


Арккосинус и решение уравнений $\cos t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos t = a$.

$$3) a = 0$$

$$t = \pi/2 + \pi k$$



Частный
случай.



Арккосинус и решение уравнений $\cos t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos t = a$.

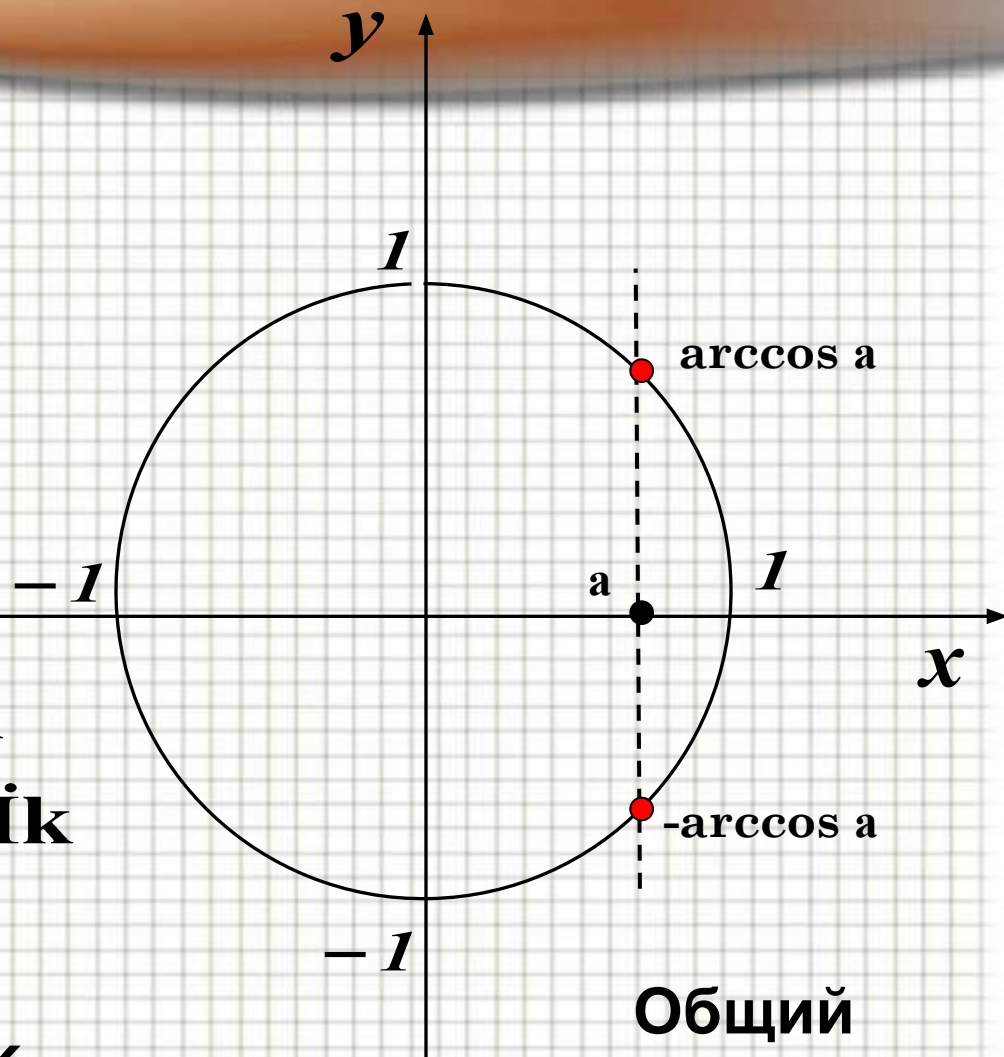
4) $|a| < 1$

Корни, симметричные
относительно Ox
могут быть записаны:

$$t = \begin{cases} \arccos a + 2\pi k \\ -\arccos a + 2\pi k \end{cases}$$

или

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k$$

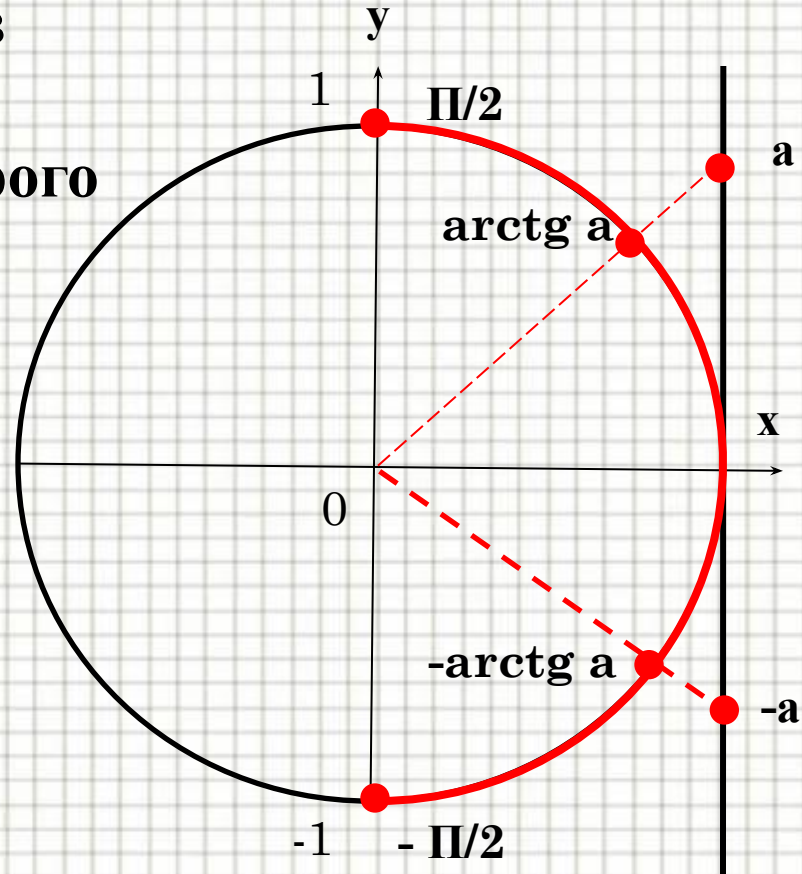


Общий
случай.



Арктангенс и решение уравнений $\operatorname{tg} t = a$.

Арктангенсом числа a называют такое число из интервала $(-\pi/2; \pi/2)$, тангенс которого равен a



$$\operatorname{arctg} (-a) = -\operatorname{arctg} a$$

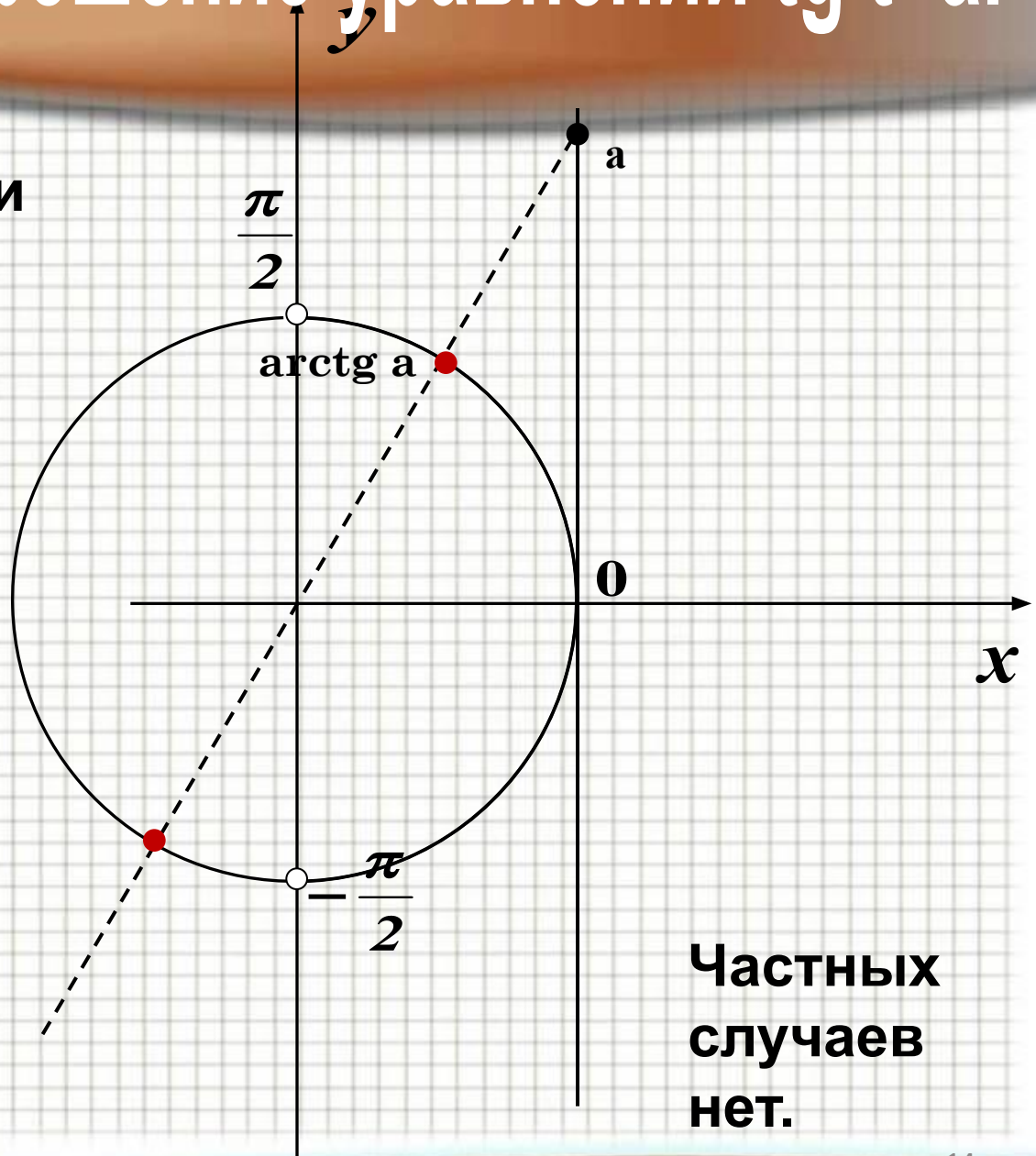


Арктангенс и решение уравнений $\operatorname{tg} t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\operatorname{tg} t = a$.

a – любое число.

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k.$$

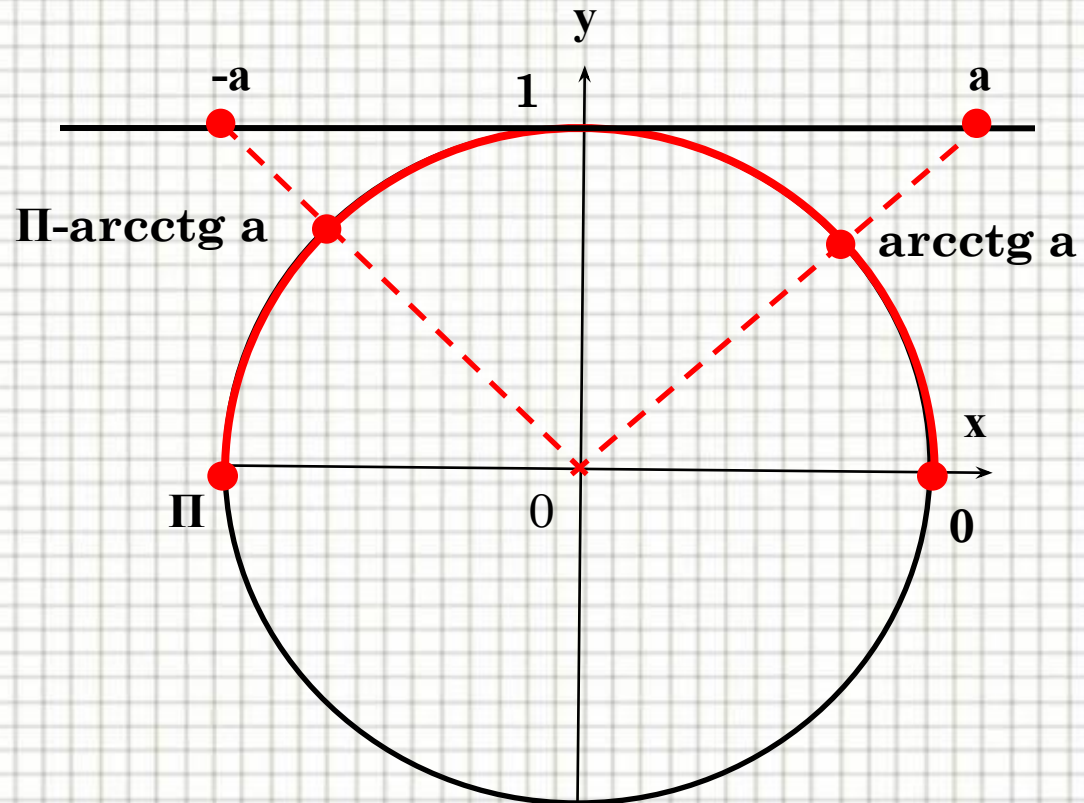


**Частных
случаев
нет.**



Арккотангенс и решение уравнений $\text{ctg } t = a$.

Арккотангенсом числа a называют такое число из интервала $(0; \Pi)$, котангенс которого равен a



$$\text{arcctg } (-a) = \Pi - \text{arcctg } a$$



Арккотангенс и решение уравнений $\text{ctg } t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\text{ctg } t = a$.

a – любое число.

$$t = \text{arcctg } a + \pi k.$$



**Частных
случаев
нет.**



Наша задача:

**свести любое тригонометрическое уравнение
к простейшему виду.**



Примеры уравнений.

$$\sin\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Уравнение уже имеет простейший вид $t = \left(4x + \frac{3\pi}{2}\right)$, однако можно применить формулы приведения и упростить его.

$$-\cos 4x = 0$$
$$\cos 4x = 0$$

Это частный вид уравнения $\cos t = a$
 $a = 0$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

Разделим обе части на 4.

$$0: \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$



Характерная ошибка

$$\cos 4x = 0$$

Учащиеся делят обе части на 4
и получают следующее:

$$\cos x = 0$$

Грубая ошибка.



Примеры уравнений.

$$\sqrt{2} \cos 4x - 1 = 0$$

Уравнение переносом слагаемого и делением обеих частей легко сводится к простейшему.

$$\cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

t

$$\cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$4x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k$$

$$4x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

Разделим обе части на 4.

$$x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$$

О:

$$x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$$



Примеры уравнений.

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = 0$$

Уравнение уже имеет простейший

вид $t = \left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$

Это частный вид
уравнения $\cos t = a$
 $a = 0$

$$-3x = \frac{\pi}{6} + \pi k \quad | \quad \div (-3)$$

$$\frac{\pi}{3} - 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

→

$$x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$$

$$-3x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi k$$

О: $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$



Примеры уравнений.

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$$

Уравнение уже имеет простейший

вид $t = \left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$, однако,

можно использовать четность функции \cos , применить формулы приведения и упростить его.

$$2x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k \quad | \quad \div 2$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

$$O: x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$



Примеры уравнений.

$$\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)\cos x + \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)\sin x = \frac{1}{2}$$

Здесь уместно использовать формулу косинуса разности аргументов:

$$\cos\left(5x + \frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Теперь уравнение имеет простейший вид.

Решение удобнее разбить на два.

$$4x + \frac{\pi}{3} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \quad 4x = \begin{cases} 2\pi k \\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \quad \div 4$$
$$x = \begin{cases} \frac{\pi k}{2} \\ -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{6} \end{cases} \quad \text{О: } x = \begin{cases} \frac{\pi k}{2} \\ -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{6} \end{cases}$$



Потренируйся.

1 вариант

$$\sqrt{2} \cos 4x - 1 = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = \frac{1}{2}$$

$$-2 \cos x = 0$$

$$-\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{x}{4} = 3$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \cos x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \sin x = \frac{1}{2}$$

2 вариант

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(-x) = -1$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$$

$$\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x + \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) \sin x = \frac{1}{2}$$



Спасибо за то, что стараешься!

